Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(4;-1)$ et $D(1;-3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

1.2 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

1.3 Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.4 Calculer le produit scalaire $s = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$.

1.5 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite passant par $H(-2;1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2;-3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :
— D_1 d'équation : $2x + y - 3 = 0$
— D_2 passant par $A(0;3)$ et $B(3;5)$
— D_3 d'équation : $4x - y = 6$

2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5;-2)$ sur la droite D d'équation $y = -3x + 4$.

2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x;y) \ / \ y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x;y) \ / \ x - 4y + 12 = 0\}$.

2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1;-4)$ et de rayon 7.

2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

$$a)\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 2 \ \ ; \ \ b)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \ \ ; \ \ c)\ x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$$

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB, ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

3. Barycentres

3.1 Le barycentre de n points M_i de poids respectifs p_i est le point G vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

(a) Établir la relation entre les coordonnées de G et celles des points M_i ?

(b) Que devient cette dernière relation si G est l'isobarycentre des points ?

(c) Calculer les coordonnées du barycentre G et de l'isobarycentre I du triangle formé par les points $A(0;3)$, $B(1;1)$ et $C(4;0)$ affectés respectivement des poids 1, 3 et 2.

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine ? On appellera le point D.

(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg ?

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A, et calculer l'aire du triangle ABC.

4. Applications en physique

4.1 Un skieur de masse totale $m = 90$ kg, tout équipement compris, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale. Sa vitesse étant constante, on choisit de modéliser l'ensemble des frottements qu'il subit par une force unique $\vec{F}$ ayant la même direction que le mouvement du skieur mais de sens opposé. On peut modéliser le skieur par un solide en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Après avoir tracé les vecteurs modélisant les différentes forces mises en jeu, déterminer leurs coordonnées et en déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{F}$.

4.2 En électricité, en régime alternatif sinusoïdal, on peut représenter les tensions avec des vecteurs. On procède alors de la manière suivante :
— la valeur efficace est représentée par la norme du vecteur ;
— et la phase, ou le déphasage, par l'angle que forme le vecteur par rapport à $[Ox)$.

(a) Dans la 1ère situation, on souhaite calculer la somme v des deux tensions suivantes :
— la tension v_1 mesurée aux bornes d'une résistance, de valeur efficace 12 V et qui constitue la référence des phases (elle a donc une phase de 0°) ;
— la tension v_2 mesurée aux bornes d'une capacité, de valeur efficace 4 V, et ayant un retard de phase de 90°.
Déterminer la valeur efficace et la phase de v.

(b) Dans la 2e situation, on mesure :
— la tension v_2 aux bornes d'une inductance, qui a une valeur efficace de 3 V, et présente une avance de phase de 90° ;
— la somme v des deux tensions, de valeur efficace 10 V et avec une avance de phase de 30°.
Déterminer la valeur efficace et la phase de v_1.

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(4;-1)$ et $D(1;-3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

1.2 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

1.3 Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.4 Calculer le produit scalaire $s = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$.

1.5 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\4-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = 12-12 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = -6+10 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ $\overrightarrow{BC}$ n'est pas $\perp$ à $\overrightarrow{CD}$

3) $\|\overrightarrow{AD}\| = (9+16)^{1/2} = 5$; $\|\overrightarrow{AC}\| = (36+4)^{1/2} = \sqrt{40} \approx 6{,}3$ u.l.

4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\overrightarrow{AD}\|\cos(\theta) = 18+8 = 26 \Rightarrow \cos(\theta) = \dfrac{26}{5\sqrt{40}} = 0{,}82$

$\Rightarrow \theta = \pm 0{,}61 \approx \pm 35^\circ$

5) $\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = \|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\sin(\theta) = 5\sqrt{40}\sin(\theta)$

$= \begin{vmatrix}6 & 3\\-2 & -4\end{vmatrix} = -24+6 = -18$

$\sin(\theta) = \dfrac{-18}{5\sqrt{40}} = -0{,}56$

$\theta = -0{,}61$ rad

$\Rightarrow \theta = -35^\circ$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\|\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\| = \dfrac{18}{2} = 9$ u.a $= \mathcal{A}$

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite passant par $H(-2; 1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2; -3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :
— D_1 d'équation : $2x + y - 3 = 0$
— D_2 passant par $A(0; 3)$ et $B(3; 5)$
— D_3 d'équation : $4x - y = 6$

2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5; -2)$ sur la droite D d'équation $y = -3x + 4$.

2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x; y) \ / \ y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x; y) \ / \ x - 4y + 12 = 0\}$.

2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1; -4)$ et de rayon 7.

2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

$$a)\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 2 \quad ; \quad b)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \quad ; \quad c)\ x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$$

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1; 1)$ et $B(0; -1)$ et du cercle de centre $C(2; 0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB, ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

1 $D = \{M(x; y) \in \mathbb{R} \setminus y = -5x + 8\}$. De la forme $y = ax + b$
"b" ordonnée à l'origine, n'intervient pas.

. $y = -5x$; si $x = 1 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

. $\vec{n} \perp (D)$ alors $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow x - 5y = 0 \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}+5\\1\end{pmatrix}$

② $(\mathcal{D}) : 2x+3y+2=0 \iff ax+by+c=0$

$\boxed{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}$ et $\vec{n}$ tq $\vec{u}.\vec{n}=0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

③ Soit $(\mathcal{D}) : y = 2x-1$

(a) • Soit $(\mathcal{D})$ $ax+by=0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

ou si $y = ax+b \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} +1 \\ a \end{pmatrix}$

ici $y = 2x-1 \Rightarrow \boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

• Un vecteur normal $\vec{n}$ à $(\mathcal{D})$ est tel que $\boxed{\vec{u}.\vec{n}=0}$

alors $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) On cherche les vecteurs directeurs de chacune des droites

i) $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{u}_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ iii) $\vec{u}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ or $\vec{n} = \vec{u}_2$

donc $(\mathcal{D}')$ d'equation $\boxed{y = -\frac{1}{2}x+1}$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$

④ Soit $(\mathcal{D}')$: $y = \frac{x}{2} - 5$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\mathcal{D})$

Ainsi $\overrightarrow{HM} \perp \vec{u}$ alors $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \iff \begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0$

$\iff 2x + 4 + y - 1 = 0$ et $\boxed{y = -2x - 3}$ est l'equation de $(\mathcal{D})$

⑤ Soit $(\mathcal{D}')$ la droite d'equation $y = -2x + 3$. Alors $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point de $(\mathcal{D})$; alors $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$ est $\parallel$ à $\vec{u}_1$.

Ainsi $\det(\vec{u}_1 ; \overrightarrow{GM}) = 0 \iff \begin{vmatrix}1 & x-2\\-2 & y+3\end{vmatrix} = 0$

$\iff y + 3 + 2x - 4 = 0 \iff \boxed{y = -2x + 1}$ est l'équation de $(\mathcal{D})$

⑥ . $(\mathcal{D}_1)$: $y = -2x+3$

$(\mathcal{D}_2)$ passe par $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

$y = ax+b$ tel que $a = \frac{5-3}{3-0} = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}x+b$

passe par A : $3 = 0 + b = 3 \Rightarrow (\mathcal{D}_2)$ $\boxed{y = \frac{2}{3}x+3}$

$(\mathcal{D}_3)$ $y = 4x-6$

. I_1 point d'intersection de $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$:

Alors $I_1 \in \begin{cases} y = -2x+3 \\ y = \frac{2}{3}x+3 \end{cases} \underset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow} 0 = -2x - \frac{2}{3}x + 0$

$\hookrightarrow x = 0$ et $y = 3$

$\boxed{I_1 = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}}$

. $I_2 \in \begin{cases} y = +\frac{2}{3}x+3 \\ y = 4x-6 \end{cases}$ $(1)-(2) \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}x + 3 - 4x + 6$

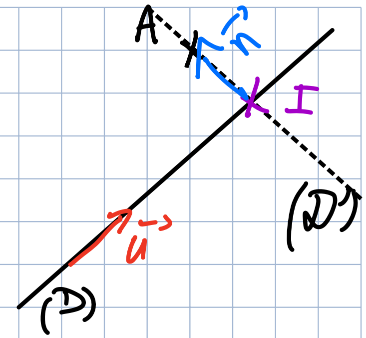
$\Leftrightarrow 0 = -\frac{10}{3}x + 9 \Rightarrow x = +\frac{27}{10}$

$\Rightarrow y = +\frac{27}{10} \cdot \frac{2}{3} + 3 = +\frac{18}{10} + \frac{30}{10}$

$\Rightarrow y = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$

$\boxed{I_2 = \begin{pmatrix}+\frac{27}{10}\\ \frac{24}{5}\end{pmatrix}}$

. De même $\boxed{I_3 = \left(\frac{3}{2} ; 0\right)}$



(7) $\mathcal{D} = \{ M(x;y) \in \mathbb{R} \mid y = -3x+4 \}$

- Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$
- $A\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$;

On cherche l'équation de $(\mathcal{D}')$. Soit $\vec{n}$ vect. directeur de $(\mathcal{D}') \perp$ à $(\mathcal{D})$.

Alors $\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow n=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $y = +\frac{x}{3}+b$ passe par $A\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow b = -\frac{11}{3}$. Ainsi $\mathcal{D}' = \{ M'(x;y) \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x-11}{3} \}$

$I \in (\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$: $\boxed{I = \left(\frac{23}{10} ; -\frac{29}{10}\right)}$

(8) $(\mathcal{D}_1)$: $y = 3x+2 \Rightarrow \vec{u}_1 : \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$(\mathcal{D}_2)$: $x-4y+12=0 \Rightarrow \vec{u}_2 : \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 4.1+3.1 = 7$

$= u_1.u_2.\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{7}{\sqrt{10}\sqrt{17}} \approx 0,54$ rad

$\Rightarrow \boxed{\theta = \pm 1,0.\ (a)}$

or : $\det(\vec{u}_1;\vec{u}_2) = \begin{vmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{vmatrix} = 1-12 = 11 = u_1.u_2.\sin(\theta)$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{17}} \approx 0.84$

$\Rightarrow \boxed{\theta = -1,0\ (b)}$. (a) ; (b) $\Rightarrow \boxed{\theta \simeq 1 \text{rad} \approx 57,5'}$

(9) Cercle de centre $(x_0;y_0)$ et de rayon R : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$

ainsi $(\mathcal{C})$ de centre $(1;-4)$ et $R=7$: $(x-1)^2+(y+4)^2 = 49$

(10) a) $C_1 : \{ M(x;y) \in \mathbb{R} \mid C(3;-1) ; R=\sqrt{2} \}$ cercle centre $(3;-1)$ et $R = \sqrt{2}$

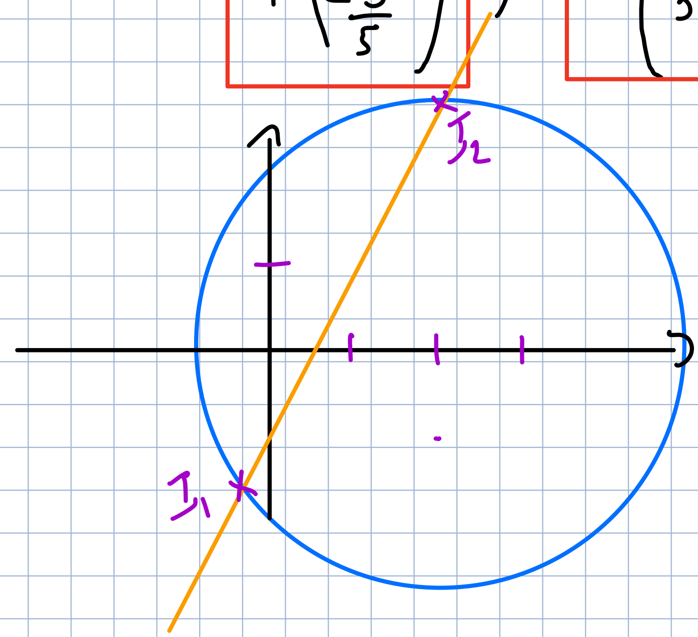
b) $C_2 : \{$ —— $\mid (x-1)^2+(y+2)^2 = 8 \}$; cercle centre $(1;-2)$ et $R = \sqrt{8}$

c) $C_3 : \{$ —— $\mid (x+1)^2+(y+2)^2 = 3 \}$; cercle centre $(-1;-2)$ et $R = \sqrt{3}$

(11) $(D) : \{ M(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x - 1 \}$

$\mathcal{C} : \{ M(x;y) \in \mathbb{R}^2 / (x-2)^2 + y^2 = 9 \}$

$\Rightarrow I_{1,2} \in (D) \text{ et } \mathcal{C} : \boxed{I_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}} \; ; \; \boxed{I_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$



$$\mathcal{A} = \frac{|\det(\vec{OA};\vec{OB})|}{2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} \, ua = \mathcal{A}}$$

Angle $(\vec{OA};\vec{OB}) = \theta$; calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$; $\det(\vec{OA};\vec{OB})$.

3. Barycentres

3.1 Le barycentre de n points M_i de poids respectifs p_i est le point G vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

(a) Établir la relation entre les coordonnées de G et celles des points M_i ?

(b) Que devient cette dernière relation si G est l'isobarycentre des points ?

(c) Calculer les coordonnées du barycentre G et de l'isobarycentre I du triangle formé par les points $A(0;3)$, $B(1;1)$ et $C(4;0)$ affectés respectivement des poids 1, 3 et 2.

3) a) $\forall i \in \mathbb{N}$; $\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}$

Donc $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \vec{O} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \, \overrightarrow{OM_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i \overrightarrow{OG} = 0$ or $\exists$ qu'un seul barycentre.

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$

b) Isobarycentre : $p_i = p_j = \cdots = p_n = 1$

ainsi : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i}}{n}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $A\overset{1}{(0;3)}$; $B\overset{3}{(1;1)}$; $C\overset{2}{(4;0)}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{1+3+2} = \begin{cases} \frac{0+3.1+2.4}{6} = x_G = \frac{11}{6} \\ \frac{1.3+3.1+2.0}{6} = \frac{6}{6} = 1 = y_G \end{cases} ; \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \begin{cases} \frac{0+1+4}{3} = \frac{5}{3} = x_I \\ \frac{3+1+0}{3} = \frac{4}{3} = y_I \end{cases} ; \overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine ? On appellera le point D.

(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg ?

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A, et calculer l'aire du triangle ABC.

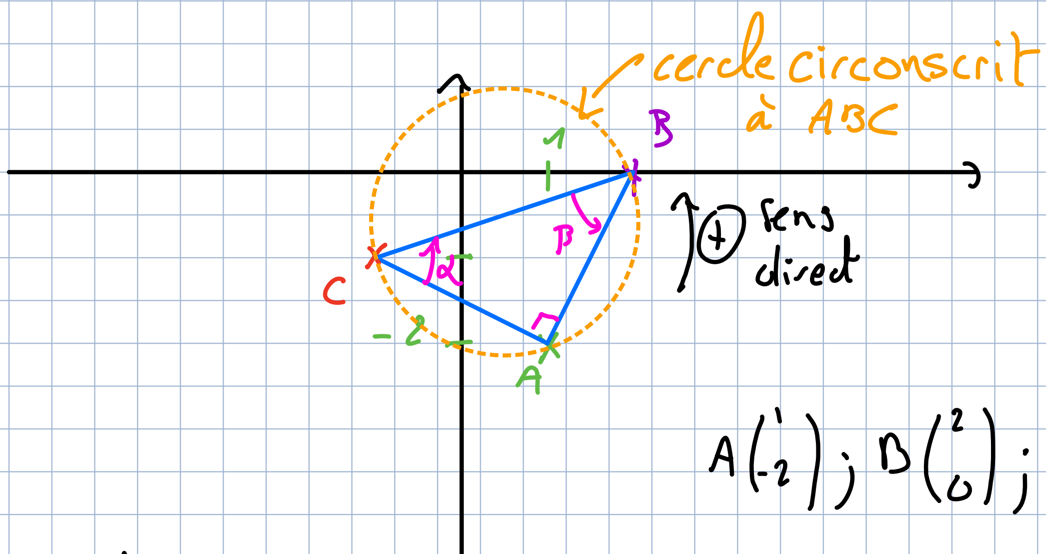
3.2 : Soit G le barycentre alors $\boxed{\vec{OG} = \dfrac{\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} + \delta\vec{OD}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}$

a). Si $G \equiv O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \dfrac{2\alpha + \beta + \gamma + 4x_D}{1+1+1+4} \Rightarrow x_D = -1$

$0 = \dfrac{-\alpha + 2\beta + 4\gamma + 4y_D}{1+1+1+4} \Rightarrow y_D = -\dfrac{5}{4}$

b) Si maintenant $\delta = 2 \Rightarrow x_G = \dfrac{2}{5}$ et $y_G = \dfrac{1}{2}$

3.3 :



$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

a) Triangle ABC

→ Rectangle en A : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0$ (1)

→ aussi isocèle : $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \det(\vec{BC};\vec{BA}) = \vec{BC}\cdot\vec{BA}$ (2)

Si C est un point de coordonnées $(x\,;y) \in \mathbb{R}$ alors (1) et (2) fournissent un système de 2 équations à 2 inconnues

$$S : \begin{cases} x + 2y = -3 \quad (1) \\ -2(x-2) + y = -x + 2 - 2y \quad (2) \end{cases}$$

avec : $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ +2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BA}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

. $\vec{AC}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$. $\vec{BC}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$

$$\boxed{S : \begin{cases} x + 2y = -3 \; (1) \\ -x + 3y = -2 \; (2) \end{cases}}$$

(1)+(2)

$\Rightarrow 5y = -5 \Leftrightarrow \boxed{y = -1}$

Alors $\boxed{x = 1}$ et les coordonnées de C sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

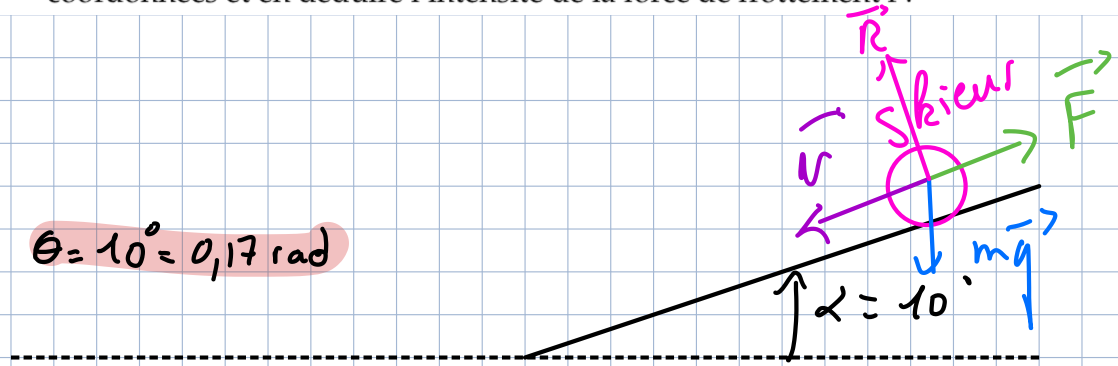
b) $\mathcal{A} = \dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \dfrac{BA \cdot AC}{2}$ or $\sin(\beta) = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AC}{BC}$

$\Leftrightarrow \sin(\beta) \cdot BC = AC$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{BA \cdot BC \cdot \sin(\beta)}{2} = \boxed{\frac{|\det(\vec{BA}\,;\vec{BC})|}{2} = \frac{5}{2} = \mathcal{A}}$$

4.1 Un skieur de masse totale $m = 90$ kg, tout équipement compris, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale. Sa vitesse étant constante, on choisit de modéliser l'ensemble des frottements qu'il subit par une force unique $\vec{F}$ ayant la même direction que le mouvement du skieur mais de sens opposé. On peut modéliser le skieur par un solide en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Après avoir tracé les vecteurs modélisant les différentes forces mises en jeu, déterminer leurs coordonnées et en déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{F}$.

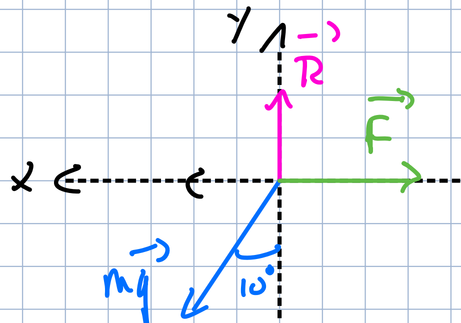


$\theta = 10° = 0{,}17$ rad

$m = 90$ kg.

$g = 9.81\ m\,s^{-2}$

Zoom (⚠ Sens repère).



$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}$ or $\vec{v} = cte \Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 0$

$\Longleftrightarrow \boxed{\vec{R} + \vec{F} = -m\vec{g}}$ On projette sur les axes horizontaux et verticaux.

. sur (Ox) : $-F_x + 0 = -mg\sin(\theta) \Rightarrow F_x = mg\sin(0{,}17)$

$\Rightarrow F_x = 9.81 \cdot 90 \cdot \sin(0{,}17)$

≈ 150 N

. sur (Oy) : $0 + R = -mg(-\cos\theta)$

$= mg\cos(\theta)$

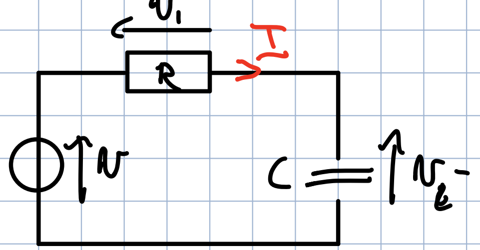
Au final : $F = (F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} = \boxed{F_x = 150 \text{ N}}$

4.2 En électricité, en régime alternatif sinusoïdal, on peut représenter les tensions avec des vecteurs. On procède alors de la manière suivante :
— la valeur efficace est représentée par la norme du vecteur ;
— et la phase, ou le déphasage, par l'angle que forme le vecteur par rapport à $[Ox)$.

(a) Dans la 1ère situation, on souhaite calculer la somme v des deux tensions suivantes :
— la tension v_1 mesurée aux bornes d'une résistance, de valeur efficace 12 V et qui constitue la référence des phases (elle a donc une phase de 0°) ;
— la tension v_2 mesurée aux bornes d'une capacité, de valeur efficace 4 V, et ayant un retard de phase de 90°.
Déterminer la valeur efficace et la phase de v.

(b) Dans la 2e situation, on mesure :
— la tension v_2 aux bornes d'une inductance, qui a une valeur efficace de 3 V, et présente une avance de phase de 90° ;
— la somme v des deux tensions, de valeur efficace 10 V et avec une avance de phase de 30°.
Déterminer la valeur efficace et la phase de v_1.

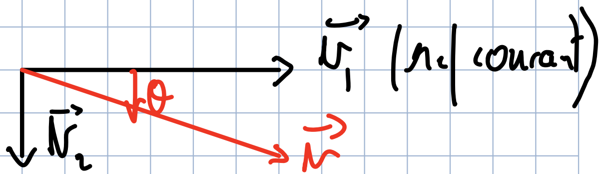
a)



$\vec{v_1} = 12 e^{j0} \Rightarrow |v_1| = 12V$

$\vec{v_2} = 4 e^{-j\pi/2} \Rightarrow |v_2| = 4V$

or $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

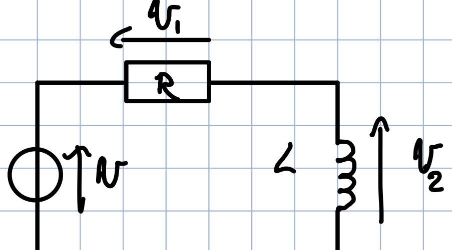


Valeur efficace : $v_{eff} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 12,65\ V = v_{eff}$

Phase : $\begin{cases} v_1 = v\cos\theta \Rightarrow \theta = \pm\arccos\left(\frac{v_1}{v_{eff}}\right) = \pm 0.32 = \pm 18° \\ v_2 = -v\sin\theta \Rightarrow \theta = -\arcsin\left(\frac{v_2}{v_{eff}}\right) = 0,32 = -18° \end{cases}$

$\Rightarrow \theta = -18°$ la tension est en avance sur le courant.

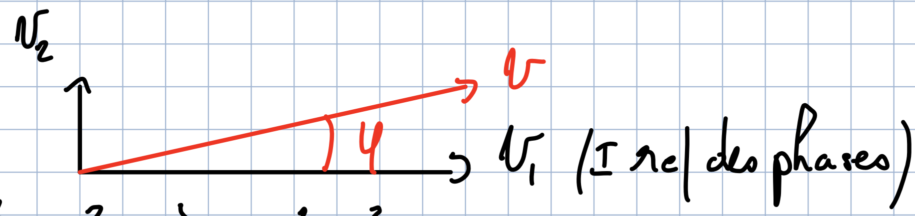
b)



$\rightarrow v_{2_{eff}} = |v_2| = 3V$; $v_2 = 3e^{j\pi/2}$

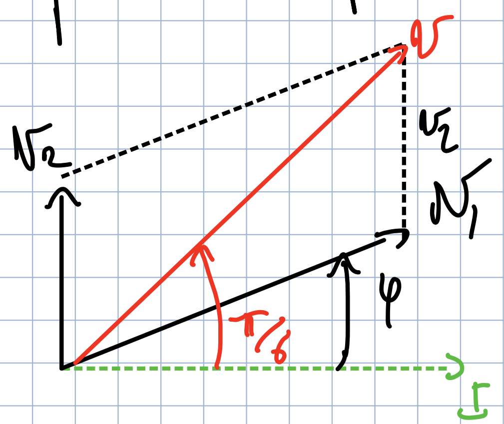
$\rightarrow |v| = 10V$; $v = 10e^{j\pi/6}$

On cherche v_1 ; $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$



- $v_1^2 + v_2^2 = v^2 \Rightarrow v_1^2 = v^2 - v_2^2 = 10^2 - 3^2 = 91 \Rightarrow v_1 = 9{,}54\,V$
- v_1 est prise aux bornes de R : $v_1 = zi - Ri \Rightarrow v_1$ et i sont en phase $\phi_1 = 0$.

Si aux bornes de v_1 il y a un composant inconnu ?



- $v_1 = v\cos\left(\frac{\pi}{8} - \varphi\right)$ (1)
- $v_2 = v\sin\left(\frac{\pi}{8} - \varphi\right) \Leftrightarrow 3 = 10\sin\left(\frac{\pi}{8} - \varphi\right)$ (2)

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{8} - \arcsin\left(\frac{3}{10}\right) = 12{,}52^\circ = \varphi = 0{,}22 \text{ rad}$$

$$(1) \Rightarrow v_1 = v\cos\left(\frac{\pi}{8} - 0{,}22\right) = 10\cos(0{,}304)$$

$v_1 \simeq 9{,}54\,V$