

Outils mathématiques 1 — Test 3 — Novembre 2024

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 16 min.

NOM :

GROUPE :

NOTE :

/4

1. Déterminer les coordonnées sphériques du point A dont les coordonnées cylindriques sont $r = 6$, $\theta = 2\pi/3$ et $z = 3$. On donnera les angles en **degrés** arrondis à trois chiffres significatifs. (1 pt)

$$\varphi = 2\pi/3 = 120^\circ \quad (\text{longitude} = \text{coordonnée angulaire})$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 6 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3 \\ y = 6 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} \\ z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 + 27 + 9} = \sqrt{45} = \underline{3\sqrt{5} = \rho}$$

$$\text{Enfin } \theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{5}}\right) = 1,11 = \underline{63,4^\circ = \theta}$$

$$\Rightarrow A(3\sqrt{5}, 63,4^\circ; 120^\circ)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 2 - i2\sqrt{3}$. (1 pt)

$$(2 - i2\sqrt{3}) = 4 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 e^{-i\pi/3}$$

$$z^4 = 2 - i2\sqrt{3} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^4 = 4 e^{-i\pi/3}$$

$$\Leftrightarrow \rho^4 e^{-i4\theta} = 4 e^{-i\pi/3}$$

0,50

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ 4\theta = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} \left[\frac{2\pi}{4} \right] \end{cases}$$

$$\uparrow \frac{6\pi}{12}$$

0,25

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{12}} \\ z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \\ z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} \\ z_4 = \sqrt{2} e^{-i\frac{17\pi}{12}} \end{cases}$$

0,25

3. Exprimer $z = \frac{(1+2i)(2-i)}{3-i}$ sous forme **algébrique**. (0,5 pt)

$$z = \frac{2-i+4i+2}{3-i} = \frac{4+3i}{3-i} = \frac{(4+3i)(3+i)}{10} = \frac{12+4i+9i-3}{10} \\ = \frac{9+13i}{10} \Rightarrow \underline{z = 0,9 + i 1,3} \quad \text{0,50}$$

4. Donner les modules et les arguments (en degrés, arrondis à trois chiffres significatifs) des nombres $z_1 = \sqrt{2} - i$ et $z_2 = -1 + 3i$. (0,5 pt)

$$|z_1| = \sqrt{3} \quad \theta_1 = \arctan(-1/\sqrt{2}) = -35,3^\circ \\ |z_2| = \sqrt{10} \quad \theta_2 = \arctan(-3) + 180 = 108^\circ \\ \text{0,25} \quad \text{0,25}$$

5. Soient $z_B = 3 + 2i$ et $z_C = -1 + 4i$ les affixes de B et C respectivement. Déterminer l'affixe z de M telle que $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC}$. (0,5 pt)

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_B - z + 2(z_C - z) = 3(z_C - z_B) \\ \Leftrightarrow z_B - z + 2z_C - 2z = 3z_C - 3z_B \\ \Leftrightarrow -3z = z_C - 4z_B \\ \Rightarrow z = -\frac{1}{3}(z_C - 4z_B) = -\frac{1}{3}[-1+4i-4(3+2i)] = -\frac{1}{3}[-1+4i-12-8i] \\ = -\frac{1}{3}(-13-4i) = \frac{13}{3} + i\frac{4}{3}$$

6. Calculer $(1-i)^{10}$. (0,5 pt)

$$1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \Rightarrow (1-i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{-i 10\pi/4} = 2^5 e^{-i 5\pi/2} \\ (1-i)^{10} = -32i \quad -2\pi - \pi/2$$