Révisions

1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

2. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

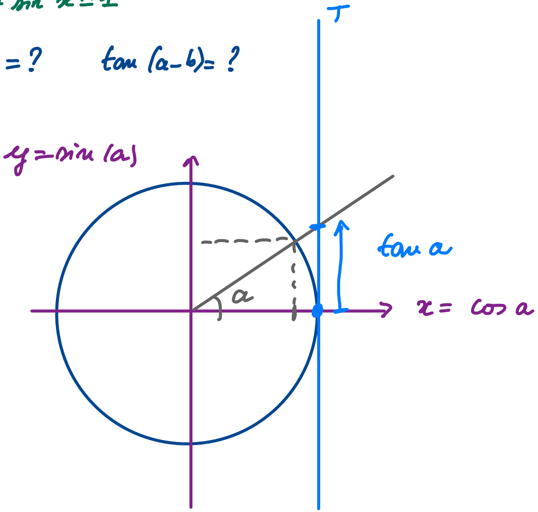
$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

3 $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

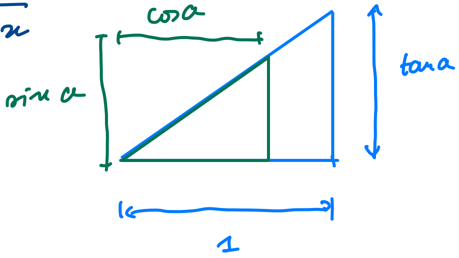
4 $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

5. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan(a+b) = ?$ $\tan(a-b) = ?$



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$\tan(-x) = -\tan(x) \quad \forall x \in D_{\tan} \quad$ (impaire)

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$= \frac{\frac{\sin a \cancel{\cos b}}{\cos a \cancel{\cos b}} + \frac{\sin b \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cos b}}{1\,\frac{\cancel{\cos a \cos b}}{\cancel{\cos a \cos b}} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} =$$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Calcul d'une intégrale particulière :

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, dx$$

$\Rightarrow$ $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ à linéariser

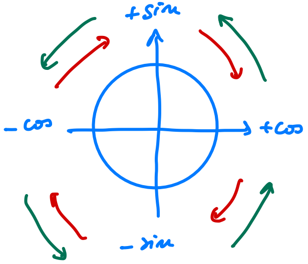
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$



$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} [1+\cos(2x)] dx$$

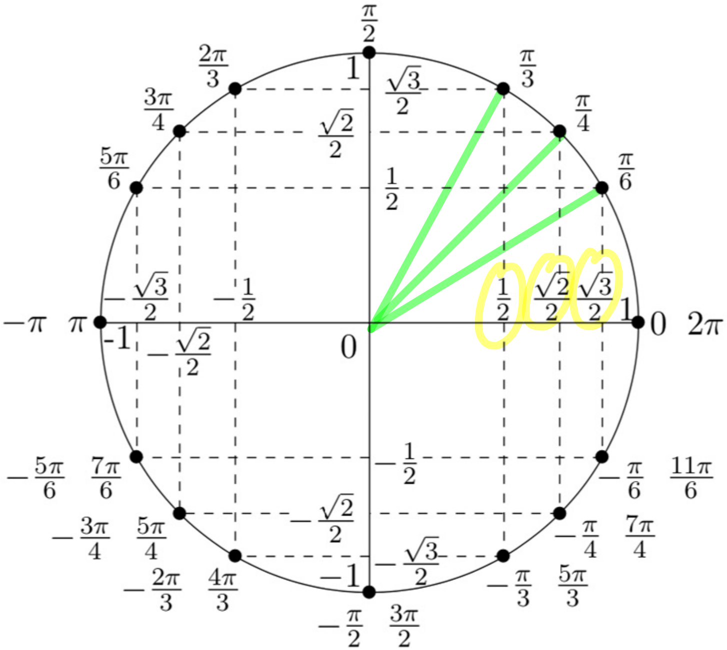
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} - 0 + \frac{1}{4}\left(\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} - \cancel{\sin(0)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \simeq 0{,}643 \text{ à 3 chiffres significatifs}$$

Calculons les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$



$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \text{mi}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Formules au complémentaire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \underset{0}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta = \sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \underset{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \cdot \cos\theta - \sin\theta\,\underset{0}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}} = \cos\theta$$

Exponentielle : $e^x = \exp(x)$

- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $e^{a-b} = \exp(a-b) = e^a/e^b$
- $e^{ab} = (e^a)^b = (e^b)^a$
- $e^{a/b} = \exp(a/b) = (e^a)^{1/b}$
- $e^{a/2} = (e^a)^{1/2} = \sqrt{e^a}$
- $(e^x)' = e^x$
- $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0^+$
- $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. $\forall n > 0$

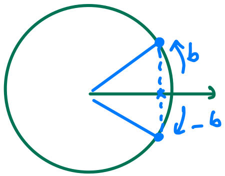
Résoudre $\sin(2x) + \cos(x) = 0$

$$\cos(x) = -\sin(2x) = \sin(-2x)$$

Je pose $\sin(X) = \cos(\frac{\pi}{2} - X)$ avec $X = -2x$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$\cos a = \cos b$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & [2\pi] \\ a = -b & [2\pi] \end{cases}$$

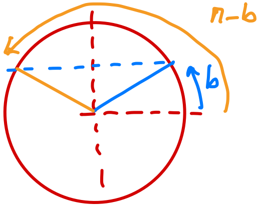
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2x \ [2\pi] \\ x = -\frac{\pi}{2} - 2x \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ 3x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(-2x)$$

$\sin a = \sin b$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ [2\pi] \\ a = \pi - b \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = -2x \ [2\pi] \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi + 2x \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ 3x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$ ☺

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

Résoudre: $\cos(3x) - \sin(x) = 0$

$$\cos(3x) = \sin(x)$$

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x \ [2\pi] \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + x \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] & \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2}\right] \\ 2x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] & \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \ [\pi] \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin(x)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = x \ [2\pi] \\ \frac{\pi}{2} - 3x = \pi - x \ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ 2x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2}\right] \\ x = -\frac{\pi}{4} \ [\pi] \end{cases}$$ 😎😀

Résoudre dans $\mathbb{C}$: 1) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

3) $3x^2 + x + 1 = 0$

Pour s'entraîner: $\cos(2x) - \sin(3x) = 0$.

Soit i le nombre $i^2 = -1$.

1) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = 4 = (2)^2$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow x_1 = 1/3 \text{ ou } x_2 = 1$$

2) $2x^2 - 2x + 9 = 0$ $\quad \Delta = 4 - 72 = -68 = (i\sqrt{68})^2 = (i2\sqrt{17})^2$

$$x = \frac{+2 \pm i2\sqrt{17}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

conjugués

3) $3x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = -11 = (i\sqrt{11})^2$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{11}}{6} \\ x_2 = -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{11}}{6} \end{cases}$$

Factoriser :

$P_1(x) = x^2 - 3x - 4$

$= (x-a)(x-b)$

a et b sont telles que $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$$\Delta = 25 = 5^2 \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow P_1(x) = (x-4)(x+1)$$

$P_2(x) = x^2 + 4x - 21$

$$\Delta = 100 \quad \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad P_2(x) = (x+7)(x-3)$$

Logarithme : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

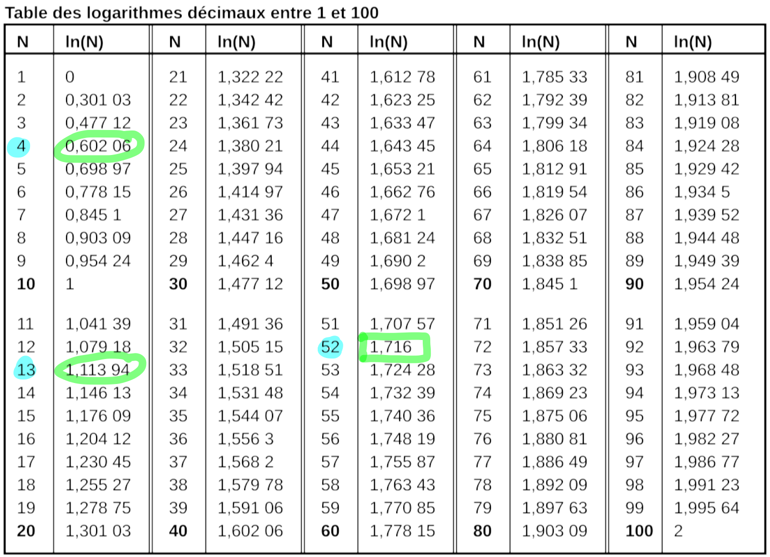


Table des logarithmes décimaux entre 1 et 100

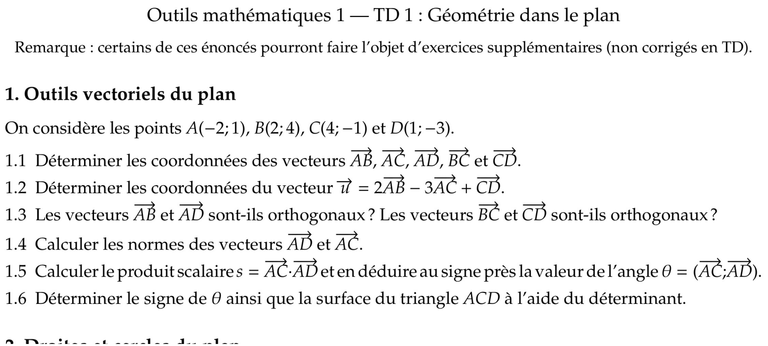
N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,322 22	41	1,612 78	61	1,785 33	81	1,908 49
2	0,301 03	22	1,342 42	42	1,623 25	62	1,792 39	82	1,913 81
3	0,477 12	23	1,361 73	43	1,633 47	63	1,799 34	83	1,919 08
4	0,602 06	24	1,380 21	44	1,643 45	64	1,806 18	84	1,924 28
5	0,698 97	25	1,397 94	45	1,653 21	65	1,812 91	85	1,929 42
6	0,778 15	26	1,414 97	46	1,662 76	66	1,819 54	86	1,934 5
7	0,845 1	27	1,431 36	47	1,672 1	67	1,826 07	87	1,939 52
8	0,903 09	28	1,447 16	48	1,681 24	68	1,832 51	88	1,944 48
9	0,954 24	29	1,462 4	49	1,690 2	69	1,838 85	89	1,949 39
10	1	**30**	1,477 12	**50**	1,698 97	**70**	1,845 1	**90**	1,954 24
11	1,041 39	31	1,491 36	51	1,707 57	71	1,851 26	91	1,959 04
12	1,079 18	32	1,505 15	52	1,716	72	1,857 33	92	1,963 79
13	1,113 94	33	1,518 51	53	1,724 28	73	1,863 32	93	1,968 48
14	1,146 13	34	1,531 48	54	1,732 39	74	1,869 23	94	1,973 13
15	1,176 09	35	1,544 07	55	1,740 36	75	1,875 06	95	1,977 72
16	1,204 12	36	1,556 3	56	1,748 19	76	1,880 81	96	1,982 27
17	1,230 45	37	1,568 2	57	1,755 87	77	1,886 49	97	1,986 77
18	1,255 27	38	1,579 78	58	1,763 43	78	1,892 09	98	1,991 23
19	1,278 75	39	1,591 06	59	1,770 85	79	1,897 63	99	1,995 64
20	1,301 03	**40**	1,602 06	**60**	1,778 15	**80**	1,903 09	**100**	2

↳ « le log change les produits en somme »

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ $\ln(a^b) = b \ln a$ $\ln\sqrt{a} = \frac{\ln a}{2}$

etc...

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.



Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(4;-1)$ et $D(1;-3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

1.4 Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.5 Calculer le produit scalaire $s = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$.

1.6 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.2. $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD}$

$$= 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-18-3 \\ 6+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

1.3. $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ oui $\vec{AB}\perp\vec{AD}$

$\vec{BC}\cdot\vec{CD} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = -6+10 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ non $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas perpendiculaires.

→ angle $\langle\vec{BC};\vec{CD}\rangle$ au signe près.

1.4. $\|\vec{AD}\| = \sqrt{\vec{AD}\cdot\vec{AD}} = \sqrt{9+16} = 5$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

1.5. $s = \vec{AC}\cdot\vec{AD} = \|\vec{AC}\|\cdot\|\vec{AD}\|\cos\theta = AC.AD.\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{s}{\|\vec{AC}\|\cdot\|\vec{AD}\|}$

$s = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = 6\times3+(-2)\times(-4) = 26 = s.$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{26}{5\times2\sqrt{10}} \simeq 0{,}822$

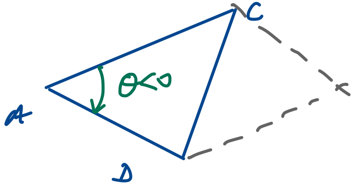
$\Rightarrow \theta \simeq \pm 0{,}606 \simeq \pm 34{,}7°$

1.6 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

1.6. $\det(\vec{AC};\vec{AD}) = \begin{vmatrix}6 & \overset{\curvearrowright}{\theta} & 3\\ -2 & & -4\end{vmatrix} = -24+6 = -18$

$\Rightarrow \sin\theta < 0 \Rightarrow \theta < 0 \Rightarrow \theta = -34{,}7°$

Soit $\mathcal{A}$ aire du triangle (ACD)



$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AC};\vec{AD})\right|$

$\mathcal{A} = 9\,u_A$.

indirect / inverse

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0{,}5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite passant par $H(-2; 1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2; -3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0{,}5x + 1$ $\mathcal{D}'$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite passant par $H(-2;1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$. $\mathcal{D}$

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2;-3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x+3$.

2.1 $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix}+5\\1\end{pmatrix}$

ou leurs colinéaires

2.2 $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

ou leurs colinéaires

2.3 (a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

ou leurs colinéaires.

(b) $\left.\begin{array}{l}\mathcal{D} : y = mx + p\\ \mathcal{D}' : y = m'x + p'\end{array}\right\}$ $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix} \overset{eq.}{=} 0 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0$

$\Leftrightarrow \underline{m \cdot m' = -1}$

Ici $m = 2 \Rightarrow m' = -1/2$

$\Rightarrow \mathcal{D}' : -0{,}5x + 1$ est $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$.

2.4. ① $\vec{n}$ et $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ à partir de l'éq.

② $\vec{u}' = \vec{n}$

③ $H \in \mathcal{D}'$

① $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\overset{②}{\Rightarrow}$ $\vec{u}' = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{n}' = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

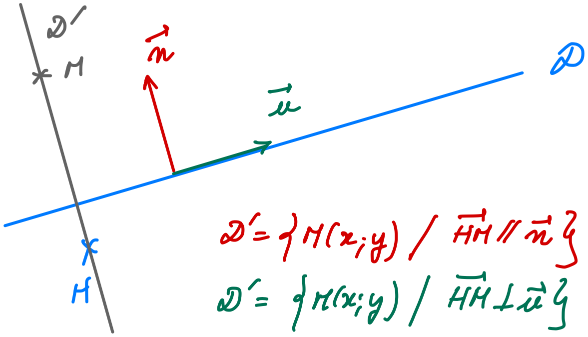
$\mathcal{D}' : y = -2x + p$ $2x + y + c = 0$

③ $H \in \mathcal{D}'$ $H(x;y) \rightarrow$ x et y vérifient les équations.

$1 = -2 \times (-2) + p \Rightarrow p = -3$

$2 \times (-2) + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow y = -2x - 3$ ou $2x + y + 3 = 0$



$\mathcal{D}'=\{M(x;y)\ /\ \overrightarrow{HM}\,/\!/\,\vec{n}\}$

$\mathcal{D}'=\{M(x;y)\ /\ \overrightarrow{HM}\perp\vec{u}\}$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad\overrightarrow{HM}=\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{HM}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\cdot\vec{u}\overset{eq.}{=}0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 2x+4+y-1=0\Leftrightarrow 2x+y+3=0$ 😃

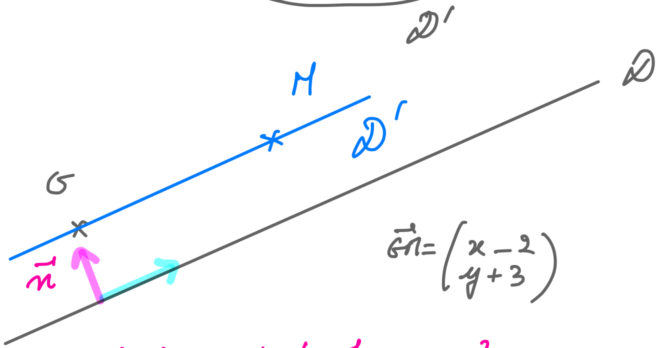
- $\overrightarrow{HM}\,/\!/\,\vec{n}\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{HM};\vec{n})=0$

$\begin{vmatrix}x+2&1\\y-1&-2\end{vmatrix}\overset{eq.}{=}0\Rightarrow -2x-4-y+1=0$

$\Rightarrow -2x-y-3=0$

$\Rightarrow 2x+y+3=0$ 😃😎

2.5 Donner l'équation de la $\underbrace{\text{droite passant par } G(2;-3)}_{\mathcal{D}'}$ et parallèle à la droite $\underbrace{\text{d'équation : } y=-2x+3}_{\mathcal{D}}$.



$\overrightarrow{GM}=\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$

$\mathcal{D}'=\{M(x;y)\ /\ \overrightarrow{GM}\cdot\vec{n}=0\}$

$=\{M(x;y)\ /\ \overrightarrow{GM}\,/\!/\,\vec{u}\}=\{M(x;y)\ /\ \det(\overrightarrow{GM};\vec{u})=0\}$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GM}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\overset{eq.}{=}0\Rightarrow 2x-4+y+3=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-1=0.$

$\begin{vmatrix}x-2&1\\y+3&-2\end{vmatrix}\overset{eq.}{=}0\Leftrightarrow -2x+4-y-3\overset{eq.}{=}0$

$\Leftrightarrow -2x-y+1=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-1=0.$

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :

— D_1 d'équation : $2x+y-3=0$
— D_2 passant par $A(0;3)$ et $B(3;5)$
— D_3 d'équation : $4x-y=6$

① $I_{13}(x;y) = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3=0 & (1) \\ \text{et} & \\ 4x-y=6 & (2) \quad 4x-y-6=0 \end{cases}$$

$(1)\times 2-(2) \Rightarrow 3y=0 \Rightarrow 2x+0-3=0 \Rightarrow x=3/2$

$\Rightarrow I_{13}(1{,}5\ ;\ 0)$

② Eq. $\mathcal{D}_2=(AB)$

$\mathcal{D}_2$: $\vec{u}=(\vec{AB})=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{D}_2:\ 2x-3y+c=0$

$A\in\mathcal{D}_2$: $2\times0-3\times3+c=0 \Rightarrow c=9$

$\mathcal{D}_2:\ 2x-3y+9=0.$

③ $I_{12}(x;y)=\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 & (1) \\ 2x-3y+9=0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 4y-12 \Rightarrow y=\frac{12}{4}=3 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow I_{12}(0;3)$

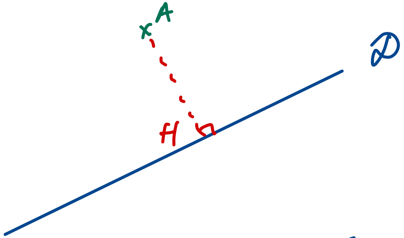
④ $I_{23}=\mathcal{D}_2\cap\mathcal{D}_3$

$$\begin{cases} 2x-3y+9=0 & (2) \\ 4x-y-6=0 & (3) \end{cases}$$

$(3)-2(1) \Rightarrow 5y-24=0 \Rightarrow y=\frac{24}{5}=4{,}8$

$\Rightarrow x=\frac{27}{10}=2{,}7$ $\quad I_{23}(2{,}7;\ 4{,}8)$

2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5;-2)$ sur la droite D d'équation $y=-3x+4$.



Wanted: Coordonnées de H.

Stratégie: ① Eq. de (AH)
② $H=(AH)\cap\mathcal{D}$.

(ou) ① $H(x;y)\ /\ \vec{AH}\cdot\vec{u}=0$
$\Rightarrow$ Eq de (AH)
② $(AH)\cap\mathcal{D}=H$

① $\vec{AH}=\begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ $\quad (AH)\perp\mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{AH}\cdot\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \overset{eq.}{=} 0 \Leftrightarrow x-5-3y-6=0$

$\Leftrightarrow x-3y-11=0\ :\ (AH)$

② $H = \mathcal{D} \cap (AH) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x+4 & (1) \\ x-3y-11=0 & (2) \end{cases}$

Substitution : (1)→(2) ⇒ $x-3(-3x+4)-11=0$

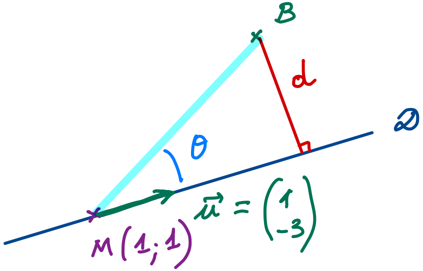
$\Leftrightarrow x+9x-12-11 \Leftrightarrow 10x=23 \Leftrightarrow x=2{,}3$

(1) ⇒ $y=-3\times(2{,}3)+4 = -2{,}9$

La projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $H(2{,}3;-2{,}9)$

Question supplémentaire :

Calculer $d(B;\mathcal{D})$ avec $B=(2;3)$ en utilisant le déterminant.



n'importe lequel sur $\mathcal{D}$.

Wanted : d

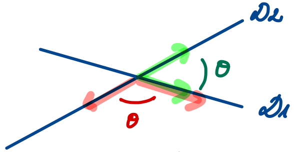
$\det(\overrightarrow{MB};\vec u) = \|\overrightarrow{MB}\|\cdot\|\vec u\|\cdot\sin\theta$

$d = MB\cdot|\sin\theta| = \|\overrightarrow{MB}\|\,|\sin\theta| \Rightarrow d = \frac{|\det(\overrightarrow{MB};\vec u)|}{\|\vec u\|}$

A.N : $\det(\overrightarrow{MB};\vec u) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3+2=5$

$\|\vec u\| = \sqrt{10} \Rightarrow d = d(B;\mathcal{D}) = \frac{5}{\sqrt{10}} \simeq 1{,}58\ u_L$

2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x;y) \ / \ y = 3x+2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x;y) \ / \ x-4y+12=0\}$.



$\vec u_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec n_2 = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec u_2 = \begin{pmatrix}+4\\1\end{pmatrix}$

$\cos\theta = \frac{\vec u_1\cdot\vec u_2}{\|\vec u_1\|\cdot\|\vec u_2\|} = \frac{7}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}} = 0{,}537$

$\Rightarrow \theta = \pm\arccos(0{,}537) = \pm 57{,}5°$

ou $\theta = \pm 123°$

2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1;-4)$ et de rayon 7.

2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

$a)\ (x-3)^2+(y+1)^2=2 \ ; \ b)\ x^2+y^2-2x+4y-3=0 \ ; \ c)\ x^2+y^2+2x+4y+2=0$

$d)\ x^2-4x+y^2-4y+9=0$

2.9. $(x-1)^2+(y+4)^2=49$

2.10. (a) Cercle de centre $(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

(b) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$

$$\Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)-1-4-3=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=8$$

On a le centre $(1;-2)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

(c) $x^2+y^2+2x+4y+2=0$

$$(x+1)^2-1+(y+2)^2-4+2=0$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2=3$$

Cercle de centre $(-1;-2)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

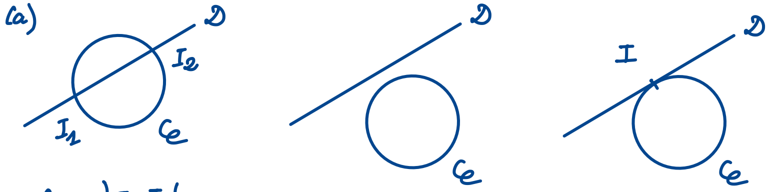
(d) $(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+9=0$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=\boxed{-1}$$ ☹

ne correspond à aucun point ⇒ ensemble vide.

(a) (b) (c)

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB, ainsi que la valeur de l'angle $\theta=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.



$\mathcal{D}\cap\mathcal{C}=\{I_1;I_2\}$ $\quad$ $\mathcal{D}\cap\mathcal{C}=\emptyset$ $\quad$ $\mathcal{D}\cap\mathcal{C}=\{I\}=I$

① Eq de $\mathcal{C}$: $(x-2)^2+y^2=9$

② Eq de $\mathcal{D}=(AB)$ $\quad y=2x-1$

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=2$$

$y=2x+p$ avec B : $-1=2\times0+p \Rightarrow p=-1$

$$\Rightarrow \mathcal{D}:\ y=2x-1.$$

$$(3)\quad \mathcal{D}\cap\mathcal{C} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=9 & (1) \\ y=2x-1 & (2) \end{cases}$$

(2) → (1) (par substitution).

$$(x-2)^2+(2x-1)^2-9=0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+4x^2-4x+1-9=0$$

$$\Rightarrow 5x^2-8x-4 \overset{eq.}{=} 0$$

$$\Delta = 144 = 12^2 \Rightarrow x_1 = \frac{+8-12}{10} = -0{,}4$$

$$x_2 = \frac{+8+12}{10} = 2$$

$$\Rightarrow y_1 = 2\times(-0{,}4)-1 = -1{,}8 \quad \Rightarrow I_1(-0{,}4\,;-1{,}8)$$

$$y_2 = 2\times 2-1 = 3 \quad \Rightarrow I_2(2;3)$$

(6) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de OAB.

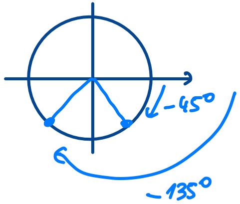
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{OA};\vec{OB})\right|$$

$$\det(\vec{OA};\vec{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = 0{,}5\,uA$$

$$\det(\vec{OA};\vec{OB}) = -1 = \sin\theta\,\|\vec{OA}\|.\|\vec{OB}\|$$

$$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\Rightarrow \theta<0$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{\|\vec{OA}\|.\|\vec{OB}\|} = \frac{\binom{1}{1}\binom{0}{-1}}{\sqrt{2}\,.\,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4} = -135° = \theta.$$

3. Barycentres

3.1 Le barycentre de n points M_i de poids respectifs p_i est le point G vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

(a) Établir la relation entre les coordonnées de G et celles des points M_i ?

(b) Que devient cette dernière relation si G est l'isobarycentre des points ?

(c) Calculer les coordonnées du barycentre G et de l'isobarycentre I du triangle formé par les points $A(0;3)$, $B(1;1)$ et $C(4;0)$ affectés respectivement des poids 1, 3 et 2.

(a) Barycentre : moyenne pondérée

(b) Isobarycentre : moyenne simple

(c) A(1) , B(3) , C(2)

$$x_G = \frac{1\times 0 + 3\times 1 + 2\times 4}{6} = \frac{11}{6} = x_G$$

$$y_G = \frac{1\times 3 + 3\times 1 + 2\times 0}{6} = \frac{6}{6} = 1 = y_G$$

$G\left(\frac{11}{6} ; 1\right)$

Isobarycentre : intersection des médianes

$$x_I = \frac{0+1+4}{3} = 5/3$$

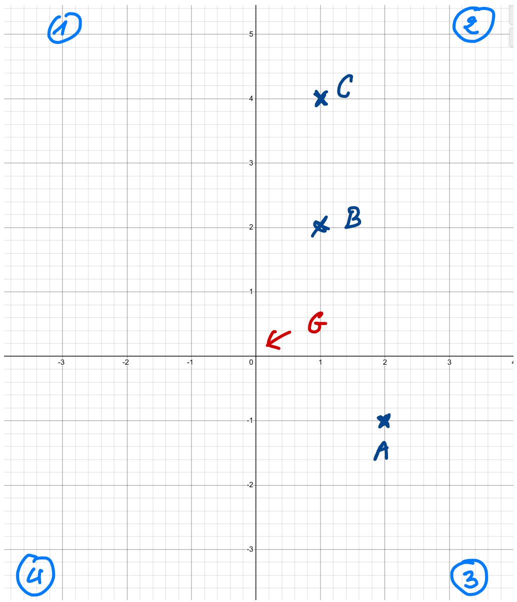
$$y_I = \frac{3+1+0}{3} = 4/3$$

$I\left(\frac{5}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine ? On appellera le point D.

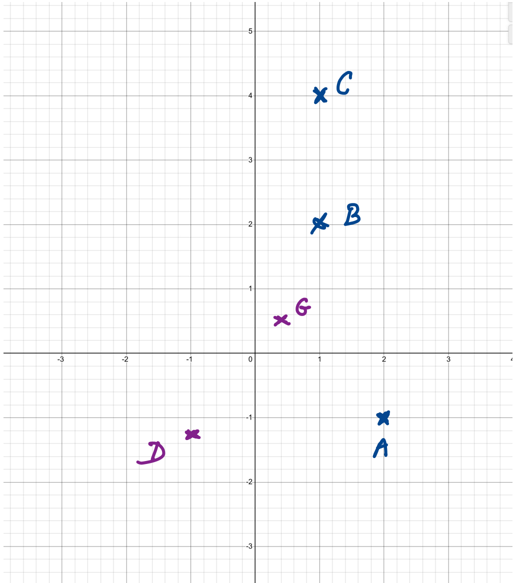
(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg ?



Wanted: $D(x_D ; y_D)$ pour que $G = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 0 = \dfrac{1\times 2 + 1\times 1 + 1\times 1 + 4x_D}{7} \\ \Rightarrow \dfrac{4+4x_D}{\cancel{7}} = 0 \Rightarrow x_D = -1 \\ y_G = 0 = \dfrac{1\times(-1) + 1\times 2 + 1\times 4 + 4y_D}{7} \\ 0 = \dfrac{5+4y_D}{7} \Leftrightarrow 4y_D = -5 \Rightarrow y_D = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$D(-1 ; -1{,}25)$



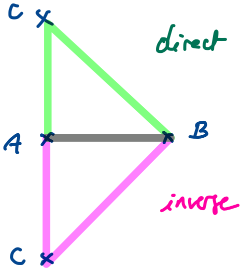
(5) Je mets 2kg en D.

$$\frac{1x_A + 1x_B + 1x_C + 2\overset{-1}{x_D}}{5} = x_G = 0{,}4$$

$$\frac{1y_A + 1y_B + 1y_C + 2\overset{-1{,}25}{y_D}}{5} = y_G = 0{,}5$$

$\Rightarrow G(0{,}4 ; 0{,}5)$

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A, et calculer l'aire du triangle ABC.



① Rectangle en A

$\vec{AB} \perp \vec{AC}$

② Isocèle

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$

③ Direct

$\det(\vec{AB} ; \vec{AC}) > 0$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$\det(\vec{AB}; \vec{AC_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0$

$\Rightarrow \quad C = C_1$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c - 1 \\ y_0 + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_C = -2+1 = -1 \\ y_C = 1-2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow C(-1; -1)$

Autre solution: $C = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{C}$ de centre A et de rayon $\|\vec{AB}\|$

$\mathcal{D} = (AC)$ avec $\mathcal{D} \perp (AB)$.

$\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

$\mathcal{D} : \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 + 2y + 4 = 0$

$\uparrow$

$\vec{AC}$

$\mathcal{D} : x + 2y + 3 = 0.$

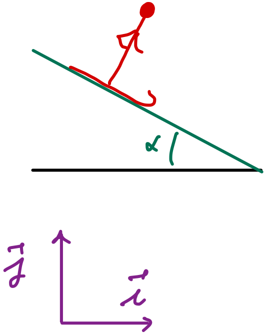
etc... $\Rightarrow C_1$ et C_2

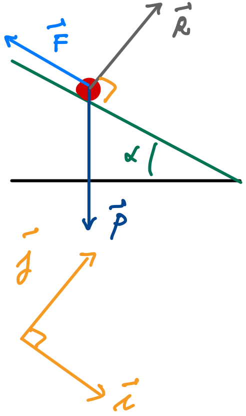
$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}; \vec{AC}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = 2{,}5\, u_A.$

4. Applications en physique

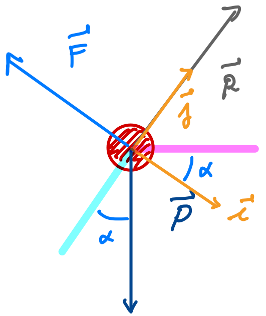
4.1 Un skieur de masse totale $m = 90$ kg, tout équipement compris, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale. Sa vitesse étant constante, on choisit de modéliser l'ensemble des frottements qu'il subit par une force unique $\vec{F}$ ayant la même direction que le mouvement du skieur mais de sens opposé. On peut modéliser le skieur par un solide en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Après avoir tracé les vecteurs modélisant les différentes forces mises en jeu, déterminer leurs coordonnées et en déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{F}$.





PFD : $\sum \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}$



$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{R}\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} mg \sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad P = mg$$

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} mg\sin\alpha + 0 - F \\ -mg\cos\alpha + R + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F = mg\sin\alpha = 90 \times 9{,}81 \times \sin(10^\circ) = 153 N.$$

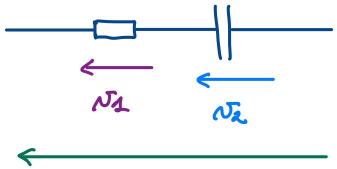
4.2 En électricité, en régime alternatif sinusoïdal, on peut représenter les tensions avec des vecteurs. On procède alors de la manière suivante :

- la valeur efficace est représentée par la norme du vecteur ;
- et la phase, ou le déphasage, par l'angle que forme le vecteur par rapport à $[Ox)$.

(a) Dans la 1$^{\text{ère}}$ situation, on souhaite calculer la somme v des deux tensions suivantes :

- la tension v_1 mesurée aux bornes d'une résistance, de valeur efficace 12 V et qui constitue la référence des phases (elle a donc une phase de 0°) ;
- la tension v_2 mesurée aux bornes d'une capacité, de valeur efficace 4 V, et ayant un retard de phase de 90°.

Déterminer la valeur efficace et la phase de v.



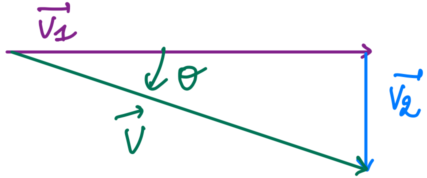
$v = v_1 + v_2$

$v_1 \longrightarrow \vec{V_1} \rightarrow r_1 = 12$

$\theta_1 = 0$

$v_2 \rightarrow \vec{V_2} \rightarrow r_2 = 4$

$\theta_2 = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$



$\Rightarrow \vec{V} \rightarrow r = ?$

$\theta = ?$

$$r = \sqrt{12^2 + 4^2} = 12,6$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{12}\right) = -18,4^\circ$$

(b) Dans la 2$^{\text{e}}$ situation, on mesure :
- la tension v_2 aux bornes d'une inductance, qui a une valeur efficace de 3 V, et présente une avance de phase de 90° ;
- la somme v des deux tensions, de valeur efficace 10 V et avec une avance de phase de 30°.

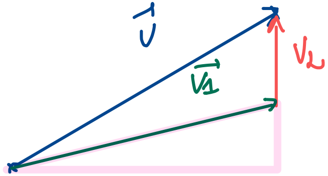
Déterminer la valeur efficace et la phase de v_1.

$$v_2 \rightarrow \vec{V_2} \rightarrow \begin{matrix} r_2 = \\ \theta_2 = \end{matrix} \qquad \vec{V} \rightarrow \begin{matrix} r = \\ \theta = \end{matrix}$$

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

<u>Wanted:</u> r_1 et θ_1 ⚠

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,66 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 8,66 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = \sqrt{8,66^2 + 2^2} = 8,89$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{2}{8,66}\right) = 13,5^\circ$$

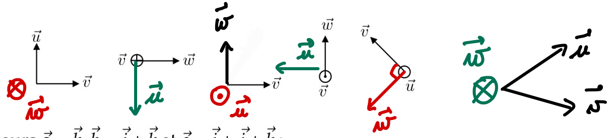
Outils mathématiques 1 — TD 2 : Géométrie dans l'espace

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Dans toute cette feuille, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1.1 Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Dessiner le vecteurs manquant dans les cinq cas représentés ci-dessous.



1.2 On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$:

(a) donner leurs coordonnées ;

(b) calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

(a) $\vec{b} \wedge \vec{c} = (\vec{\imath} + \vec{k}) \wedge (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$

$= \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} + \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} + \vec{\imath} \wedge \vec{k} + \vec{k} \wedge \vec{\imath} + \vec{k} \wedge \vec{\jmath} + \vec{k} \wedge \vec{k}$

$= \vec{0} + \vec{k} + (-\vec{\jmath}) + \vec{\jmath} + (-\vec{\imath}) + \vec{0}$

$= -\vec{\imath} + \vec{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

↯

inadapté ⇒ on travaille avec les coordonnées.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = ?$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = ?$

$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$

⇒ Le produit vectoriel n'est pas associatif

⇒ $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ ne veut rien dire.

1.3 On considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;1\,;-2)$, $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ et $\vec{w} = (1\,;1\,;4)$:

(a) calculer leurs normes ;

(b) calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$;

(c) calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$;

(a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = 3\times2+1\times0+(-2)\times1 = 4$$

$$\vec{u}.\vec{w} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = -4$$

$$(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{v}+\vec{w}) = \begin{pmatrix}0\\2\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} = -33$$

(c) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}$$

$$(\vec{u}-\vec{v})\wedge(2\vec{v}+3\vec{w}) = \begin{pmatrix}3-2\\1-0\\-2-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\times2+3\times1\\2\times0+3\times1\\2\times1+3\times4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}7\\3\\14\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}23\\-35\\-4\end{pmatrix}$$

(d) calculer le produit mixte $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est direct ou indirect.

(e) Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u}+2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

«de norme 1»

(d) $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = (\vec{v}\wedge\vec{w}).\vec{u} = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} = -3-7-4 = -14 \quad <0$$

Le trièdre $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est indirect (inverse).

(e) $\vec{a} = k\,(\vec{u}+2\vec{v})$ avec $k \geqslant 0$ $\quad \|\vec{a}\| = 1$

$$\Rightarrow \vec{a} = +\frac{\vec{u}+2\vec{v}}{\|\vec{u}+2\vec{v}\|}$$

→ Très utile en physique : pour rendre un vecteur unitaire je le divise par sa norme.

2. Objets de l'espace et calculs de grandeurs

2.1 À partir des résultats de l'exercice précédent :

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

(b) donner une mesure au signe près de l'angle $\langle\vec{u};\vec{v}\rangle$.

(a) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}$

(b) $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{14}.\sqrt{5}} = 0{,}478$

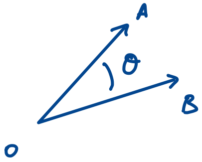
$$\theta = \pm\,\arccos(0{,}478) = \pm 61{,}4^\circ$$

2.2 Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ et donner une mesure au signe près de l'angle $(\widehat{AOB})$.

$\vec{OA} = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{OB} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$

$\mathcal{A} = \|\vec{OA}\wedge\vec{OB}\|$ $\quad \vec{OA}\wedge\vec{OB} = \begin{pmatrix}20\\-7\\5\end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{OA}\wedge\vec{OB}\| = \sqrt{474}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \simeq 21,8\ uA$



$$\cos\theta = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{\|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB}\|} = \frac{11}{\sqrt{35}\sqrt{17}} = 0,451$$

$\Rightarrow \theta = \pm\arccos(0,451) = \pm 63,2° = \theta$

2.3 On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$:

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;

(b) calculer l'aire du triangle ABC ;

(c) calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

(a) $\vec{n} = \dfrac{\vec{AB}\wedge\vec{AC}}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}$ avec $\vec{AB} = \begin{pmatrix}0-1\\2-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

et $\vec{AC} = \begin{pmatrix}0-1\\0-0\\3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$

Donc $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\+3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \sqrt{49} = 7$

$\Rightarrow \boxed{\vec{n} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}6/7\\3/7\\2/7\end{pmatrix}$

(b) $\mathcal{A}_{ABC} = 3,5\ uA \quad = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$

(c) $V = |m|$ avec $m = [\vec{OA};\vec{OB};\vec{OC}] = (\vec{OC}\wedge\vec{OA})\cdot\vec{OB}$

$$m = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\+3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = 6$$

$\Rightarrow \boxed{V = 6\ uV.}$

Déf de Palermo : Volume ..... $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$

en 25 secondes chrono.

$$\vec u \wedge \vec v = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$$

$$(\vec u \wedge \vec v).\vec w = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} = 56.$$

$$V = 56 \text{ uv.}$$

2.4 Déterminer une équation cartésienne :

(a) du plan Π_1 passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec u = (2;0;1)$ et $\vec v = (0;1;2)$;

(b) du plan Π_2 passant par $B(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec n = (2;1;1)$.

(b) $\Pi_2 : 2x + y + z + d = 0.$ puis $B \in \Pi_2$

$\Rightarrow 2 + 0 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

$$\boxed{\Pi_2 : 2x + y + z - 3 = 0}$$

(a) $\vec n' = \vec u \wedge \vec v = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Pi_1 : -x - 4y + 2z + d = 0$

$A \in \Pi_1 : \quad -1 - 4 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = 3$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_1 : -x - 4y + 2z + 3 = 0}$$

2.5 Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec u$, $\vec v$ et $\vec n$ de l'exercice précédent.

$V = |m|$ avec $m = \underbrace{(\vec u \wedge \vec v)}_{\vec n'}.\vec n = \begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -2 - 4 + 2 = -4$

$$\Rightarrow \boxed{V = 4 \text{ uv.}}$$

2.6 On considère :

- le point A de coordonnées $(2;0;5)$;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0;-2;-4)$ et dirigée par le vecteur $\vec u\,(2;1;0)$;
- le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.

(a) Calculer les distances d_1 de A à $\mathcal{D}$ et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.

(b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?

(c) Déterminer les équations d'une droite parallèle à Π et passant par A. Cette droite est-elle unique ?

$$d_1 = \frac{\|\vec{BA} \wedge \vec u\|}{\|\vec u\|} \qquad d_2 = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec n|}{\|\vec n\|}$$

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix}2-0\\0+2\\5+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\9\end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \wedge \vec u = \begin{pmatrix}2\\2\\9\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\+18\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BA} \wedge \vec u\| = \sqrt{409}$$

$$\|\vec u\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{\sqrt{409}}{\sqrt{5}} \simeq 9{,}04 \text{ uL}$$

$M \in \pi \rightarrow M\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ ou $M\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\vec{MA} = \begin{pmatrix}2-2\\0-3\\5-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$ ou $\vec{MA} = \begin{pmatrix}2-1\\0-0\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

$\vec{MA}.\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 7$ $\|\vec{n}\| = \sqrt{6}$

$\Rightarrow d_2 = \frac{7}{\sqrt{6}} \simeq 2,86$ uL

(b) $\vec{u}.\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 3 \neq 0$ D et π ne sont donc pas parallèles.

(c) Il y a une infinité de possibilités $\rightarrow$ $\vec{u}'$ / $\vec{u}'.\vec{n} = 0$

$\vec{u}' = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}' = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{u}' = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t \\ z = t+5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -t+2 \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = t+2 \\ y = t \\ z = -t+5 \end{cases}$

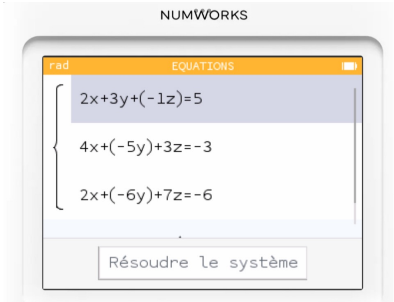
3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

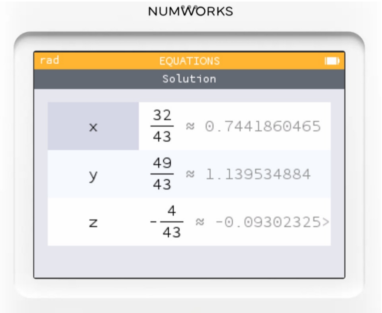
$$\Pi_1 : 2x + 3y - z - 5 = 0 \ ; \ \Pi_2 : 4x - 5y + 3z + 3 = 0 \ ; \ \Pi_3 : 2x - 6y + 7z + 6 = 0$$

↳ Ordre et données

$ax + by + cz = -d$



2x+3y+(-1z)=5
4x+(-5y)+3z=-3
2x+(-6y)+7z=-6



x	$\frac{32}{43}$	≈ 0.7441860465
y	$\frac{49}{43}$	≈ 1.139534884
z	$-\frac{4}{43}$	≈ -0.09302325>

$x \simeq 0,744$

$y \simeq 1,14$

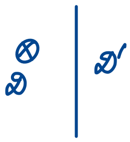
$z \simeq -0,0930$

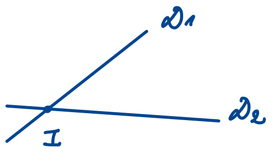
3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 5 \quad t \in R \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

(a) montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection ;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.





$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont dans le même plan

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{I(x;y;z) = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2}$ ou $\underbrace{\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2}$

A-t-on $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$? $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc non.

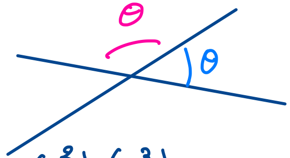
$I = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2 = 3t + 1 \\ \text{et } -t - 2 = 2t - 5 \\ 3t - 1 = -t + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 1 \\ \text{et } t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ les 3 équations sont d'accord $\Rightarrow$ $t = 1$ et $I(4;-3;2)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont dans le même plan.

$$\begin{cases} 0,431x + \sqrt{2}\,y = \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1,22y = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

(b)



$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{1}{14} \qquad \theta = \pm \arccos\left(\frac{1}{14}\right) = \pm 85,9°$$

3.3 On considère :

— le plan Π d'équation $3x - 2y + 4z + 5 = 0$

— la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 4 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 1 \end{cases}$

Déterminer le point d'intersection ou bien, s'il n'existe pas, la distance entre Π et $\mathcal{D}$.

$I(x;y;z) = \mathcal{D} \cap \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z + 5 = 0 & (1) \\ \text{et } x = -2t - 1 & (2) \\ y = 3t + 4 & (3) \\ z = 3t - 1 & (4) \end{cases}$

$\Rightarrow 3(-2t-1) - 2(3t+4) + 4(3t-1) + 5 \boxed{\overset{eq.}{=}} 0$

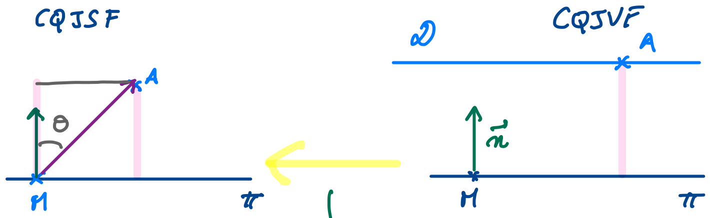
À quelle condition sur t cette égalité est vraie ?

$-10 \overset{eq.}{=} 0$

$t \in \emptyset$

Aucune valeur de t ne permet de satisfaire les conditions du système ⇒ I n'existe pas.

Donc $\mathcal{D} // \Pi$



Choisir $M \in \Pi$
Choisir A.

$$d = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$M\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{MA} = \begin{pmatrix}-1+1\\4+1\\-1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{n} = -10 \qquad \|\vec{n}\| = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow d = \frac{10}{\sqrt{29}} \simeq 1{,}86 \text{ uL}$$

3.4 Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \qquad t \in R \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

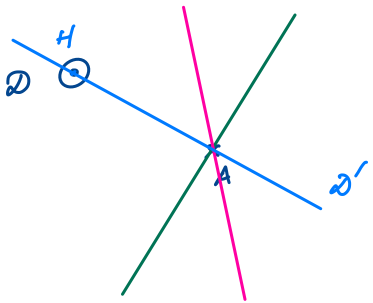
(a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;

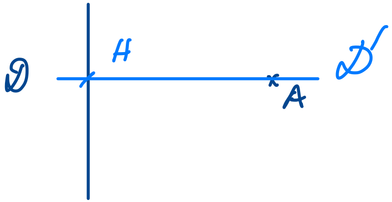
(b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1; 2; 3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

(a) $\vec{u}_{\mathcal{D}} = \vec{n}_{\Pi} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow x + y + 2z + d = 0$

or $O \in \Pi \rightarrow d = 0$ $\quad \Pi : x + y + 2z = 0.$

(b)





Je prends $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$ et je connais $A(1;2;3)$

Wanted: Coordonnées de H.

Stratégie: $H = \mathcal{D} \cap \Pi'$ où $\Pi' \perp \mathcal{D}$ et $A \in \Pi'$

$\Pi' : x + y + 2z - 9 = 0$

$$H(x;y;z) = \mathcal{D} \cap \Pi' \iff \text{et} \begin{cases} x+y+2z-9=0 \\ x = t+1 \\ y = t \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (t+1) + (t) + 2(2t-1) - 9 = 0$$

$$6t - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 5/3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{5}{3} + 1 = 8/3 \\ y_H = 5/3 \\ z_H = 7/3 \end{cases} \qquad H\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 8/3 - 1 \\ 5/3 - 2 \\ 7/3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

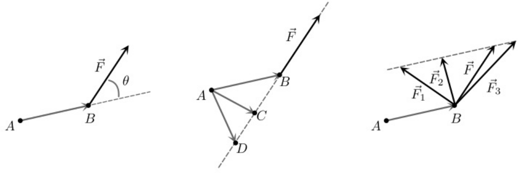
$$\Rightarrow \mathcal{D}' : \begin{cases} x = \frac{5}{3}t + 1 \\ y = -\frac{t}{3} + 2 \\ z = -\frac{2}{3}t + 3 \end{cases}$$

Application en physique

4.1 Le moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ appliquée en B par rapport à un point A donné est une grandeur physique vectorielle qui quantifie l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour de ce point A. Celui-ci se calcule au travers de la relation

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

et le sens de $\vec{F}$ permet de déterminer le sens de rotation à l'aide de la règle du tournevis.

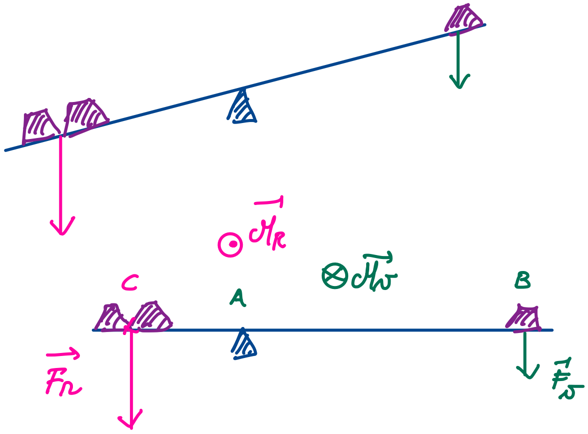


(a) Moment d'une force (b) Différents points d'application (c) Différentes forces

À l'aide de la figure ci-dessus :

(a) montrer que le moment est le même pour les points d'application B, C et D (volet (b)) et conclure ;

(b) montrer que le moment est le même quelle que soit la force reportée dans le volet (c) et conclure.



$\vec{M}_v = \vec{AB}\wedge\vec{F}_v$ $\vec{M}_R = \vec{AC}\wedge\vec{F}_R$

4.1. (a) Soit $\vec{M} = \vec{AB}\wedge\vec{F}$

$\vec{AD}\wedge\vec{F} = (\vec{AB}+\vec{BD})\wedge\vec{F} = \vec{AB}\wedge\vec{F} + \cancel{\vec{BD}\wedge\vec{F}} = \vec{M}.$

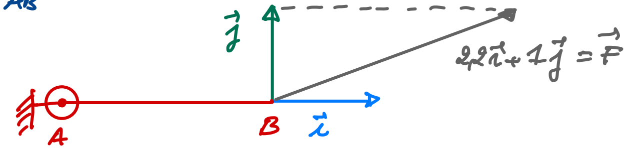
Toutes les forces $\vec{F}$ d'origine B ayant leurs extrémités sur la droite (BD) ont le même moment.

(b) $\vec{M} = \vec{AB}\wedge\vec{F}$

$\vec{AB}\wedge\vec{F}_3 = \vec{AB}\wedge(\vec{F}+k\vec{AB}) = \vec{AB}\wedge\vec{F} + \cancel{k\vec{AB}\wedge\vec{AB}}$

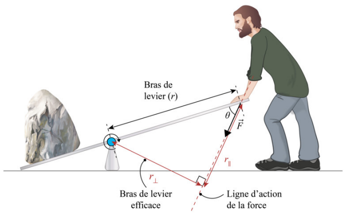
⟹ $\vec{AB}\wedge\vec{F}$ ne prend en compte que la composante perpendiculai

à $\vec{AB}$

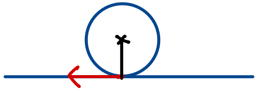


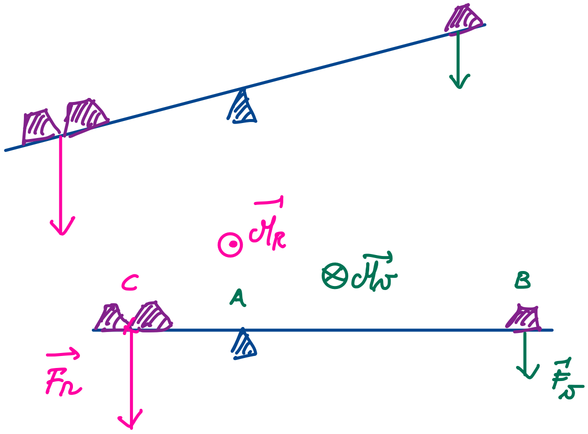
$\vec{AB}\wedge\vec{F} = \vec{AB}\wedge(2{,}2\vec{i}+1\vec{j}) = \cancel{\vec{AB}\wedge 2{,}2\vec{i}} + \vec{AB}\wedge\vec{j}.$

Moment : * Bras de levier



* Couple





$\vec{\mathcal{M}}_v = \vec{AB} \wedge \vec{F}_v$ $\vec{\mathcal{M}}_R = \vec{AC} \wedge \vec{F}_R$

4.1. (a) Soit $\vec{\mathcal{M}} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$

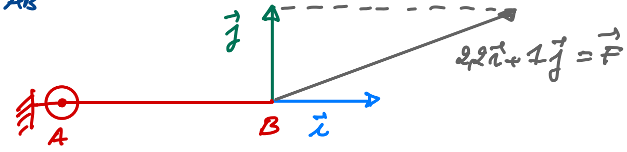
$$\vec{AD} \wedge \vec{F} = (\vec{AB} + \vec{BD}) \wedge \vec{F} = \vec{AB} \wedge \vec{F} + \cancel{\vec{BD} \wedge \vec{F}} = \vec{\mathcal{M}}.$$

Toutes les forces $\vec{F}$ d'origine B ayant leurs extrémités sur la droite (BD) ont le même moment.

(b) $\vec{\mathcal{M}} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$

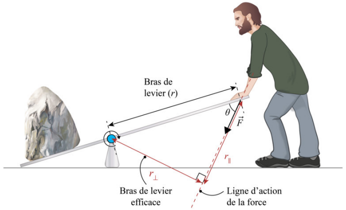
$$\vec{AB} \wedge \vec{F}_3 = \vec{AB} \wedge (\vec{F} + k\vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{F} + \cancel{k\vec{AB} \wedge \vec{AB}}$$

$\Longrightarrow$ $\vec{AB} \wedge \vec{F}$ ne prend en compte que la composante perpendiculai
à $\vec{AB}$

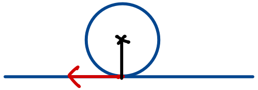


$$\vec{AB} \wedge \vec{F} = \vec{AB} \wedge (2{,}2\vec{i} + 1\vec{j}) = \cancel{\vec{AB} \wedge 2{,}2\vec{i}} + \vec{AB} \wedge \vec{j}.$$

Moment :   * Bras de levier



* Couple



Outils mathématiques 1 — TD 3 : Systèmes de coordonnées

1. Coordonnées du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants, repérés soit en coordonnées cartésiennes $(x\ ; y)$, soit en coordonnées polaires $(r\ ; \theta)$:

$$A(r = 3{,}5\ ; \theta = 40^o)\ ;\ B(x = 2; y = 2{,}5)\ ;\ C(r = 4; \theta = 35^o)\ ;\ D(r = 5; \theta = \pi/12)\ ;\ E(x = -1; y = 3)\ ;$$
$$F(r = 3; \theta = 125^o)\ ;\ G(r = 1{,}5; \theta = -20^o)\ ;\ H(x = 2; y = -1)\ ;\ I(r = 3{,}5\ \ ; \theta = -2\pi/3)$$

En calculant les coordonnées des points dans les deux systèmes de coordonnées, déterminer

(a) quel point est le plus éloigné de l'origine, et quel le point en est le plus proche ;

(b) quels points sont plus proches de l'origine que le point B ;

(c) le point le plus haut, le plus bas, le plus à droite et le plus à gauche du plan ;

(d) le point le plus proche de l'axe des abscisses, et le point le plus proche de l'axe des ordonnées.

Point	Cartésiennes $(x;y)$	Polaires $(r;\theta)$
A	$(2{,}68\ ; 2{,}25)$	$(3{,}5\ ; 40^\circ)$
B	$(2\ ; 2{,}5)$	$(3{,}20\ ; 51{,}3^\circ)$
C	$(3{,}28\ ; 2{,}29)$	$(4\ ; 35^\circ)$
D	$(4{,}83\ ; 1{,}29)$	$(5\ ; \pi/12) = (5\ ; 15^\circ)$
E	$(-1\ ; 3)$	$(3{,}16\ ; 108^\circ)$
F	$(-1{,}72\ ; 2{,}46)$	$(3\ ; 125^\circ)$
G	$(1{,}41\ ; -0{,}513)$	$(1{,}5\ ; -20^\circ)$
H	$(2\ ; -1)$	$(2{,}24\ ; -26{,}6^\circ)$
I	$(-1{,}75\ ; -3{,}03)$	$(3{,}5\ ; -\frac{2\pi}{3}) = (3{,}5\ ; -120^\circ)$

(a) 🟩 D est le plus éloigné de O (r_{max})
🟩 G est le plus proche de O (r_{min})

(b) Points pour lesquels $r < 3{,}20$: E, F, G ; H

(c) Plus haut (y_{max}) : E

Plus bas (y_{min}) : I

Plus à droite (x_{max}) : D

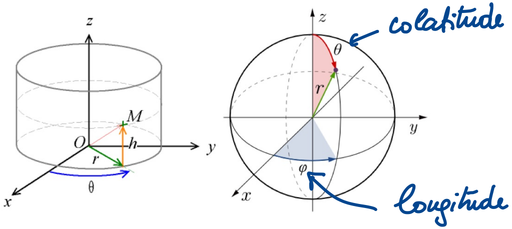
Plus à gauche (x_{min}) : I

(d) Plus proche de (Ox) : $|y|_{min}$: G

Plus proche de (Oy) : $|x|_{min}$: E

2. Coordonnées de l'espace

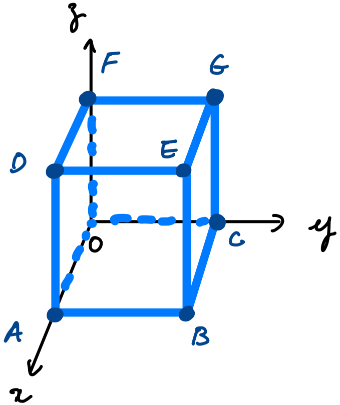
On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. La figure ci-dessous rappelle les variables utilisées pour repérer un point en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.



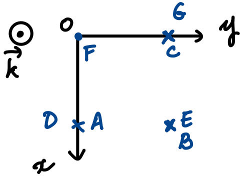
À gauche : Coordonnées cylindriques À droite : Coordonnées sphériques

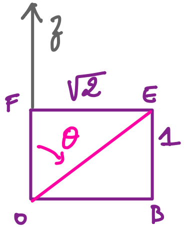
Fig. 1 : Systèmes de coordonnées dans l'espace

2.1 Calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.



	Cartésiennes $(x;y;z)$	Cylindriques $(r;\theta;z)$	Sphériques $(r;\theta;\varphi)$
A	$(1;0;0)$	$(1;0;0)$	$(1;90°;0)$
B	$(1;1;0)$	$(\sqrt{2};45°;0)$	$(\sqrt{2};90°;45°)$
C	$(0;1;0)$	$(1;90°;0)$	$(1;90°;90°)$
D	$(1;0;1)$	$(1;0;1)$	$(\sqrt{2};45°;0)$
E	$(1;1;1)$	$(\sqrt{2};45°;1)$	$(\sqrt{3};54{,}7°;45°)$
F	$(0;0;1)$	$(0;0;1)$	$(1;0;0)$
G	$(0;1;1)$	$(1;90°;1)$	$(\sqrt{2};45°;90°)$
O	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$





$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) = 54{,}7°$$

2.2 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points A, B, C, D dont les coordonnées **cartésiennes** sont : $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;2\,;2)$, $C(-1\,;5\,;0)$ et $D(0\,;3\,;-1)$.

$A(1;0;2)$

Sphériques:

$$\begin{cases} r = \sqrt{5} \\ \theta = \arccos\left(3/r\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26{,}6^\circ \\ \varphi = \arctan\left(y/x\right) = \arctan(0) = 0. \end{cases}$$

θ polaire.

$$\Rightarrow \left(\sqrt{5};\ 26{,}6^\circ;\ 0\right)$$

Cylindriques:

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \arctan\left(y/x\right) = 0. \\ z = z = 2 \end{cases}$$

projection

$$(x;y;z) \to (x;y;0)$$

$$\to (1;0;2)$$

$B(2;2;2)$ Sphériques.

$$\begin{cases} r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \theta = \arccos\left(2/\sqrt{12}\right) = 54{,}7^\circ \\ \varphi = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ \end{cases}$$

$$\left(2\sqrt{3};\ 54{,}7^\circ\ ;\ 45^\circ\right)$$

$C(-1;5;0)$

Sphériques

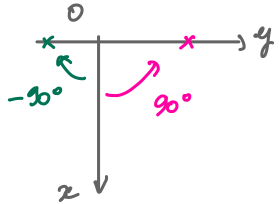
$$\begin{cases} r = \sqrt{26} \\ \theta = \arccos(0) = 90^\circ \\ \varphi = \arctan\left(\frac{5}{-1}\right) \boxed{+\ 180^\circ} = 101^\circ \end{cases}$$

Cylindriques

$$\begin{cases} r = \sqrt{26} \\ \theta = 101^\circ \\ z = 0 \end{cases}$$

$D(0;3;-1)$ Sphériques

$$\begin{cases} r = \sqrt{10} \\ \theta = \arccos\left(-1/\sqrt{10}\right) = 90^\circ \\ \varphi = \text{“}\arctan\left(\frac{3}{0}\right)\text{”} = 90^\circ \end{cases}$$



Cylindriques:

$$\begin{cases} r = 3 \\ \theta = 90^\circ \\ z = -1 \end{cases}$$

2.3 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **cartésiennes** :

(a) du point A dont les coordonnées **sphériques** sont : $r = 3$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$;

(b) du point B dont les coordonnées **cylindriques** sont : $r = 2$, $\theta = 5\pi/4$, $z = 1$.

(a)

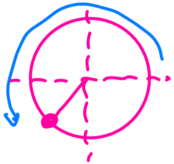
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cdot\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9/4 \\ y = 3\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ z = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{9}{4} ; \frac{3\sqrt{3}}{4} ; \frac{3}{2}\right)$$

(b)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 2\cos\frac{5\pi}{4} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \\ y = 2\sin\frac{5\pi}{4} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\sqrt{2} ; -\sqrt{2} ; 1)$$

2.4 En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que r =constante est :

(A) un cercle ; [✓ (B) un cylindre] ; (C) ~~une sphère~~

2.5 En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que θ =constante est :

(A) un cercle passant par les pôles ; (B) ~~un disque horizontal~~ ; (C) un cône d'axe (Oz)

2.4. Réponse (B)

2.5. Réponse (C)

Outils mathématiques 1 — TD 4 : Nombres complexes

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Géométrie dans le plan

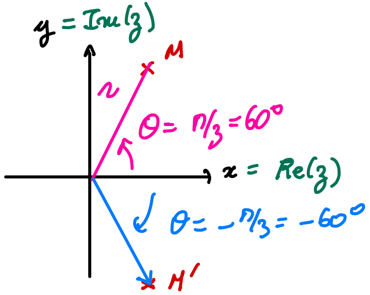
1.1 On considère les points M et M' de coordonnées respectives $(1\,;\,\sqrt{3})$ et $(1\,;-\sqrt{3})$:

(a) déterminer leurs affixes z et z' sous forme algébrique.

(b) donner les expressions exponentielles de z et z'.

(c) Que constituent z et z' l'un pour l'autre ?

Plaçons M et M'



(a) $z = 1 + i\sqrt{3}$ $\qquad$ $z' = 1 - i\sqrt{3}$ $\qquad$ $z = x + iy$

(b) $z = re^{i\theta}$ $\qquad$ $z' = r'e^{i\theta'}$

$= r\exp(i\theta)$

module $\qquad$ argument

Ce sont les MÊMES que les r et θ polaires.

$r = \sqrt{1 + 3} = 2$ $\qquad$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi/3 = 60°$

$\Rightarrow z = 2e^{i\pi/3} = 2e^{i60°}$

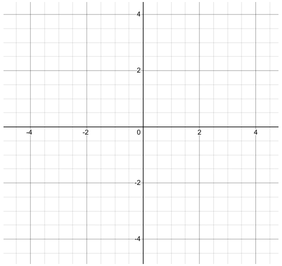
$z' = 2e^{-i\pi/3} = 2e^{-i60°}$

(c) Ce sont des conjugués : $z' = \overline{z}$ ou $z = \overline{z'}$

1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes z telles que :

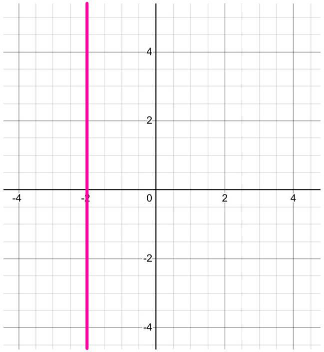
(a) $\mathrm{Re}(z) = -2$; (b) $\mathrm{Im}(z) = 1$; (c) $|z| = 4$; (d) $|z| = -3$; (e) $\arg(z) = \pi/4$;

(f) $z \cdot \overline{z} = 4$; (g) $z + \overline{z} = -4$; (h) $z - \overline{z} = 8i$; (i) $z = \overline{z}$.

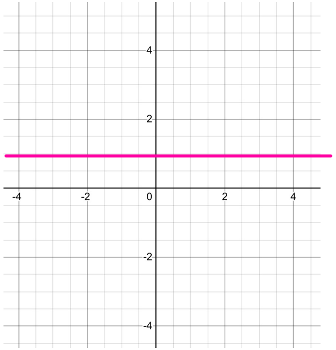


$z = x + iy$

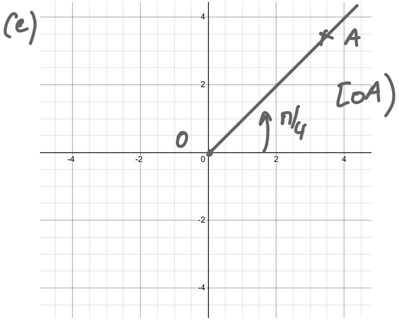
$= re^{i\theta}$



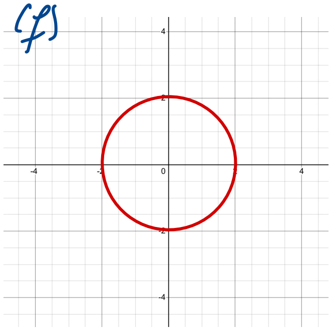
(a) $Re(z) = -2 = x$



(b) $Im(z) = 1 = y$

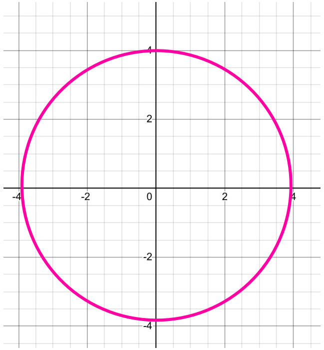


$arg(z) = \frac{\pi}{4} = \theta$

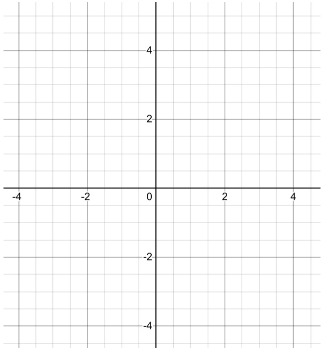


$z \cdot \bar{z} = r^2 = 4 \quad r \geq 0$

$\iff r = 2$

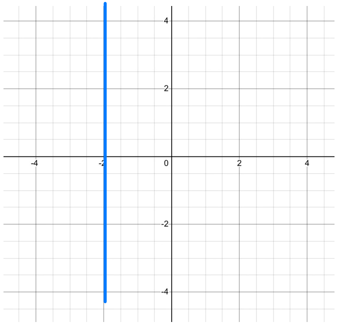


(c) $|z| = r = 4$



(d) $|z| = -3$

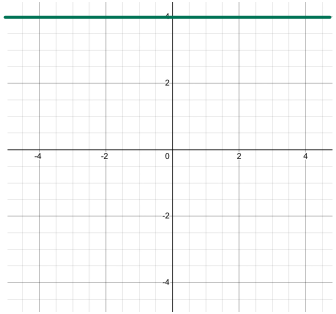
$|z| > 0$ toujours.



(g) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy$

$= 2x = -4$

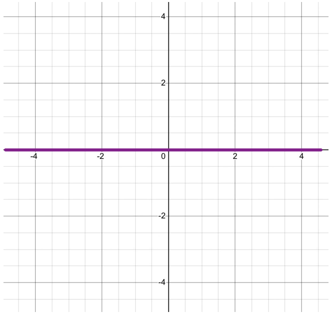
$\iff x = -2$



(h) $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy)$

$= 2iy = 8i$

$\iff y = 4$



(i) $z = \overline{z}$

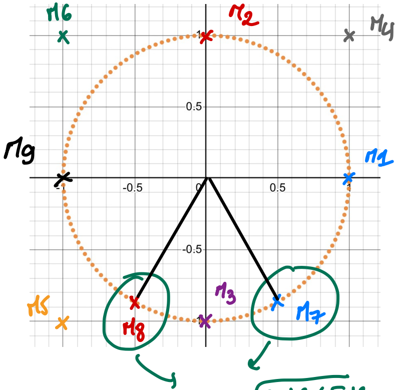
$x + iy = x - iy$

$\begin{cases} x = x \\ y = -y \Leftrightarrow y = 0 \end{cases}$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

$$z_1 = 1\,;\; z_2 = i\,;\; z_3 = -i\,;\; z_4 = 1 + i\,;\; z_5 = -1 - i\,;\; z_6 = -1 + i\,;$$

$$z_7 = \frac{+1 - i\sqrt{3}}{2}\,;\; z_8 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\; ;\; z_9 = -1$$



$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$x + iy = r\,e^{i\theta}$

$z_1 = 1\,e^{i0}$

$z_2 = 1\,e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$

$z_3 = 1\,e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2}$

$z_4 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

$z_5 = \sqrt{2}\,e^{-i\,3\pi/4}$

$z_6 = \sqrt{2}\,e^{i\,3\pi/4}$

$z_7 = 1\,e^{-i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$

$z_8 = 1\,e^{-i2\pi/3} = e^{-i2\pi/3}$

$\left(= e^{-i120°}\right)$

$z_9 = e^{i\pi}$

1.4 Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = 2 + 2i$, $z_B = -1 + 3i$, et $z_C = 4 + 6i$, et soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

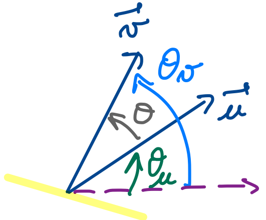
(a) calculer les affixes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$;

(b) à partir de ces affixes, calculer la valeur de l'angle $\theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

(a) $z_u = z_B - z_A = -1 + 3i - (2 + 2i) = -3 + i$

$z_v = z_C - z_A = 4 + 6i - (2 + 2i) = 2 + 4i$

(b)



$\theta = \theta_v - \theta_u$

(b) $|z_u| = \sqrt{10}$ $\quad \arg(z_u) = \arctan\left(\frac{1}{-3}\right) + \pi = 2{,}82\,\text{rad} = 162°$

$|z_v| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\quad \arg(z_v) = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) = 1{,}11 = 63{,}4°$

$\theta = \arg(z_v) - \arg(z_u) = \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) = -98{,}2°$

1.5 Soient A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 6i$.

(a) Donner l'affixe de $\overrightarrow{AC}$ sous forme exponentielle et déterminer la distance AC.

(b) Déterminer l'affixe z du point M tel que $3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$.

(a) $z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = -1 + 6i - (-3 + 2i) = 2 + 4i$

$r_{\vec{AC}} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow AC \simeq 4{,}47\ \text{u}_L$

$\theta_{\vec{AC}} = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) = 63{,}4° \Rightarrow z_{\vec{AC}} = 2\sqrt{5}\,e^{i63{,}4°}$

(b) $3(z_B - z) - (z_A - z) = z_C - z_A$

$3z_B - 2z - \cancel{z_A} = z_C - \cancel{z_A}$

$z = \frac{1}{2}(3z_B - z_C) = \frac{1}{2}\left[3(1-2i) - (-1+6i)\right] = \frac{1}{2}\left[3-6i+1-6i\right]$

$\Rightarrow \boxed{z = 2-6i}$

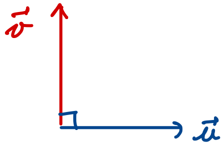
1.6 Soit $\vec{u}$ d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe iz :

(a) que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

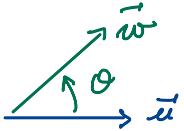
(b) Plus généralement, que dire de $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\theta}z$?

(a) $z' = iz \Rightarrow z' = e^{i\pi/2} z.$

$z = re^{i\varphi} \Rightarrow z' = re^{i(\varphi+\pi/2)}$



(b) $z = re^{i\varphi}$ $\quad z' = e^{i\theta}.\, r\, e^{i\varphi} = re^{i(\theta+\varphi)}$



$\Rightarrow$ Multiplier par $e^{i\theta}$ correspond à faire une rotation (vectorielle) de θ.

2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants, et exprimer les résultats obtenus sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 \ ; \ z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} \ ; \ z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i)$$

$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 = 1 - 4i - 4 - (4+4i-1)$

$= -3-4i - (3+4i) = -6-8i$

$z_1 = re^{i\theta}$ $\quad r = \sqrt{100} = 10$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{-8}{-6}\right) - \pi$ (radians)

$= -2,21 = -127°$

$\Rightarrow z_1 = 10e^{-i127°} = 10e^{-i2,21}$

$z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} = \frac{(1+3i)(1-2i)}{5} = \frac{1-2i+3i+6}{5} = \frac{7}{5} + i\frac{1}{5}$

$(1+2i)(1-2i) = 1^2 + 2^2 = 5$ car $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$z_2 = re^{i\theta}$ $\quad r = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{1/5}{7/5}\right) + 0 = 0,142 = 8,13°$

$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\, e^{i8,13°} = \sqrt{2}\, e^{i0,142}$

$z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i) = 3i - 4 - (\cancel{3} \underbrace{-i - 9i}_{-10i} \cancel{-3}) = -4+13i$

$z_3 = re^{i\theta} \Rightarrow$ $\quad r = \sqrt{185}$

$\theta = \arctan\left(\frac{13}{-4}\right) + \pi$ (radians)

$= 1,87 = 107° \Rightarrow z = \sqrt{185}\, e^{i107°}$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(1)\ z^2 = -9\ ;\ (2)\ z^2 + 3z + 4 = 0\ ;\ (3)\ z^2 + 2\sqrt{3}\cdot z + 4 = 0$$

$$(4)\ z + 2i = iz - 1\ ;\ (5)\ 2z + i = \bar{z} + 1\ ;$$

$$(6)\ z^4 = 1\ ;\ (7)\ z^3 = -1\ ;\ (8)\ z^4 = -16;\ (9)\ z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$$

(1) $z = \pm 3i$ ou $\begin{cases} z_1 = -3i \\ z_2 = 3i \end{cases}$

(2) $az^2 + bz + c = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \delta \ / \ \delta^2 = \Delta$

$$\Rightarrow z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

$z^2 + 3z + 4 = 0$ $\quad$ <u>Wanted:</u> 2 solutions dans $\mathbb{C}$.

$\Delta = 9 - 4\times4\times1 = -7 = (i\sqrt{7})^2$

$$z = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2\times1} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{7}}{2} \\ \text{ou} \\ z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

(3)

$z^2 + 2\sqrt{3}\, z + 4 = 0$ $\quad \Delta = (4\times3) - 4\times4\times1 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3} - 2i}{2\times1} = -\sqrt{3} - i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$$

$z = \underbrace{-\sqrt{3} \pm i}$

conjuguées.

(4) $z + 2i = iz - 1$

$z - iz = -1 - 2i$

$z(1-i) = -1 - 2i$

$$\Rightarrow z = \frac{-1-2i}{1-i} = \frac{(-1-2i)(1+i)}{2} = \frac{-1 - i - 2i + 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

$z = a + ib$

$a + ib + 2i = ia - b - 1$

$a + 1 + b + i(2 - a + b) = 0$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = -2 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad b = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow z = \frac{1}{2} + i\left(-\frac{3}{2}\right)$

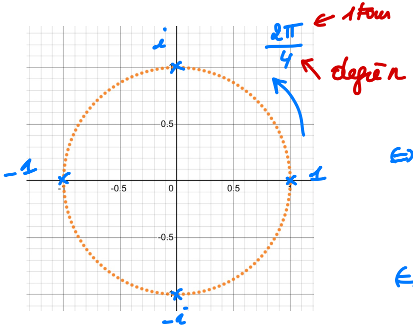
(5) $2z + i = \bar{z} + 1$ $\quad z = a + ib$

$2(a + ib) + i = a - ib + 1$

$2a + 2ib + i = a - ib + 1 \Rightarrow (a - 1) + i(3b + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} a - 1 = 0 \\ 3b + 1 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -1/3 \end{matrix} \Leftrightarrow \boxed{z = 1 - \frac{i}{3}}$$

(6) $z^4 = 1$ **Wanted:** 4 solutions.



J'écris $z = re^{i\theta}$

Je cherche $z^4 = \boxed{1}$ ← module 1 argument 0

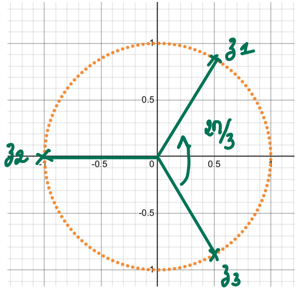
$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = 1e^{i0}$

$r^4 e^{i4\theta} = 1e^{i0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \text{ avec } r > 0 \\ 4\theta = 0 [2\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 \left[\frac{2\pi}{4}\right] = 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1e^{i0} = 1 \\ z_2 = 1e^{i\pi/2} = i \\ z_3 = 1e^{i\pi} = -1 \\ z_4 = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \end{cases}$

[7] $z^3 = -1$ **Wanted:** 3 solutions dans $\mathbb{C}$.



$z^3 = -1 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 1e^{i\pi}$

En effet $z = re^{i\theta} \Leftrightarrow z^3 = (re^{i\theta})^3$

$\Leftrightarrow z^3 = r^3 e^{i3\theta}$

Maintenant, je cherche r et θ tels que

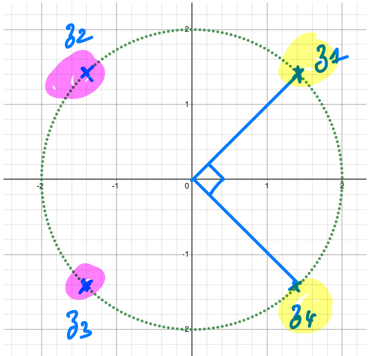
$\begin{cases} r^3 = 1 \text{ avec } r > 0. \Leftrightarrow r = 1 \\ 3\theta = \pi [2\pi] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$

$\begin{cases} z_1 = 1e^{i\pi/3} \\ z_2 = 1e^{i\frac{3\pi}{3}} = 1e^{i\pi} = -1 \\ z_3 = 1e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1e^{-i\pi/3} \end{cases}$

(8) $z^4 = -16$ Je cherche 4 solutions dans $\mathbb{C}$.

$r^4 e^{i4\theta} = 16 e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \text{ avec } r > 0 \\ 4\theta = \pi [2\pi] \end{cases}$



$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2\pi}{4}\right] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2e^{i\pi/4} \\ z_2 = 2e^{i3\pi/4} \\ z_3 = 2e^{i5\pi/4} = 2e^{-i3\pi/4} \\ z_4 = 2e\, e^{i7\pi/4} = 2e^{-i\pi/4} \end{cases}$

(h) $z^3 = \underbrace{2\sqrt{3} - 2i}$ $\Longleftrightarrow$ $r^3 e^{i3\theta} = \underbrace{4\, e^{-i\pi/6}}$

$$|2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{4\times3 + 4} = 4$$

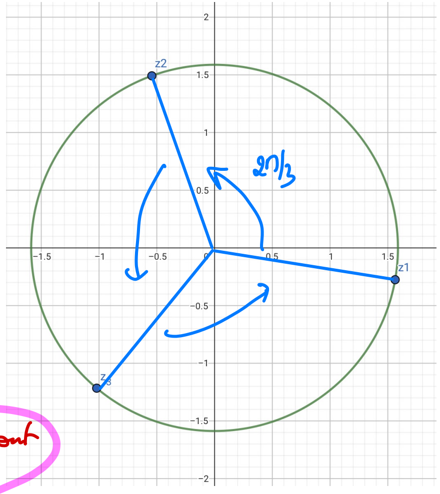
$$\arg(2\sqrt{3} - 2i) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

$$r^3 e^{i3\theta} = 4e^{-i\pi/6} \Longleftrightarrow \begin{cases} r^3 = 4 \text{ avec } r \geq 0 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{4} \simeq 1{,}59 \\ \theta = -\frac{\pi}{18}\left[\frac{2\pi}{3}\right] = -10^\circ\ [120^\circ] \end{cases}$$

$$= -\frac{\pi}{18}\left[\frac{12\pi}{18}\right]$$

$$\begin{cases} z_1 = 4^{1/3}\, e^{-i\pi/18} \\ z_2 = 4^{1/3}\, e^{i11\pi/18} \\ z_3 = 4^{1/3}\, e^{i\frac{23\pi}{18}} \\ \quad = 4^{1/3}\, e^{-i\frac{13\pi}{18}} \end{cases}$$



Les solutions ne sont pas conjuguées.

Exemple : $3\theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

$$(a)\ z_1 = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6 \ ;\ (b)\ z_2 = (5+3i)^7 \ ;\ (c)\ z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i};\ (d)\ z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3} \ ;\ (e)\ z_5 = \frac{4+6i}{1-5i}$$

$(a+b)^n$

0	1						
1	$1a$	$1b$					
2	$1a^2$	$2ab$	$1b^2$				
3	$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$			
4	$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$		
5	1	5	10	10	5	1	
6	$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Ex : $(1-i)^{32} = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{32} = \left(\sqrt{2}\right)^{32} \cdot \left(e^{-i\pi/4}\right)^{32}$

$$= 65536 \underset{=1}{\boxed{e^{-i8\pi}}} = 65536$$

(a) $z_1 = \left[1\, e^{-i\pi/3}\right]^6 = 1^6\, e^{-i6\pi/3} = 1\, e^{-i2\pi} = 1 = z_1$

(b) $z_2 = (5+3i)^7 = \left[r e^{i\theta} \right]^7$ $\quad r = \sqrt{34}$, $\theta = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}540$

$= (\sqrt{34})^7 \, e^{i 7 \times 0{,}540}$

$= \sqrt{34}^7 \, e^{i\,3{,}78} = 34^{\frac{7}{2}} \, e^{i\,3{,}78}$

$\simeq 229'180 \; e^{i\,217°} \simeq 229'180 \; e^{-i\,143°}$

(c) $z_3 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{2\, e^{-i\pi/6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Ou bien

$z_3 = \dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \dfrac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

NB: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = ??$ → 3.1. ☺

(d) $z_3 = \dfrac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}\right)^2}{\left(2\, e^{i\pi/6}\right)^3} = \dfrac{2\, e^{-i\,2\pi/4}}{8\, e^{i\,3\pi/6}} = \dfrac{1}{4} e^{-i\pi} = -\dfrac{1}{4}$

(e) $z_5 = \dfrac{4+6i}{1-5i} = \dfrac{(4+6i)(1+5i)}{26} = \dfrac{4+20i+6i-30}{26} = \dfrac{-26+26i}{26} = -1+i$

(ou) $z_5 = \dfrac{\sqrt{52}\; e^{i\,56{,}3°}}{\sqrt{26}\; e^{-i\,78{,}7°}} = \sqrt{2}\; e^{i\,135°}$

3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$, déterminer les valeurs **exactes** de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

Règle: $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases}$

① Formes expo

② Faire apparaître des arguments de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$

③ Adapter les calculs des formes algébriques.

④ Identifier.

① $z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$ $\qquad z' = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

② $z \cdot z' = 2\sqrt{2}\, e^{i5\pi/12}$ $\quad$ et $\quad \dfrac{z'}{z} = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{2\, e^{i\pi/6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$

$= 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$

③ $z \cdot z' = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\, 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \overset{eq.}{=} (\sqrt{3}+i)(1+i)$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3}i + i - 1$$

$$= (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$$

④ Identification : $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-1$ et $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+1$.

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

→ Pour z'/z : ② $\frac{z'}{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}$

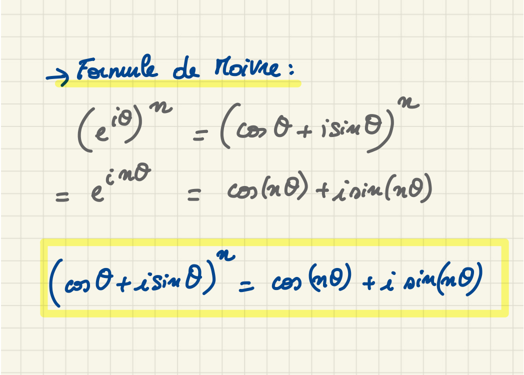
$$\frac{z'}{z} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1}{4} = \frac{\sqrt{3}+1 + i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}+1}{4} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}-1}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.2 À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.



→ Formule de Moivre :

$$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

→ Poser $n=2$.

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = (\cos x + i\sin x)^2$$

$$= \cos^2 x + 2i\cos x\sin x - \sin^2 x$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(2\sin x\cos x)$$

$\Rightarrow \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\Rightarrow \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Outils mathématiques 1 — TD 5 : Fonctions numériques

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ **3)** $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-6}$ **4)** $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

5) $f(x)=\frac{1}{\cos x-\sin \cancel{x}(2x)}$ **6)** $f(x)=\ln(1-x)$ **7)** $f(x)=\ln\left(2x^2+3x-2\right)$ **8)** $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$

tels que

1) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{x/x-1=0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

privé de l'ensemble des

2) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{x/x^2-4=0\} = \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

$=]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

0

$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ paire est paire

paire paire

3) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{x^2+x-6=0\}$

$\Delta=25=5^2$ $x_1=\frac{-1-5}{2}=-3$ $x_2=\frac{-1+5}{2}=2$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2;-3\}=]-\infty;-3[\cup]-3;2[\cup]2;+\infty[$

4. $\sqrt{0}=0$ $\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

$f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

$\mathcal{D}_f=\{x/x^2+3x-4\geqslant 0\}$

Règle : le signe de ax^2+bx+c est celui de a à l'extérieur des racines.

Preuve : $\lim_{\pm\infty} ax^2+bx+c=\lim_{\pm\infty} a\boxed{x^2}>0$

$\Delta=25=5^2$ $x_1=\frac{-3-5}{2}=-4$ $x_2=\frac{-3+5}{2}=1.$

$\mathcal{D}_f=]-\infty;-4]\cup[1;+\infty[$

comprises

6) $f(x)=\ln(1-x)$ $\mathcal{D}_f=\{x/1-x>0\}$

stricte

$=\{x<1\}=]-\infty;1[$

non comprises

7) $f(x) = \ln(2x^2 + 3x - 2)$

$D_f = \{x \,/\, 2x^2 + 3x - 2 > 0\}$

$\Delta = 25 = 5^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$ ou $x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$D_f =]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

exclues. car ln(0) n'existe pas.

5) $f(x) = \frac{1}{\cos x - \sin \cancel{x}(2x)}$ **6)** $f(x) = \ln(1 - x)$ **7)** $f(x) = \ln\left(2x^2 + 3x - 2\right)$ **8)** $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

8) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \,/\, x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}_*$

$=]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

→ RV aux prolongements par continuité.

5) $f(x) = \frac{1}{\cos(x) - \sin(2x)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \,/\, \cos(x) - \sin(2x) = 0\}$ → Révisions de rentrée

$\cos(x) = \sin(2x) \iff \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2x \quad [2\pi] \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2x \quad [2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right] ; \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$

2 Parité et symétries

2.1 Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = |x|$
2) $f(x) = x^2$
3) $f(x) = x^3$
4) ~~$f(x) = \sqrt{x}$~~
5) ~~$f(x) = x^{3/2}$~~
6) ~~$f(x) = 2x + 1$~~
7) $f(x) = 2x^2 + 1$
8) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
9) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
10) ~~$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$~~
11) $f(x) = \sin(2x)$
12) $f(x) = \sin(x^2)$
13) $f(x) = \cos(3x)$
14) $f(x) = \cos(x^3)$
15) $f(x) = \tan(x)$
16) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$
17) ~~$f(x) = \ln(x)$~~
18) ~~$f(x) = \sin \circ \ln(x)$~~
19) ~~$f(x) = \ln \circ \sin(x)$~~
20) ~~$f(x) = \exp(x)$~~
21) ~~$f(x) = \sin \circ \exp(x)$~~
22) $f(x) = \exp \circ \cos(x)$

○ paire

○ impaire

✗ ni paire ni impaire

2.2 On considère les fonctions $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x^3 - x + 2$ de graphes respectifs C_f et C_g.
Étudier les éventuels axes ou centres de symétrie de C_f et C_g.

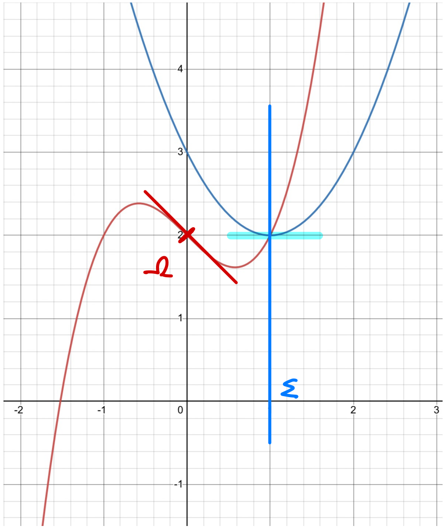
$\mathcal{C}_f$: je cherche un axe de symétrie Σ : $x = \dots$

$\mathcal{C}_g$: je cherche un centre de symétrie $\Omega(x;y)$

$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \Sigma : x = 1$

$g'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow g''(x) = 6x \Rightarrow g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

De plus $x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \Rightarrow \Omega(0;2)$



3 Périodicité et transformations de graphes

3.1 Étudier la parité et la périodicité des fonctions ci-après et déterminer l'ensemble d'étude restreint.

1) $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$ **2)** $f(x) = \cos(3x) + 4\sin(2x)$ **3)** $f(x) = \sin^2(x)$ **4)** $f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$

5) $f(x) = 1 + \cos^2(2x)$ **6)** $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ **7)** $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$ **8)** $f(x) = x + \sin(x)$

Etapes: ① f T-périodique $\Rightarrow I = \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ ou $\left]-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right[$
Puis
② f paire ou impaire $\Rightarrow I = \left[0; \frac{T}{2}\right]$ ou $\left[0; \frac{T}{2}\right[$

1) $\cos(\omega x)$ avec $\omega = \frac{3\pi}{4}$

$T = \frac{2\pi}{3\pi} \cdot 4 = \frac{8}{3} \Rightarrow I = \left[-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right]$

f paire $\Rightarrow I = \left[0; \frac{4}{3}\right]$

2) $f(x) = \cos(3x) + 4\sin(2x)$

période commune

$\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{6\pi}{3} = 2\pi$ $\pi; 2\pi; 3\pi; \dots$

$\Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow I = [-\pi; \pi]$

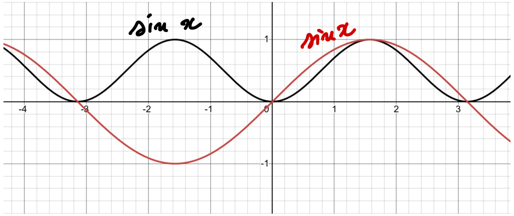
f n'est ni paire ni impaire car $P + I \rightarrow$ ni P ni I.

3) $f(x)=\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{constante}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2x)}_{\pi\text{-périodique}}$

$\Rightarrow T=\pi \Rightarrow I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

De plus f est paire $\Rightarrow I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

NB: $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ sont π-périodiques



4) $f(x)=\tan\left(\frac{x}{4}\right)$ $T=\frac{\pi}{\underset{\omega}{1/4}}=4\pi \Rightarrow I=\left]-2\pi;2\pi\right[$

De plus f est impaire : $I=\left[0;2\pi\right[$

5) $T=\frac{\pi}{2}$ et f est paire $\Rightarrow I=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

6) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan(x)}$ π périodique et impaire $\Rightarrow I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

7) $f(x)=\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin(2x) \Rightarrow$ impaire et π-périodique

$\Rightarrow I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

8) $f(x)=\underset{\underset{\text{variable}}{\uparrow}}{x}+\sin(x)$ non-périodique et impaire

$I=[0;+\infty[$

3.2 Tracer sur $[-2\ ;\ 6]$ la courbe représentative de la fonction f suivante :

$$f \text{ est 4–périodique et } \begin{cases} f(x)=x \text{ si } 0\leq x<1 \\ f(x)=1 \text{ si } 1\leq x<3 \\ f(x)=4-x \text{ si } 3\leq x<4 \end{cases}$$

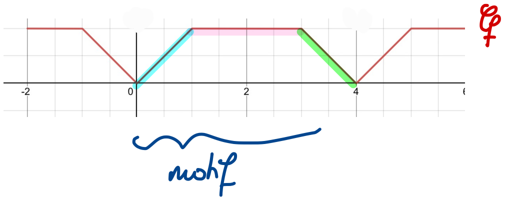
et en déduire les graphes des courbes de

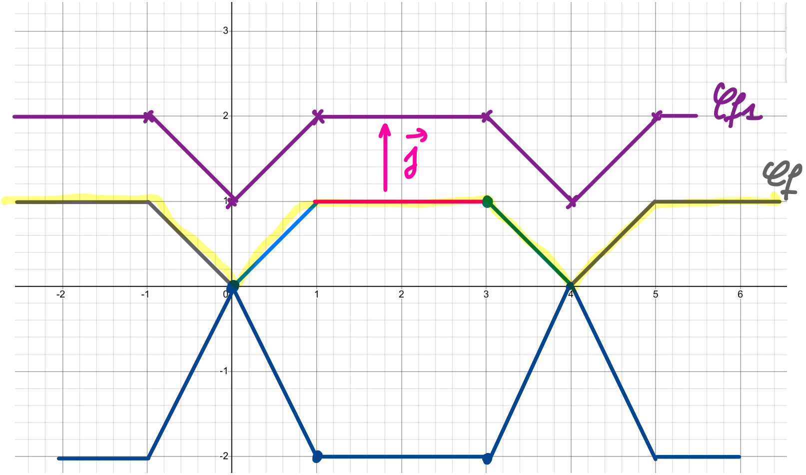
(a) $f_1(x)=1+f(x)$ et $f_2(x)=-2f(x)$;

(b) $g_1(x)=f(x-2)$ et $g_2(x)=f(2x)$.

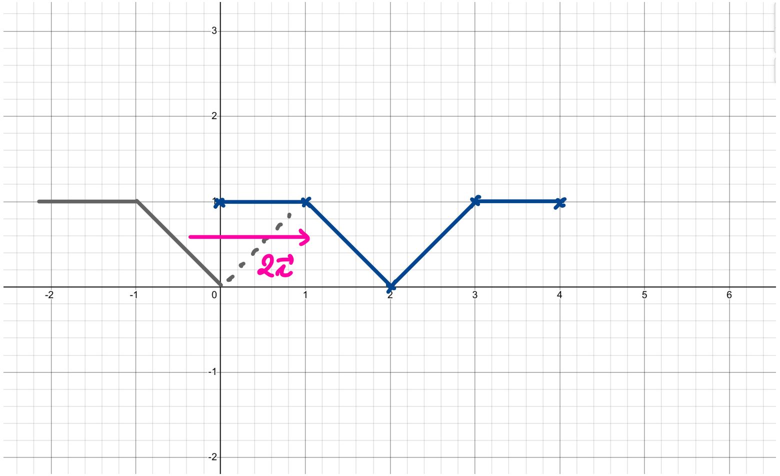
(c) Conclure enfin sur la nature des transformations du graphe C_f associées aux opérations $\lambda\cdot f(x)$, $\lambda+f(x)$, $f(\lambda\cdot x)$ et $f(x-\lambda)$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

f est définie par morceaux.





Actions sur x



$f(0)=0$ pente $m=1$

$f(1)=f(2)=1$ constante

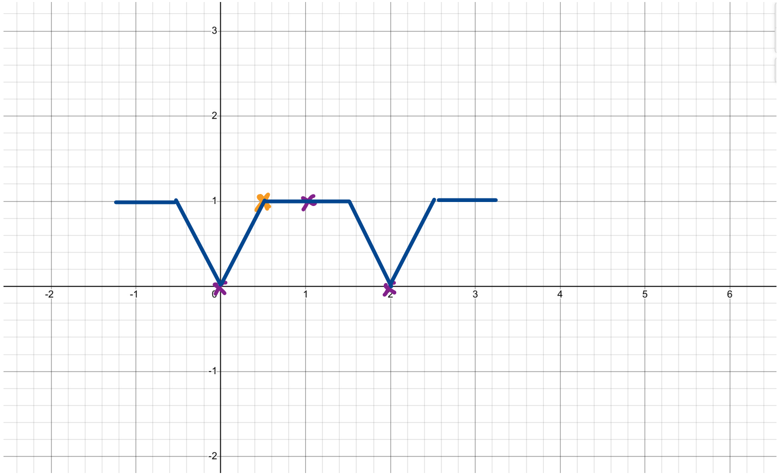
$f(3)= 4-3=1$ pente $m=-1$

$g_1(0)= f(-2)$
$g_1(1) = f(-1)$

$g_2(0) = f(0)$
$g_2(0) = f(2)$

Fonction	Courbe
$\lambda + f(x)$	Translation verticale de $\lambda\vec{j}$
$\lambda f(x)$	Dilatation verticale de λ. → si $\lambda<0$ on ajoute une symétrie (Ox)

Fonction	Courbe
$f(x-\lambda)$ ↑ soustraction	Translation vers la droite de $\lambda\vec{i}$



$g_2(0) = f(0)$ $\qquad g_2(1/2) = f(1) = 1$

$g_2(0) = f(2)$ $\qquad g_2(2) = f(4) = 0$

Fonction	Courbe
$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{soustraction}}}{f(x-\lambda)}$	Translation vers la droite de $\lambda\vec{i}$
$f(\lambda x)$	Contraction horizontale de λ (si $\lambda<0$ on ajoute une symétrie d'axe (Oy)).

4 Fonctions particulières

4.1 Soit la fonction de Heaviside $\theta(x)$ définie par

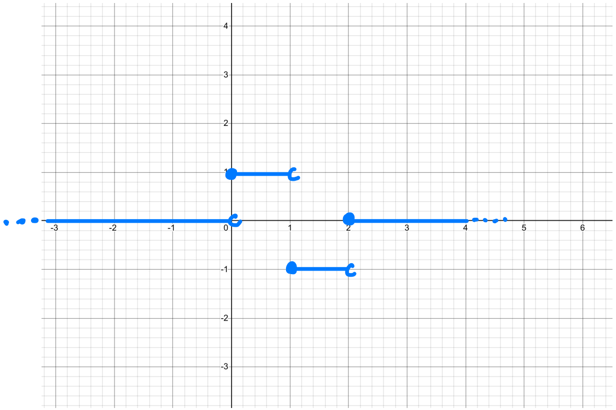
$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

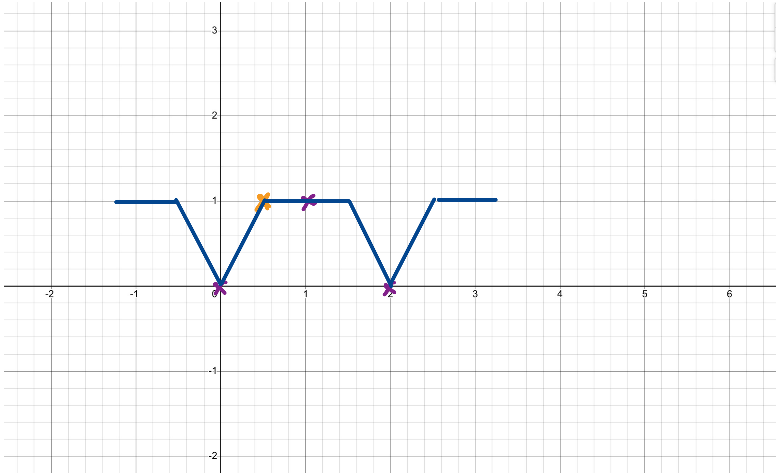
Tracer les fonctions :

(a) $f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$;

(b) et $g(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$.

(a) $f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ x=0}}{\theta(x)} - 2\underset{\substack{\uparrow \\ x=1}}{\theta(x-1)} + \underset{\substack{\uparrow \\ x=2}}{\theta(x-2)}$;





4 Fonctions particulières

4.1 Soit la fonction de Heaviside $\theta(x)$ définie par

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Tracer les fonctions :

(a) $f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$;

(b) et $g(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$.

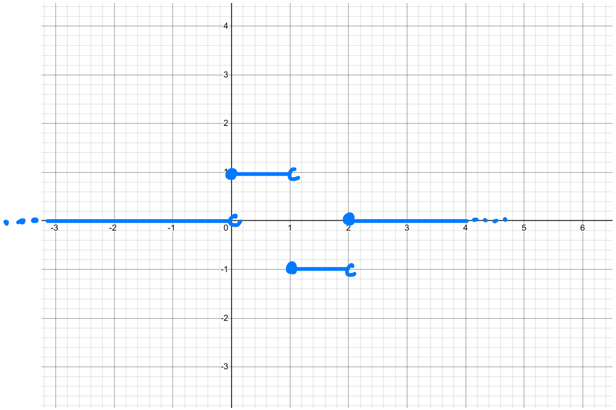
$g_2(0) = f(0)$ $\quad$ $g_2(1/2) = f(1) = 1$

$g_2(0) = f(2)$ $\quad$ $g_2(2) = f(4) = 0$

Fonction	Courbe
$f(x-\lambda)$ soustraction	Translation vers la droite de $\lambda \vec{i}$
$f(\lambda x)$	Contraction horizontale de λ (si $\lambda<0$ on ajoute une symétrie d'axe (Oy)).

(a) $f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$;

$x=0$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $x=2$



https://www.desmos.com/calculator/wturutqlpb

(b) et $g(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$.

$x=-3$ ①

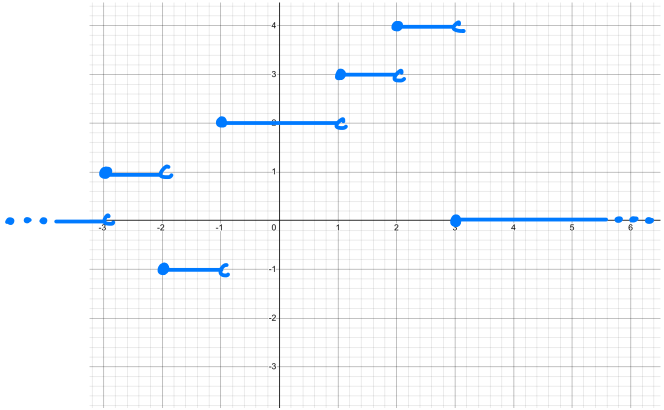
$x=1$ ④

$x=-2$ ②

$x=3$ ⑤

$x=-1$ ③

$x=4$ ⑥



4.2 On souhaite créer une fonction causale $g(x)$ qui soit :

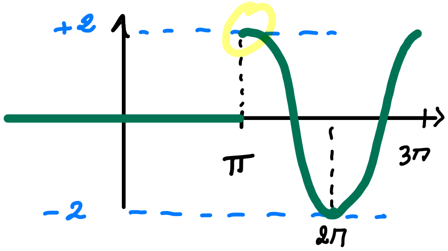
- nulle pour $x < \pi$;
- sinusoïdale, 2π-périodique, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2 pour $x \geq \pi$;
- et telle que $g(\pi) = 2$.

(a) Tracer le graphe de $g(x)$.

→ (b) Déterminer $g(x)$ à l'aide de la fonction de Heaviside.

Ecrivons $f(x) = \underbrace{\theta(x-\pi)}_{\text{support}} \times \underbrace{\left(V_m + A\cos(\omega x+\varphi)\right)}_{\text{fct sinusoïdale}}$

ou $\theta(x-\pi)\cdot\left(V_m + A\sin(\omega x+\varphi)\right)$



$V_m = 0$

$A = 2$

$\omega = 1$ $\left(\text{car } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$

Je cherche φ tel que le maximum est atteint en $x = \pi$.

$$\Leftrightarrow \cos(\pi + \varphi) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi + \varphi) = \cos(0)$$

$$\begin{cases} \pi + \varphi = 0 \\ \cancel{\pi + \varphi = -0} \end{cases}$$

inutile

$$\Rightarrow \varphi = -\pi$$

Je cherche φ / $\sin(\pi + \varphi) = 1$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} \pi + \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \pi + \varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(la même)

$$\rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \Theta(x - \pi)\, 2.\cos(x - \pi)}$$

avec un cosinus.

ou

ou $\boxed{f(x) = \Theta(x - \pi)\, 2.\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

avec un sinus

4.3 Exprimer la fonction f ayant les caractéristiques suivantes :

- g est sinusoïdale, de valeur moyenne 2, d'amplitude 3, et de période $4\pi/3$ pour $x \in [-\pi/4\,;2\pi]$;
- en dehors de ces valeurs de x, g est nulle ;
- et g est maximale en $x = 2\pi/9$.

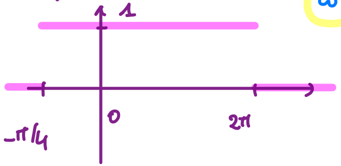
$$f(x) = \left[\Theta\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \Theta(x - 2\pi)\right] . \left[V_m + A\cos(\omega x + \varphi)\right]$$

J'allume en $-\pi/4$ puis j'éteins en 2π

$V_m = 2$

$A = 3$

$\omega = \frac{2\pi}{4\pi} . 3 = \frac{3}{2}$



$\cos(\omega x + \varphi) = 1$ en $x = 2\pi/9$

$$\cos\left(\frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{9} + \varphi\right) = \cos(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

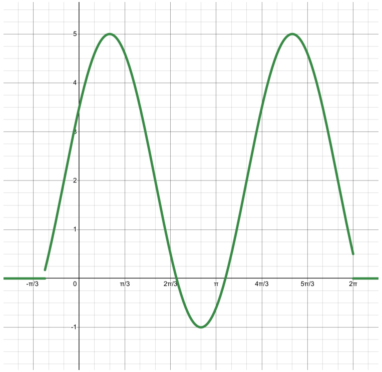
$$\boxed{f(x) = \left[\Theta\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \Theta(x - 2\pi)\right] \times \left[2 + 3\cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

ou $\sin(\omega x + \varphi) = 1$

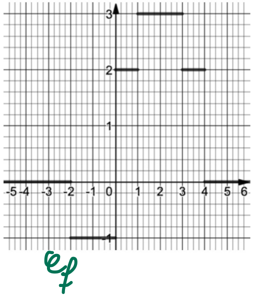
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{9} + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

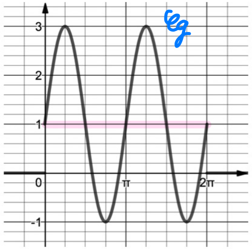
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{f(x) = \left[\Theta\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \Theta(x - 2\pi)\right] \times \left[2 + 3\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}$$



4.4 Donner les équations des courbes représentées sur les figures ci-dessous.





$$f(x) = -\theta(x+2) + 3\theta(x) + \theta(x-1) - \theta(x-3) - 2\theta(x-4)$$

$$g(x) = [\theta(x) - \theta(x-2\pi)] \cdot [V_m + A\cos(\omega x + \varphi)]$$

g est maximale en $x = \frac{\pi}{4}$

$V_m = \frac{3+(-1)}{2} = 1$ $\quad A = \frac{3-(-1)}{2} = 2$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$\cos(2x+\varphi) = 1$ en $x = \frac{\pi}{4}$

$\iff 2\frac{\pi}{4} + \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$g(x) = [\theta(x) - \theta(x-2\pi)] \cdot \underbrace{\left(1 + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}_{1 + 2\sin(2x)}$$

Outils mathématiques 1 — TD 6 : Branches infinies

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. $\mathcal{D}f$?
   - (a) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$, et étudier la position de C par rapport à D quand $x \to +\infty$;
   - (b) puis déterminer l'équation de l'asymptote à C en $-\infty$.

$$\mathcal{D}f = \underset{(b)}{]-\infty;-1]} \cup \underset{(a)}{[1;+\infty[}$$

(a) $$\lim_{+\infty} \underset{\mathcal{C}f}{f(x)} - \underset{D}{2x} = \lim_{+\infty} \underset{\text{"}\infty - \infty\text{"}}{\sqrt{x^2-1} - x} = \lim_{+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\underset{\neq 0}{\sqrt{x^2-1} + x}}$$

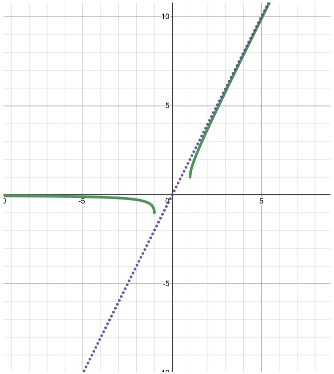
$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\underset{\to +\infty}{\sqrt{x^2-1} + x}} = 0^-$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} \underset{\mathcal{C}f}{f(x)} - \underset{D}{y} = 0^- \Rightarrow$$ $D : y = 2x$ est A.O à $\mathcal{C}f$ en $+\infty$ et $\mathcal{C}f$ est en-dessous de D.

(b) $$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \underset{+\infty}{\sqrt{x^2-1}} \underset{-\infty}{+ x} = \lim_{-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} + x)(\sqrt{x^2-1} - x)}{\sqrt{x^2-1} - x}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\underset{\to +\infty}{\sqrt{x^2-1} - x}} = 0^-$$

$\Rightarrow$ (Ox) est A.H à $\mathcal{C}f$ en $-\infty$ et $\mathcal{C}f$ est en-dessous de (Ox)



Etude des branches infinies : checklist.

① $\mathcal{D}f$

② Calcul des limites dans les trous de $\mathcal{D}f$.

③ Equation de l'asymptote

④ Positions relatives.

2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2-5x+3} \qquad f_2(x) = \frac{x^3+x+7}{2x^2+1} \qquad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \qquad f_4(x) = \frac{x^2 + x\ln(x)}{x+1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x}+2}{e^x-2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x}$$

1.) $f(x) = \dfrac{2}{2x^2-5x+3}$ $\qquad \mathcal{D}f = \underset{④}{]}-\infty;1\underset{①}{[}\cup]1;\tfrac{3}{2}\underset{②}{[}\cup]\tfrac{3}{2};+\infty\underset{③}{[}$

$\Delta = 1 \qquad x_1 = \dfrac{+5-1}{4} = 1 \qquad x_2 = \dfrac{+5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$

①② $\lim\limits_{1} f(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{2}{\underbrace{2x^2-5x+3}_{\to 0}}$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 3/2 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

Du fait du signe de $2x^2-5x+3$, on a :

$\lim\limits_{1^+} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{1^-} f(x) = +\infty$ } D_1 : $x = 1$ est A.V à $\mathcal{C}f$.

$\lim\limits_{\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$ } D_2 : $y = \frac{3}{2}$ est A.V à $\mathcal{C}f$.

③ et ④ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{2x^2-5x+3} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{2}\,1}{\underset{1}{\cancel{2}}x^2} = 0^+$

et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0^+$ aussi

→ (Ox) est A.H. à $\mathcal{C}f$ en $\pm\infty$ et $\mathcal{C}f$ est au-dessus de (Ox).

2) $\mathcal{D}f = \mathbb{R} = \underset{②}{]}-\infty;+\infty\underset{①}{[}$

① $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3+x+7}{2x^2+1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{2x^2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^3}+x+7\cancel{-x^3}-x/2}{2x^2+1}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x/2+7}{2x^2+1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x/2}{2x^2}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{4x} = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = 0^+$

$\Leftrightarrow$ D : $y = x/2$ est A.O à $\mathcal{C}f$ en $+\infty$ et $\mathcal{C}f$ est au-dessus de D.

Comme $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ je recherche $D: y = mx + p$ A.O en $+\infty$.

$$m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x^3 + x + 7}{2x^3 + x} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^3}\, 1}{2\cancel{x^3}} = \frac{1}{2} = m$$

$$\Rightarrow \quad p = \lim_{+\infty} f(x) - mx = \lim_{+\infty} \frac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1} \rightarrow \text{calcul vert.}$$

$$= 0^+$$

$\Rightarrow$ $D: y = \frac{1}{2}x + 0 = \frac{x}{2}$ est A.O à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

② Sur la même base de calculs :

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $m = \frac{1}{2}$ et $p = 0^-$

$\Rightarrow$ $D: y = \frac{x}{2}$ est A.O à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $\mathscr{C}_f$ est en-dessous.

3. $f(x) = x - \sqrt{2x}$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x\left(1 - \frac{\sqrt{2x}}{x}\right) = \lim_{+\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}_{\to 0}\right) = +\infty.$$

→ Recherche d'Asymptote oblique

$$m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right) = 1 = m \leftarrow \text{direction asymptotique}$$

$$p = \lim_{+\infty} f(x) - mx = \lim_{+\infty} \cancel{x} - \sqrt{2x} - \cancel{x} = -\infty.$$

$$p \longrightarrow -\infty.$$

Pas d'A.O en $+\infty$ mais une direction asymptotique $m = 1$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$ $\qquad \mathcal{D}_f = \,]0; +\infty[$ $\quad$ ② ①

① $$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1 + \overset{\to 0}{\frac{\ln x}{x}}\right)}{\cancel{x}(1 + 1/x)} = +\infty.$$

→ Recherche d'A.O.

$$m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)}{\cancel{x^2}(1 + 1/x)} = 1$$

$$p = \lim_{+\infty} f(x) - mx = \lim_{+\infty} \frac{x^2 + x\ln x}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2} + x\ln x \cancel{- x^2} - x}{x+1} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x}(\ln x - 1)}{\cancel{x}(1 + 1/x)} = +\infty.$$

Pas d'A.O mais direction asymptotique $m = 1$.

② $$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{x^2 + \overset{\to 0}{x\ln x}}{\underset{\to 1}{x+1}} = 0$$

$$\mathscr{C}_f \xrightarrow[x \to 0]{} (0;0) \qquad \text{pas d'A.V.} \quad \mathscr{C}_f \to 0.$$

5. $f(x) = \dfrac{e^{2x}+2}{e^x-2}$ $\qquad e^{2x} = (e^x)^2$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \,/\, e^x - 2 = 0\}$ $\qquad e^x = 2$

$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln 2$

$x = \ln 2$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\} = \underset{③.}{]}-\infty; \ln(2)\underset{①.}{[\cup]}\ln(2); +\infty\underset{②.}{[}$

① $\lim\limits_{\ln(2)} f(x) = \lim\limits_{\ln(2)} \dfrac{\overset{>0}{\boxed{e^{2x}+2}}}{\underset{\to 0}{\boxed{e^x-2}}}$ $\qquad e^x$ et $\ln(x)$ sont croiss

$\ln(2^+) = \ln(2)^+$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\ln(2)^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{\ln(2)^-} f(x) = -\infty. \end{cases}$$

$D : x = \ln(2)$ est A.V à $\mathcal{C}_f$.

② $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{2x}+2}{e^x-2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{\cancel{2x}}(1+2/e^{2x})}{\cancel{e^x}(1-2/e^x)} = \lim\limits_{+\infty} e^x \overset{\to 1}{\boxed{\dfrac{1+2/e^{2x}}{1-2/e^x}}}$

$= +\infty.$

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \underset{\to +\infty}{\boxed{\dfrac{e^x}{x}}} \cdot \underset{\to 1}{\boxed{\dfrac{1+2/e^{2x}}{1-2/e^x}}} = +\infty.$

croissances comparées

$\Rightarrow$ Pas d'A.O en $+\infty$ mais direction asymptotique de direction (Oy).

③ $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{\overset{\to 0}{\boxed{e^{2x}}}+2}{\underset{\to 0}{\boxed{e^x}}-2} = -1$

$D' : y = -1$ est A.H à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \underset{\mathcal{C}_f}{f(x)} - \underset{D'}{(-1)} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{\overset{0^+}{\boxed{e^{2x} + \cancel{2} + e^x - \cancel{2}}}}{\underset{\to -2}{\boxed{e^x - 2}}} = 0^{\boxed{+}}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ est au-dessus de D'.

6. $f(x) = 2x - \cos x$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \underset{\to +\infty}{\boxed{2x}}\underset{\text{borné}}{\boxed{-\cos x}} = +\infty$

$\rightarrow$ Recherche d'A.O.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x - \cos x}{x} = \lim\limits_{+\infty} 2 - \boxed{\dfrac{\cos x}{x}} = 2$

$\underset{\to 0}{\boxed{\dfrac{1}{x}}}\underset{\text{bornée}}{\boxed{\cos x}} \to 0$

$p = \lim\limits_{+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{+\infty} 2x - \cos x - 2x$

$= \lim\limits_{+\infty} -\cos x$ pas de limite

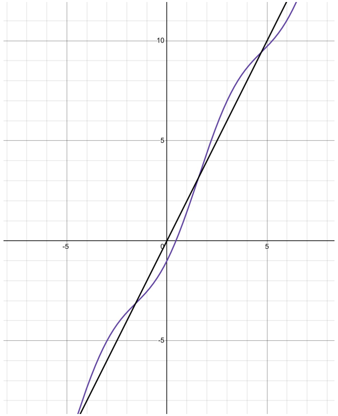
p n'existe pas.

$\Rightarrow$ Pas d'A.O en $+\infty$ mais direction asymptotique $m=2$.

$*$ Sur la base des calculs précédents:

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad m=2$ et p n'existe pas.

$\rightarrow$ Pas d'A.O. mais direction asymptotique $m=2$ en $-\infty$.



7. $f(x) = 2^x - e^x$ $\qquad D_f = \underset{②}{]}-\infty ; +\infty\underset{①}{[}$

$$\lim_{b \to +\infty} a^b = 0$$
$a < 1$

① $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 2^x - e^x = \lim\limits_{+\infty} e^x\left(\dfrac{2^x}{e^x} - 1\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty}\Big[\underbrace{\left(\tfrac{2}{e}\right)^x}_{0} - 1\Big] = -\infty$ $\quad\rightarrow$ Recherche d'A.O.

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \underbrace{\dfrac{e^x}{x}}_{+\infty}\Big[\underbrace{\left(\tfrac{2}{e}\right)^x - 1}_{-1}\Big] = -\infty.$

(croissances comparées)

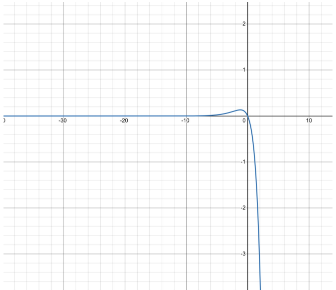
$\Rightarrow$ Pas d'A.O. mais branche parabolique de direction (Oy).

② $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \underbrace{2^x}_{0} - \underbrace{e^x}_{0} = 0$ $\qquad (Ox)$ est A.H à C_f en $-\infty$.

Position relative:

$2 < e$
$2^x < e^x$ si $x > 0$
$2^x > e^x$ si $x < 0$.
$2^x - e^x > 0$ si $x < 0$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0^+$



8) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{1-x}$ $\qquad \mathcal{D}f = \overset{\textcircled{1}}{]}0;1\overset{\textcircled{2}}{[\cup]}1;+\infty\overset{\textcircled{3}}{[}$

① $\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{\overset{\to 0}{x\ln x}}{\underset{\to 1}{1-x}} = 0$ $\qquad$ Pas d'AV en $x=0$

$\mathcal{C}f \to (0;0)$

→ Prolongement possible

② $\lim\limits_{1} \dfrac{\overset{\to 0}{x\ln x}}{\underset{\to 0}{1-x}} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \to$ L'Hospital

$= \lim\limits_{1} \dfrac{\ln x + \frac{x}{x}}{-1} = \lim\limits_{1} \dfrac{\overset{\to 0}{\ln x}+1}{-1} = -1$

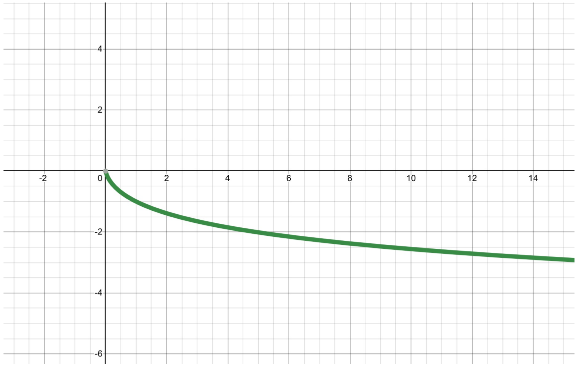
Pas d'A.V en $x=1$ mais $\mathcal{C}f \to (1;-1)$

③ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}(1-1/x)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\overset{\to +\infty}{\ln x}}{\underset{\to 1}{1-1/x}} = +\infty.$

→ Recherche d'A.O.

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x}\ \dfrac{\ln x}{1-1/x} = \lim\limits_{+\infty} \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\to 0}\ \underbrace{\dfrac{1}{1-1/x}}_{\to 1} = 0.$

Pas d'AO. mais une branche parabolique de direction (Ox).



4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;

(b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.

(c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \to 0$?

(a) $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^*$ $\qquad \mathcal{D}g = \mathbb{R}^*$

Or f est paire et g est paire $\quad I =]0;+\infty[$

Il se passera la même chose en $-\infty$ qu'en $+\infty$.

(b) $\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{\sin x}{x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \to$ L'Hospital

$= \lim\limits_{0} \dfrac{\cos x}{1} = 1 \to$ Pas d'AV $\ \mathcal{C}f \to (0;1)$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\sin x}_{\text{bornée}} = 0$$

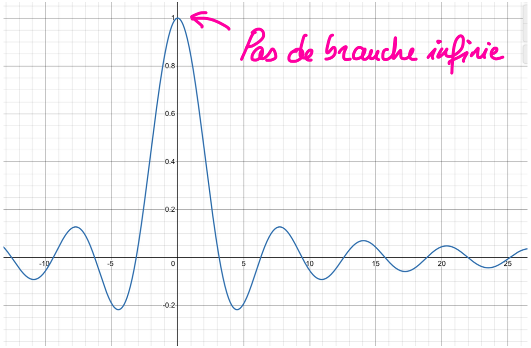
(Ox) est A.H à C_f en $\pm\infty$.

Position relative : $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{x \to +\infty \\ \to 0^-}} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0^+} \quad \text{si } x > 0$$

☹

Il n'y a pas de position relative.



Pas de branche infinie

$$\lim_{0} g(x) = \lim_{0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$= \lim_{0} \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Pas de branche infinie}$$

$$C_g \to \left(0\,;\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} \underbrace{(1-\cos x)}_{\text{bornée}} = 0 \Rightarrow$$

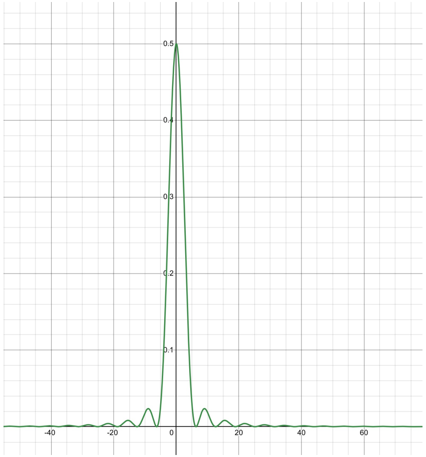
C_g admet (Ox) comme A.H en $\pm\infty$. (g paire)

Position relative : $-1 \leq -\cos x \leq 1$

$$0 \leq 1-\cos x \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0^+}$$

C_g est au-dessus de (Ox)



5. La fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\lim_{0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \longrightarrow \text{L'Hospital}$$

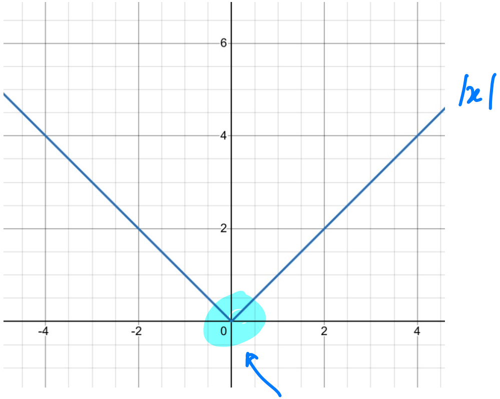
$$= \lim_{0} \frac{2x\,1/2\sqrt{x^2}}{1} = \lim_{0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

De plus $\dfrac{x'}{(\sqrt{x^2})'} = \dfrac{1}{2x\,1/\cancel{2}\sqrt{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \longrightarrow$ Boucle infinie.

$$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{|x|}{x} \quad \begin{cases} \lim_{0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

$\lim_{0} f(x)$ n'existe pas

$\lim_{0} \dfrac{|x|}{x} = \lim_{0} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} \longleftarrow$ nombre dérivé en 0 de $|x|$.



Outils mathématiques 1 — TD 7 : Continuité, dérivabilité et fonctions réciproques

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Donner une approximation à 10^{-2} près des solutions de l'équation $x^2 = -\ln(x)$.
2. Prolonger par continuité chacune des fonctions $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de leurs prolongements par continuité.

1. $f(x) = x^2 + \ln(x)$ Je cherche $x_0 / f(x_0) = 0$.

① $D_f = ?$
② $f'(x) \Rightarrow$ variations
③ limites
④ Tableau

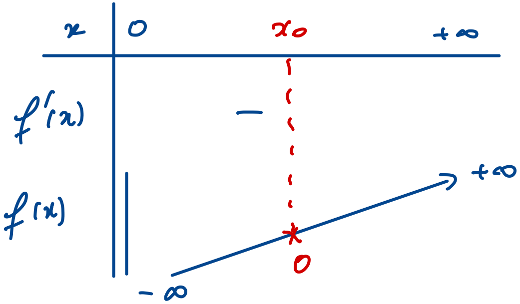
① $D_f =]0;+\infty[$

② $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante

③ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \underset{0}{x^2} + \overset{-\infty}{\ln x} = -\infty.$

④.



$f(1) = (1)^2 + \ln(1) = 1$ $x_0 \in]0;1[$

$f(0,5) = -0,44$ $x_0 \in]0,5;1[$

$f(0,75) = 0,27 > 0$ $x_0 \in]0,5;0,75[$

$f(0,65) = -0,008\ldots$ $x_0 \in]0,65;0,75[$

$f(0,66) = 0,02$ $x_0 \in]0,65;0,66[$

$x_0 \simeq 0,66$

2. Prolonger par continuité chacune des fonctions $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de leurs prolongements par continuité.

$D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= D_g$

j'essaie de prolonger f et g en 0.

$\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \underset{0}{x}\,\underbrace{\sin(1/x)}_{\text{bornée}} = 0$

$\lim\limits_{0} g(x) = \lim\limits_{0} \underset{0}{x^2}\,\underbrace{\sin(1/x)}_{\text{bornée}} = 0.$

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Dérivabilité : en 0

$\lim\limits_{0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0} \frac{x\sin(1/x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{0} \sin(1/x)$

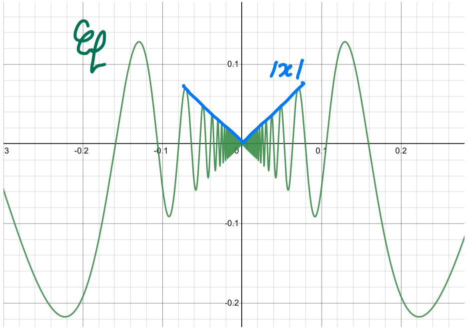
x ne vaut pas zéro.

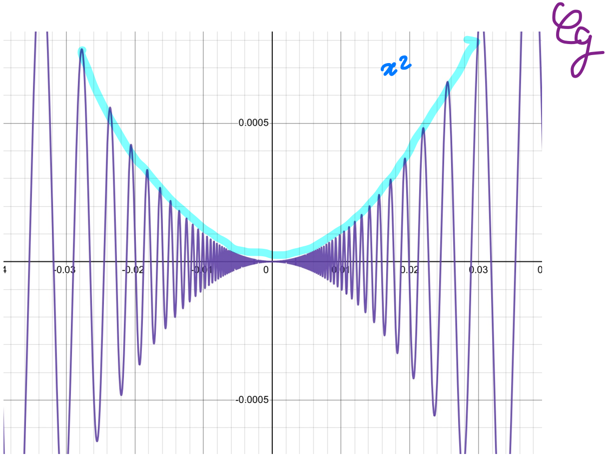
n'existe pas

→ $\tilde{f}$ n'est pas dérivable

$$\lim_{0} \frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = \lim_{0} \frac{x^2\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim_{0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=0$$

$\tilde{g}$ est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0)=0$





3. Lorsque c'est possible, prolonger par continuité les fonctions suivantes :

(a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ (b) $g(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$

(a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{0+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}\}$

f est 2π-périodique $\qquad I=[-\pi;\pi]\setminus\{0\}$

Et f est impaire $\Rightarrow I=]0;\pi]$

$$\lim_{0^+}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{"0"}{0} \rightarrow \text{L'Hospital}$$

$$=\lim_{0^+}\frac{\overset{\to 1}{\boxed{\cos x}}}{\underset{\to 0^+}{\boxed{\sin x}}} = +\infty.$$

$\Rightarrow$ f n'est pas prolongeable en $x=0$.

(b) $g(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$

$D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$\uparrow$

prolongeable ?

$$\lim_{1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \text{“}\infty - \infty\text{”}$$

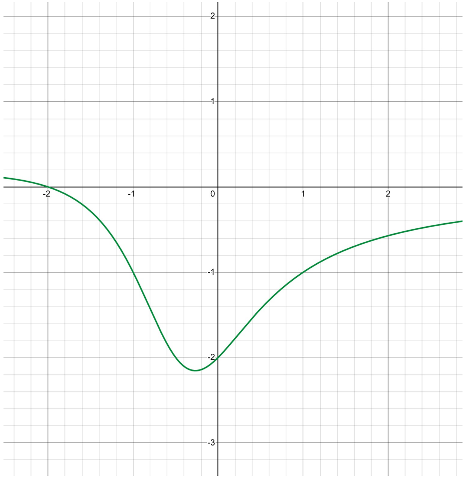
$$= \lim_{1} \frac{1-x^3 - 3(1-x)}{(1-x)(1-x^3)} = \frac{\text{“}0\text{”}}{\text{“}0\text{”}} \longrightarrow \text{L'Hospital.}$$

$$= \lim_{1} \frac{-x^3+3x-2}{x^4-x^3-x+1} = \lim_{1} \frac{-3x^2+3}{4x^3-3x^2-1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \rightarrow \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{1} \frac{-6x}{12x^2-6x} = \frac{-6}{6} = -1.$$

$\tilde{g}$ prolonge g en $x = 1$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$



4. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par morceaux par

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x < 1 \\ x^2-1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

① Continuité en $x = 1$

f continue en $1 \Longleftrightarrow \lim_{1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{1} f(x) = ? \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{1^+} x^2-1 = 0 \\ \qquad\qquad\quad = \\ \lim_{1^-} x-1 = 0 \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow \lim_{1} f(x) = 0$

De plus $f(1) = 1^2 - 1 = 0$

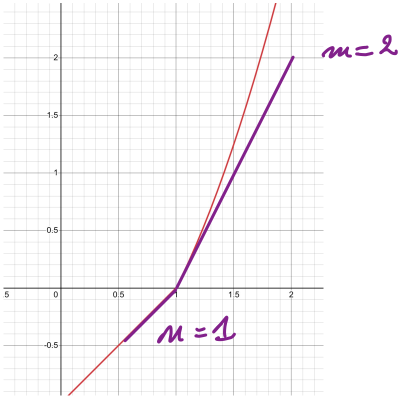
$\lim_{1} f(x) = f(1) \Longleftrightarrow f$ est continue en 1.

② $$\lim_{1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = ?$$

$$\lim_{1^+} \frac{x^2-1 \ -0}{x-1} = \lim_{1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{1^+} x+1 = 2$$

$$\lim_{1^-} \frac{x-1 \ -0}{x-1} = \lim_{1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en 2.



5. À l'aide des formules de dérivées usuelles, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$
2) $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+1}$
3) $f(x) = \exp\left[\tan\left(x^2+1\right)\right]$
4) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$
5) $f(x) = \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)$
6) $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$
7) $f(x) = \arctan(3x)$
8) $f(x) = \arctan(\cancel{3x}\, x^3)$
9) $f(x) = \arccos(2x+1)$
10) $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$
11) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

$$\left[\arctan(x)\right]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[\arccos(x)\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\arcsin(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5 → Correction lundi prochain.

$$(u\circ v\circ w)' = w' \times v'\circ w \times u'\circ v\circ w$$

6. Remplir le tableau ci-dessous :

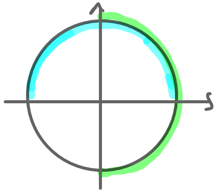
x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}$
● $\arccos(x)$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$		$\pi/4$	$\pi/6$	0	
● $\arcsin(x)$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$		$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	
● $\arctan(x)$	$-\pi/4$				0		$\pi/6$			$\pi/4$	$\pi/3$

$\arccos(x) = ?$ Quel est l'angle de $[0;\pi]$ qui a pour cosinus x ?

$\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$

$\arcsin(x) : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\arctan(x) : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$



Outils mathématiques — TD 8 : Primitives et intégrales #1

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Partie 1

1. On considère la figure 1. Calculer la surface teintée en rouge sachant que $f(x) = \frac{1}{5x}$ et $g(x) = -x^2 + 0,2x + 1$.

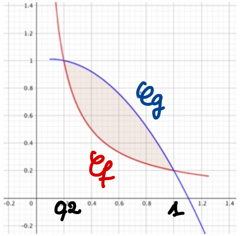


FIGURE 1 : Aire à calculer

$$A = \int_{0,2}^{1} g(x)\,dx - \int_{0,2}^{1} f(x)\,dx = \int_{0,2}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{0,2}^{1} \left(-x^2 + 0,2x + 1 - \frac{1}{5x}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 0,1x^2 + x - \frac{1}{5}\ln|x|\right]_{0,2}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} + 0,1 \times 1^2 + 1 - \frac{1}{5}\ln(1) + \frac{(0,2)^3}{3} - 0,1 \times (0,2)^2 - 0,2 + \frac{1}{5}\ln(0,2)$$

$$= \frac{212}{375} + \frac{\ln(0,2)}{5} \simeq 0,243\ u_A$$

2. Déterminer la primitive F de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - \frac{4}{x^2}$ telle que $F(1) = -1$.
3. Déterminer la primitive G de la fonction $g(t) = 3 \cdot \cos(3t)$ telle que $G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

2. $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{4}{x} + K$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\quad x^n \longrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad \sqrt{x} = x^{1/2}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

$F(1) = -1 = \frac{1}{3} + 1 + 4 + K \Rightarrow K = -\frac{19}{3}$

$$\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{4}{x} - \frac{19}{3}}$$

3. $g(t) = 3\cos(3t)$

$u'u^n$

$v' \times u' \circ v \leftarrow$

$\begin{cases} u' = \cos(t) \\ v = 3t \end{cases} \Rightarrow v' = 3$ $\quad$ CQJSI $= v' \times u' \circ v = 3\cos(3t)$

$\Rightarrow g(t) = v' \times u' \circ v \Rightarrow G(t) = u \circ v(t) + k = \sin(3t) + k.$

$G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 = \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)}_{=1} + k \Rightarrow k = 0$

$$\Rightarrow \boxed{G(t) = \sin(3t)}$$

Partie 2

Rechercher les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ **2)** $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ **3)** $f(x) = \sin x - 2\cos x$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ **5)** $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$ **6)** $f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$

1) $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + x + k$ $k \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} + k$

3) $F(x) = -\cos x - 2\sin x + k$

4) $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} + k$ $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

5) $F(x) = x - \tan x + k$

6) $\cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$ $v' \times u' \circ v$ $\underline{H:}$ $v = \frac{x-\pi}{4}$ $u' = \cos(x).$

$\Rightarrow v' = \frac{1}{4}$

$v' \times u' \circ v = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right) = $ CQSSI

$\Rightarrow f(x) = 4\, v' \times u' \circ v \Rightarrow F(x) = 4\, u \circ v(x) + k = 4 \sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) + k$

$u' u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$v' \times u' \circ v \longrightarrow u \circ v$

$6^{bis})$ $f(x) = 5x \sin(x^2+1)$

2 identifications et 1 calcul.

$\begin{cases} v(x) = x^2+1 \\ u' = \sin(x) \end{cases}$ $v' = 2x$

$v' \times u' \circ v = 2x \sin(x^2+1)$ $\Rightarrow f(x) = \frac{5}{2}\, v' \times u' \circ v(x)$

mon savoir-faire
CQSSI

$F(x) = \frac{5}{2}\, u \circ v(x) + k$

$= \frac{5}{2}\left(-\cos(x^2+1)\right) + k$

$= -\frac{5}{2}\cos(x^2+1) + k$

$6^{ter})$ $f(x) = 2x^3 \exp(x^4+7)$

$\begin{cases} v = x^4+7 \\ u' = e^x \end{cases}$ $\Rightarrow v' = 4x^3$

$\Rightarrow v' \times u' \circ v = 4x^3 e^{x^4+7}$

$$f(x) = \frac{1}{2} v' \times u' \circ v \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \overset{\nearrow}{u} \circ v + K = \frac{1}{2} \exp(x^4+7) + K.$$

$u = e^x$

7) $f(x) = (x-9)^3$ 8) $f(x) = \sin x \cos^2 x$ 9) $f(x) = x\left(x^2+1\right)^2$

10) $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$ 11) $f(x) = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$ 12) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

13) $f(x) = \frac{x}{(x^2+3)^3}$ 14) $f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3$ 15) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

7) $f(x) = (x-9)^3$

$n = 3$

$u = x - 9$

$\Rightarrow u' = 1 \quad \Rightarrow \boxed{u'u^n} = 1(x-9)^3$

$$f(x) = \boxed{1}\,\boxed{u'u^n} \Rightarrow F(x) = \boxed{1}\,\boxed{\frac{u^{n+1}}{n+1} + K} = \frac{(x-9)^4}{4} + K.$$

8) $f(x) = (\sin x)(\cos x)^2$

$n = 2$

$u = \cos x$

$\Rightarrow u' = -\sin x \quad \Rightarrow \boxed{u'u^n = -\sin x \cdot \cos^2 x}$

$$f(x) = \boxed{-1}\,\boxed{u'u^n} \Rightarrow F(x) = -1\frac{u^{n+1}}{n+1} + K = -\frac{\cos^3 x}{3} + K.$$

9) $f(x) = x(x^2+1)^2$

$n = 2$

$u = x^2 + 1$

$\Rightarrow u' = 2x \quad \Rightarrow u'u^n = \underline{2x(x^2+1)^2}.$

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{2}}\,\boxed{u'u^n} \Rightarrow F(x) = \boxed{\frac{1}{2}}\frac{u^{n+1}}{n+1} + K$$

cte

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^3}{3} + K$$

$$= \frac{(x^2+1)^3}{6} + K.$$

10) $f(x) = x^{-2}(1+x^{-1})^4 = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$

$n = 4$

$u = 1 + x^{-1}$

$\Rightarrow u' = -1x^{-2}$

$\Rightarrow$ cqjsi$(x) = u'u^n = -x^{-2}(1+x^{-1})^4$

$$f(x) = \boxed{-1}\,\underbrace{u'u^n}_{} \Rightarrow F(x) = \boxed{-1}\,\frac{u^{n+1}}{\underbrace{n+1}_{}} + K$$

$$= \boxed{-1}\,\frac{(1+1/x)^5}{5} + K$$

11) $f(x) = x^{-1/2}\left(x^{1/2}+1\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)^2$

$n=2$

$u=\sqrt{x}+1$ $\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow u'u^n = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x+1}\right)^2$

$f(x) = 2u'u^n \Rightarrow F(x) = 2\frac{u^{n+1}}{n+1}+k = 2\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{3}+k$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^3+k.$

12) $f(x) = \sin x \cos^{-2} x$

$n=-2$

$u=\cos x$ $\Rightarrow u' = -\sin x$

$\Rightarrow u'u^n = -\sin x \cos^{-2} x$

$f(x) = -u'u^n \Rightarrow F(x) = -\frac{u^{n+1}}{n+1}+k \Rightarrow F(x) = -\frac{\cos^{-1}(x)}{-1}+k$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\cos(x)}+k$

13) $f(x) = \frac{x}{(x^2+3)^3} = x\left(x^2+3\right)^{-3}$

$n=-3$

$u=x^2+3$

$\Rightarrow u' = 2x$ $\Rightarrow u'u^n = 2x\left(x^2+3\right)^{-3}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}u'u^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+3)^{-2}}{-2}+k =$

$= -\frac{1}{4(x^2+3)^2}+k$

14) $f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^3} = x^3\left(x^4+1\right)^{-3}$

$n=-3$

$u=x^4+1$

$\Rightarrow u' = 4x^3$ $\Rightarrow u'u^n = 4x^3\left(x^4+1\right)^{-3}$

$f(x) = \frac{1}{4}u'u^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\,\frac{(x^4+1)^{-2}}{-2}+k$

$= -\frac{1}{8(x^4+1)^2}+k.$

15) $f(x) = \cos x \left(2+\sin x\right)^{-1/2}$

$n = -1/2$

$u = 2+\sin x$

$\Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow u'u^n = \cos x\left(2+\sin x\right)^{-1/2}$

$= f(x)$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\left(2+\sin x\right)^{1/2}}{1/2} + k = 2\sqrt{2+\sin x} + k.$$

Partie 3 : polynômes

1. Effectuer la division euclidienne des polynômes suivants et, lorsque le reste est nul, déterminer l'ensemble des racines de $P(x)$.
   (a) $P(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$ par $x - 2$
   (b) $P(x) = x^3 + 3x - 2i$ par $x - i$
   (c) $P(x) = 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15$ par $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - 16x + 20 & x-2 \\
\cline{2-2}
-\left(x^3 - 2x^2\right) & x^2+3x-10 \\
\cline{1-1}
0 + 3x^2 - 16x + 20 & \\
-\left(3x^2 - 6x\right) & \\
\cline{1-1}
0 - 10x + 20 & \\
-\left(-10x + 20\right) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$x^3+x^2-16x+20 = (x-2)\cdot(x^2+3x-10) + 0$

$\Rightarrow$ 2 est racine de P.

$x^2+3x-10 = (x-a)(x-b)$

$\Delta = 9+4\times10 = 49 = 7^2$

$$\begin{cases} x_1 = a = \dfrac{-3-7}{2} = -5 \\ x_2 = b = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \end{cases}$$

$P(x) = (x-2)(x+5)(x-2) = (x-2)^2(x+5)$

$2 (2) \in \mathbb{R}$ $\quad$ $-5 (1) \in \mathbb{R}.$

Polynômes à coefficients réels : ils admettent les racines complexes par couples de conjugués.

↳ NE s'applique pas au le (b)

$$\begin{array}{l|l}
\text{(b)}\quad x^3 + 0x^2 + 3x - 2i & x-i \\
\cline{2-2}
-\left(x^3 - ix^2\right) & x^2+ix+2 \\
\cline{1-1}
ix^2 + 3x - 2i & \\
-\left(ix^2 + x\right) & \\
\cline{1-1}
2x - 2i & \\
-\left(2x - 2i\right) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

STOP quand deg(R) < 1

↳ $ix \times (-i) = -i^2x = -(-1).x = x$

$\Rightarrow x^3+3x-2i = (x-i)(x^2+ix+2)$

$i (1) \in \mathbb{C}$

$Q(x) = x^2 + ix + 2$

$\Delta = i^2 - 4\times 2\times 1 = -1-8 = -9 = (3i)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-i-3i}{2} = -2i \\ x_2 = \dfrac{-i+3i}{2} = i \end{cases}$$

$P(x) = (x-i)(x+2i)(x-i) = (x-i)^2(x+2i)$

(c) $P(x) = 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15$ par $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

$$\begin{array}{l|l} 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 \\ \hline -(3x^5 - 9x^4 + 3x^3 \quad + 12x) & 3x + 3 \\ 0 + 3x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 8x + 15 & \\ \quad -(3x^4 - 9x^3 + 3x^2 \quad + 12) & \\ \quad 0 + 0 + 5x^2 - 8x + 3 \quad \underline{STOP} & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 3x + 3 + \frac{5x^2 - 8x + 3}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}$$

Q: Comment trouver les racines d'un polynôme ?

$\Rightarrow$ Je sais trouver les racines de P pour $\deg P \leq 2$

① Je connais une ou plusieurs racines.

② Je connais la multiplicité des racines.

2. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ admet le nombre 1 comme racine double. En déduire une autre racine.

$1(2) \in \mathbb{R}$ $\quad N = \deg P = 3$

Wanted: $\quad b \in \mathbb{R}$

$P(x) = (x-1)^2(x-b) \Rightarrow x - b = \dfrac{P(x)}{(x-1)^2}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2 + x) & x + 3 \\ \quad 3x^2 - 6x + 3 & \\ \quad -(3x^2 - 6x + 3) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x-1)^2(x+3) \Rightarrow 1(2)$ et $-3(1)$ sont racines de P.

3. Trouver les racines de $P(x) = x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320$ sachant qu'il admet une **racine triple**.

4 racines dans $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $a\,(3) \in \mathbb{R}$
$b\,(1) \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ P''(a) = 0 \\ P^{(3)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

<u>Stratégie :</u> ① $P \rightarrow P''$

② Racines de P'' $\rightarrow$ a et ~~b~~

③ Je choisis la bonne racine

④ $x - b = \dfrac{P(x)}{(x-a)^3}$

①. $P'(x) = 4x^3 - 21x^2 - 24x + 176$

$P''(x) = 12x^2 - 42x - 24 = 6(\underbrace{2x^2 - 7x - 4})$

② $\Delta = 49 + 4 \times 4 \times 2 = 81 = 9^2$

$r_1 = \dfrac{+7-9}{4} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $r_2 = \dfrac{+7+9}{4} = 4.$

③ $P'(-1/2) \neq 0$ $\qquad$ $P'(4) = 0$

n'est pas b.

$\Rightarrow a = 4$

④ $\dfrac{P(x)}{(x-4)^3}$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(x-4)^3 = x^3 + 3x^2(-4) + 3x(-4)^2 + (-4)^3$

$= x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320 & x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \\ \hline -(x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x) & x + 5 \\ \hline 0 + 5x^3 - 60x^2 + 240x - 320 & \\ -(5x^3 - 60x^2 + 240x - 320) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P(x) = (x-4)^3(x+5)$ $\Rightarrow$ $4\,(3)$ et $-5\,(1)$ sont racines de $P(x)$.

Partie 4 : fractions rationnelles

1. **Éléments simples de 1ère espèce** — Décomposer en éléments simples dans ℝ les fractions rationnelles suivantes, et en donner les primitives.

$$\text{(a)}\ \frac{1}{(x-1)(x+2)}\ ;\quad \text{(b)}\ \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}\ ;\quad \text{(c)}\ \frac{x^5+5x^2+3x+4}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{(d)}\ \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x+3)}\ ;\quad \text{(e)}\ \frac{x}{(x+1)^2(x-1)}$$

① deg N < deg D   M = deg D

② Pôles

③ Écriture décomposée

④ Identification.

Partie fractionnaire.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

① $0 < 2$ $M = 2$

② $1\ (1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1$ ES1

$-2\ (1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1$ ES1

③ $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$

④ **Astuce #1 :**

Si p simple ∈ ℝ associé à A alors $A = \lim\limits_{p} (x-p) f(x)$

$$\lim_{1} \underbrace{\frac{A}{\cancel{x-1}}\cancel{(x-1)}}_{A} + \underbrace{\frac{B(x-1)}{x+2}}_{0} = \lim_{1} (x-1) f(x)$$

$$A = \lim_{1} \cancel{(x-1)} \frac{1}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 1/3$$

$$B = \lim_{-2} (x+2) f(x) = \lim_{-2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow B = -1/3$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + k.$$

(b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$

① $1 < 2$? oui $\boxed{M=2}$

② Pôles : $3\ (1) \in \mathbb{R}$

$-1\ (1) \in \mathbb{R}$ → 1 Élément simple de 1ère espèce

③ $f(x) = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1}$

(a) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$; (b) $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$; (c) $\dfrac{x^5+5x^2+3x+4}{(x-1)(x+2)}$

④ $A = \lim\limits_{3} (x-3) f(x) = \lim\limits_{3} \dfrac{3x-1}{x+1} = 2 = A$

$B = \lim\limits_{-1} (x+1) f(x) = \lim\limits_{-1} \dfrac{3x-1}{x-3} = \dfrac{-4}{-4} = 1 = B.$

astuce #1

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}$$

Rq: $f(x) = \dfrac{2(x+1)+1(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{2x+2+x-3}{(x-3)(x+1)}$

$= \dfrac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$ 😉

$$\Rightarrow F(x) = 2\ln|x-3| + 1\ln|x+1| + K$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^5+5x^2+3x+4}{(x-1)(x+2)}$

① $5<2$? Non!

↳ La décomposition doit être précédée d'une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^5 + \qquad 5x^2+3x+4 & x^2+x-2 \\ \hline 9x+4 & x^3-x^2+3x \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + \frac{9x+4}{(x-1)(x+2)}$$

g(x) à décomposer

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + G(x) + K$$

Je pose $g(x) = \dfrac{9x+4}{(x-1)(x+2)}$ et je décompose g.

① $\deg N < \deg D$? Oui $M = 2$

② Pôles : $1(1) \in \mathbb{R}$

$-2(1) \in \mathbb{R}$.

$2 = M$ je n'ai rien oublié.

③ $g(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$

④ $A \longrightarrow$ astuce # 1

$B \longrightarrow$ astuce # 1.

$$A = \lim_{1} (x-1)\, G(x) = \lim_{1} \frac{9x+4}{x+2} = \frac{13}{3} = A$$

$$B = \lim_{-2} (x+2)\, G(x) = \lim_{-2} \frac{9x+4}{x-1} = \frac{-14}{-3} = \frac{14}{3} = B.$$

$$\boxed{f(x) = x^3 - x^2 + 3x + \frac{13}{3}\,\frac{1}{x-1} + \frac{14}{3}\,\frac{1}{x+2}}$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{3}\ln|x-1| + \frac{14}{3}\ln|x+2| + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

(d) $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x+3)}$; (e) $\dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x+3)} = \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)(x+3)}$

① $2 < 3 = M$

② $1(1) \in \mathbb{R}$

$-1(1) \in \mathbb{R}$

$-3\,(1) \in \mathbb{R}$

③ $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+3}$

④ $$A = \lim_{1} (x-1) f(x) = \lim_{1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x+3)} = \frac{3}{8}$$

$$B = \lim_{-1} (x+1) f(x) = \lim_{-1} \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$C = \lim_{-3} (x+3) f(x) = \lim_{-3} \frac{x^2+x+1}{x^2-1} = \frac{7}{8} = C$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{8}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{7}{8}\,\frac{1}{x+3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{8}\ln|x+3| + k$$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)}$

① $1 < 3 = M$

② $1(1) \in \mathbb{R}$ ● $\qquad$ 1 ES 1

$-1(2) \in \mathbb{R}$ ● $\longrightarrow$ 2 ES 1

③ $$f(x) = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

A#3 $\qquad$ A#2 $\qquad$ A#1

④ $$B = \lim_{1} (x-1) f(x) = \lim_{1} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} = B.$$

$$A_2 = \lim_{-1} (x+1)^2 f(x) = \lim_{-1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{+\infty} x f(x) = A_1 + 0 + B = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}\,1}{x^{\cancel{3}}} = 0 \Rightarrow A_1 + B = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = -B = -1/4$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1}}$$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \ln|x-1| + k$$

Exo sup: $F(x) = \dfrac{4x^2 - 13x + 12}{(x-2)^2(x-1)}$

$A_1 = 1$
$A_2 = 2$
$B = 3$

2. **Éléments simples de 2ème espèce** — Décomposer en éléments simples[1] dans $\mathbb{R}$:

$$\text{(a)}\ \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+x+1)}\ ;\quad \text{(b)}\ \frac{1}{x^2(x^2+1)}\ ;\quad \text{(c)}\ \frac{1}{x^3(x^2+1)}$$

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-2)(x^2+x+1)}$

① $2 < 3$? oui $\qquad M = 3$

② Pôles: $2(1) \in \mathbb{R} \longrightarrow 1$ ES 1

couple $(1) \in \mathbb{C}. \longrightarrow 1$ ES 2

③ $$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1 x + B_2}{x^2+x+1}$$

A#1 $\qquad$ A#3 et A#4

④ A#1

$$A = \lim_{2} (x-2) f(x) = \lim_{2} \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{5}{7} = A$$

A#3

* $\lim\limits_{+\infty} x f(x) = A + B_1 = \lim\limits_{+\infty} \frac{x^3+\dots}{x^3+\dots} = 1 \Rightarrow A + B_1 = 1$

$\Rightarrow B_1 = 1 - A = \frac{2}{7}$

A#4

* $f(0) = -\frac{A}{2} + B_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{A}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{14} - \frac{7}{14} = -\frac{2}{14}$

$B_2 = -\frac{1}{7}$

$$\boxed{f(x) = \frac{5}{7}\,\frac{1}{x-2} + \frac{1}{7}\,\frac{2x-1}{x^2+x+1}}$$

$$\frac{2x-1}{x^2+x+1} = \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}_{\text{immédiate } \frac{u'}{u}} - \underbrace{\frac{2}{x^2+x+1}}_{\text{Changement de variable}}$$

RV feuille #9.

2. **Éléments simples de 2ème espèce** — Décomposer en éléments simples[1] dans ℝ :

$$\text{(a) } \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+x+1)} \; ; \quad \text{(b) } \frac{1}{x^2(x^2+1)} \; ; \quad \text{(c) } \frac{1}{x^3(x^2+1)}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)}$ est paire

$\boxed{1}$ $0 < 4 = n$

$\boxed{2}$ $0(2) \in \mathbb{R}$ → 2 ES1

1 couple $(i) \in \mathbb{C}$ → 1 ES2

$\boxed{3}$ $f(x) = \cancel{\frac{A_1}{x}} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{\cancel{B_1}x + B_2}{x^2+1}$

parité

A#2 → $\lim\limits_{0} x^2 f(x) = A_2 = \lim\limits_{0} \frac{1}{x^2+1} = 1$

A#3 → $\lim\limits_{\infty} x^2 f(x) = A_2 + B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = -1$

$k = 2$

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$

Rq: $f(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)}$

$= \frac{\cancel{x^2+1}\ 1}{\cancel{(x^2+1)}x^2} - \frac{\cancel{x^2}\ 1}{\cancel{x^2}(x^2+1)}$

Rq: $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$

$F(x) = -\frac{1}{x} - \arctan(x) + K.$

(c)

(c) $\frac{1}{x^3(x^2+1)} = f(x)$ est impaire

① OK5? oui $n=5$

② Pôles: $0(3) \in \mathbb{R} \to 3$ ES1
1 couple (1) de $\mathbb{C} \to 1$ ES2

③ $f(x) = \frac{A_1}{x} + \cancel{\frac{A_2}{x^2}} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1 x + \cancel{B_2}}{x^2+1}$

A#2

pairs

puis A#3 puis A#4 ~~f(1)~~ f(1).

4. A#2 → $A_3 = \lim_{0} x^3 f(x) = 1 = A_3$

A#3 → $\lim_{\infty} x f(x) = A_1 + 0 + B_1 = \lim_{\infty} \frac{x}{x^5+\dots} = 0.$

$A_1 + B_1 = 0$

A#4 → $f(1) = A_1 + A_3 + \frac{B_1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} A_1 + \frac{B_1}{2} = -1/2 \\ A_1 + B_1 = 0 \end{cases}$$

$B_1 = 1$

$A_1 = -1$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2+1}}$$

$F(x) = -\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K$

3. Rechercher des primitives des fractions rationnelles suivantes :

16) $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ **17)** $f(x) = \frac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$ **18)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x}{4}$

19) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ **20)** $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2}$ **21)** $f(x) = \frac{1}{(x+2)^5}$

16) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$

$2<2$? Non → Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -(x^2-2x+1) & 1 \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

$f(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 - 1(x-1)^{-2}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = x + \dfrac{1}{x-1} + K}$

NB:

$f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$

17) $f(x) = \dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{x^2+6x+9}$

$3<2$? Non → division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+13x^2+24x+2 & x^2+6x+9 \\ \cline{2-2} -(2x^3+12x^2+18x) & 2x+1 \\ \cline{1-1} 0+x^2+6x+2 & \\ -(x^2+6x+9) & \\ \cline{1-1} -7 & \end{array}$$

$f(x) = 2x+1 + \dfrac{-7}{(x+3)^2} = 2x+1 - 7(x+3)^{-2}$

$\boxed{F(x) = x^2 + x + \dfrac{7}{x+3} + K}$

16) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ **17)** $f(x) = \dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$ **18)** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{3x}{4}$

19) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ **20)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$ **21)** $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^5}$

18) $F(x) = \ln|x^2+1| + \dfrac{3}{8}x^2 + K$

19) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1+x-x}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

$F(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + K = \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + K$

21) $f(x) = (x+2)^{-5} \Rightarrow F(x) = \dfrac{(x+2)^{-4}}{-4} + k = -\dfrac{1}{4(x+2)^4} + k$

20) $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$ $\quad 0 < 4 \quad n = 4$

$0(2) \in \mathbb{R}$ et $-1(2) \in \mathbb{R}$

$\rightarrow f(x) = \dfrac{A_1}{x} + \underset{\substack{\uparrow \\ A\#2}}{\dfrac{A_2}{x^2}} + \dfrac{B_1}{x+1} + \underset{\substack{\uparrow \\ A\#2}}{\dfrac{B_2}{(x+1)^2}}$

$\rightarrow$ A#3 puis A#4 ~~$f(0)$~~ $f(1)$

$A_2 = \lim\limits_{0} x^2 f(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 1 = A_2$

$B_2 = \lim\limits_{-1} (x+1)^2 f(x) = \lim\limits_{-1} \dfrac{1}{x^2} = 1 = B_2$

$\lim\limits_{\infty} x f(x) = A_1 + 0 + B_2 + 0 = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{x^4} = 0 \Rightarrow A_1 + B_1 = 0$

Enfin $f(1) = A_1 + A_2 + \dfrac{B_1}{2} + \dfrac{B_2}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow A_1 + 1 - \dfrac{A_1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{A_1}{2} = -1 \Rightarrow A_1 = -2$

$\Rightarrow B_1 = -A_1 = 2$

$\Rightarrow f(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = -2\ln|x| - \dfrac{1}{x} + 2\ln|x+1| - \dfrac{1}{x+1} + k}$

Outils mathématiques 1 — TD 9 : Primitives et intégrales #2

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Déterminer les primitives de $f(x) = \tan(x)$.

2. Calculer, en intégrant par parties, $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ et $I_2 = \int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

Méthode en 4 étapes pour l'IPP:

$\boxed{1}$ Je fais apparaître pour $f(x)$ un produit de 2 fonctions.

$\boxed{2}$ Je choisis v la fonction à dériver (déri-V).

↳ aide (ALPES).

$\boxed{3}$ Schéma visuel → u et v'

$\boxed{4}$ J'applique $I = [uv]_a^b - \int_a^b u v' dx$

↑ Crochet à calculer

1. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{u'}{u} \Rightarrow F(x) = -\ln|\cos(x)| + K$

2. $f(x) = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

$\boxed{1}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x) = x^{-1/2}\ln(x)$

$\boxed{2}$ $v(x) = \ln(x)$

$\boxed{3}$

$$\begin{tikzcd} u' = x^{-1/2} \arrow[r] & u = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} \\ v' = 1/x & v = \ln x \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\boxed{4}$ $I = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx$

$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$I = 2\sqrt{e} - 0 - 2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

STOP IPP

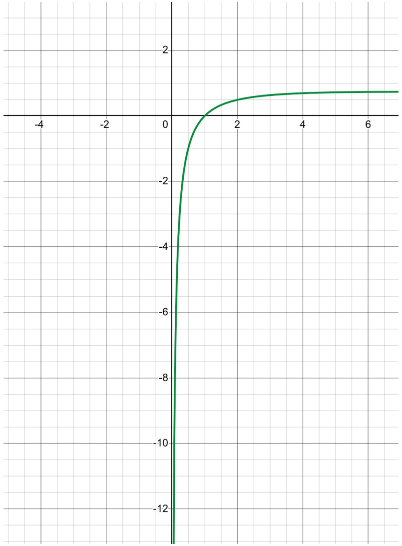
↑ forme immédiate

$I = 2\sqrt{e} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^e = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4\sqrt{1}$

$I = 4 - 2\sqrt{e} \simeq 0,703$ uA

$$I_2 = \int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$[0;e]$ ou $]0;e[$



$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$I_2 = 2\sqrt{e} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\varepsilon}\ln\varepsilon}_{\to 0} - 4\sqrt{e} + \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} 4\sqrt{\varepsilon}}_{\to 0} = -2\sqrt{e}$$

$I_2 \simeq -3{,}30$ uA.

3. Intégrer par parties :

$$\textbf{1)}\ I = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \textbf{2)}\ J = \int_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

$$\textbf{3)}\ K = \int_0^{1/2} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x)\,dx \qquad \textbf{4)}\ L = \int_0^{\pi/4} \exp(3x)\sin(2x)\,dx$$

1). $I = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

$\boxed{1}$ $f(x) = x \times \frac{1}{\cos^2 x}$

$\boxed{2}$ $v(x) = x$

$\boxed{3}$ $u' = \frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow u = \tan x$

$v' = 1 \longleftarrow v = x$

$\boxed{4}$ $I = \left[x \tan x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

Calculé en 1)

$= \frac{\pi}{4} \cdot 1 - 0 \times 0 + \left[\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4}$

$I = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 0{,}432$ uA

$$2)\quad I=\int_0^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

$$\boxed{1}\quad f(x) = x \times \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\boxed{2}\quad v(x) = x$$

$$\boxed{3}\quad u' = \sin x\cos^{-3}x \longrightarrow u = -\frac{\cos^{-2}(x)}{-2} = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$v' = 1 \longleftarrow v = x$$

$$I = \left[\frac{x}{2\cos^2 x}\right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3}\frac{1}{2\cos^2 x}\,dx$$

$$= \frac{\pi/3}{2(1/2)^2} - 0 - \frac{1}{2}\left[\tan x\,dx\right]_0^{\pi/3}$$

$$I = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

3. Intégrer par parties :

$$\textbf{1)}\ I = \int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \textbf{2)}\ J = \int_0^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

$$\textbf{3)}\ K = \int_0^{1/2}(3x^2-6x+1)\ln(1-x)\,dx \qquad \textbf{4)}\ L = \int_0^{\pi/4}\exp(3x)\sin(2x)\,dx$$

$$3)\quad \boxed{1}\quad f(x) = (3x^2-6x+1)\times\ln(1-x)$$

$$\boxed{2}\quad v(x) = \ln(1-x)$$

$$\boxed{3}\quad u' = 3x^2-6x+1 \longrightarrow u = x^3-3x^2+x$$

$$v' = \frac{-1}{-x+1} \longleftarrow v = \ln(1-x)$$

$$\boxed{4}\quad K = \underbrace{\left[(x^3-3x^2+x)\ln(1-x)\right]_0^{1/2}}_{-1/8\ln(1/2)\,=\,\frac{1}{8}\ln(2)} + \underbrace{\int_0^{1/2}(x^3-3x^2+x)\left(\frac{1}{-x+1}\right)dx}_{J}$$

$$K = \frac{1}{8}\ln(2) + J \quad \text{avec} \quad J = \underbrace{\int_0^{1/2}\frac{x^3-3x^2+x}{-x+1}\,dx}_{}$$

Fraction rationnelle
deg N < deg D ? Non
⟹ Division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 + x & -x+1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & -x^2 + 2x + 1 \\ \quad -2x^2 + x & \\ -(-2x^2 + 2x) & \\ \quad -x & \\ -(-x+1) & \\ \quad -1 & \end{array}$$

$$J = \int_0^{1/2} \left(-x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{-x+1} \right) dx$$

$$J = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \ln|-x+1| \right]_0^{1/2} = \frac{17}{24} + \ln(1/2)$$

$$= \frac{17}{24} - \ln(2)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{8}\ln(2) + \frac{17}{24} - \ln(2) = \boxed{\frac{17}{24} - \frac{7}{8}\ln(2) = K}$$

4) $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \exp(3x)\sin(2x)\,dx$

IPP: $u' = \sin(2x) \longrightarrow u = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$v' = 3e^{3x} \longleftarrow v = e^{3x}$

$$L = \underbrace{\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)e^{3x} \right]_0^{\pi/4}}_{0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/4} e^{3x}\cos(2x)\,dx}_{M}$$

$$M = \int_0^{\pi/4} e^{3x}\cos(2x)\,dx \longrightarrow \text{Re-IPP}$$

⚠ Ne pas changer v !

$u' = \cos(2x) \longrightarrow u = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$v' = 3e^{3x} \longleftarrow v = e^{3x}$

$$M = \underbrace{\left[\frac{1}{2}\sin(2x)e^{3x} \right]_0^{\pi/4}} - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/4} e^{3x}\sin(2x)\,dx$$

$$M = \frac{1}{2}e^{3\pi/4} - \frac{3}{2}L$$

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} M \\ M = \frac{1}{2} e^{3\pi/4} - \frac{3}{2} L \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} e^{3\pi/4} - \frac{3}{2} L\right] = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^{3\pi/4} - \frac{9}{4} L$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4} L = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^{3\pi/4}$$

$$\rightarrow L = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} e^{3\pi/4} \simeq 2{,}59\, uA.$$

4. On considère les fonctions $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dt$. En intégrant par parties :
   - — déterminer la primitive de f s'annulant en 0 ;
   - — déterminer la primitive de g s'annulant en 1.

$$F(X) = \int_0^X \ln(x)\, dx$$

$$\downarrow$$

IPP $\quad f(x) = 1 \times \ln(x)$

$$u'(x) = 1 \longrightarrow u = x$$

$$v' = 1/x \longleftarrow v = \ln x$$

$$F(X) = [x \ln x]_0^X - \int_0^X \frac{x}{x}\, dx$$

$$F(X) = X \ln X - [x]_0^X = X \ln X - X$$

$$\Rightarrow F(X) = \begin{cases} X \ln X - X & \text{si } X \neq 0 \\ 0 & \text{si } X = 0. \end{cases}$$

$\uparrow$ à définir en 0 pour que $0 \in \mathcal{D}_F$.

$$G(X) = \int_1^X x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

$$G(X) = \int_1^X x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \quad \rightarrow \text{IPP}$$

$$u'(x) = x \longrightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \longleftarrow v(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln x - \ln(x+1)$$

$$G(X) = \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^X - \int_1^X \frac{x}{2}\, dx + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{x^2}{x+1}\, dx$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\int_1^x \frac{x}{2}\,dx}_{-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^x} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^x \frac{x^2}{x+1}\,dx}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+1 \\ \hline \underline{-(x^2+x)} & x-1 \\ -x & \\ \underline{-(-x-1)} & \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^x \frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^x \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^x - \left[x\right]_1^x + \left[\ln|x+1|\right]_1^x\right)$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ln|x+1|}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\ln|x+1|}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \cancel{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \cancel{\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{4} + \cancel{\frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\ln|x+1|}{2} - \cancel{\frac{\ln(2)}{2}}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \ln\frac{|x+1|}{2}$$

Vérification $G(1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2} = 0$ <u>ok.</u>

5. Intégrer en effectuant un changement de variables :

1) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ avec $u(x) = x+1$ **2)** $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ avec $x(t) = \sin t$

① Je change l'élément

② Je change l'intégrande

③ Je change les bornes

④ Je remonte les étapes pour réécrire I.

① $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x+1) = 1 \Rightarrow dx = du$

② $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{u^2+1}$

ou.

$x = u - 1 \Rightarrow \frac{1}{(u-1)^2+2(u-1)+2} = \frac{1}{u^2+1}$

③ x va de 0 à 2 $\Rightarrow u$ va de 1 à 3

④ $I = \int_1^3 \frac{1}{u^2+1}\,du$ STOP Chg^t var.

forme immédiate

$I = [\arctan u]_1^3 = \arctan(3) - \frac{\pi}{4} \simeq 0,464$ uA.

radians nécessairement.

2) $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ avec $x(t) = \sin t$

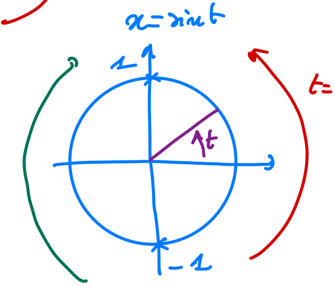
① $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$

② $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

♡ $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

③ x va de -1 à 1

$x = \sin t$



$t = -\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{3\pi}{2}$

$t = -\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$

Je choisis $t = -\frac{\pi}{2}$ à $t = \frac{\pi}{2}$

④ $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| .\ \cos t\,dt \Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$

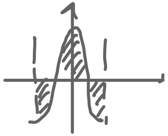
>0

$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$

Cf CM.

$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \cancel{\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t)\,dt} = 0 \Rightarrow I = \frac{1}{2}[t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$



3) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx$ avec $u(x) = \sqrt{x}$

① Je change l'élément

② Je change l'intégrande

③ Je change les bornes

④ Je remonte les étapes
pour réécrire I.

①. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du$

②. $\frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+u}$

③. x va de 1 à 2

$u=\sqrt{x}$ va de 1 à $\sqrt{2}$

④. $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u}{2+u}\,du$

$\Rightarrow I = 2\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{u}{2+u}\,du = 2\int_1^{\sqrt{2}} du - 4\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2+u}\,du$

$\frac{u}{2+u} = \frac{2+u-2}{2+u} = 1 - \frac{2}{2+u}$

$\Rightarrow I = 2\left[u\right]_1^{\sqrt{2}} - \left[4\ln|2+u|\right]_1^{\sqrt{2}}$

$= \underline{2\sqrt{2} - 2 - 4\ln(2+\sqrt{2}) + 4\ln(3)} \simeq 0{,}311$ uA.

4) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)}$ avec $\underline{u(x) = \ln(x)}$

$u = \ln(x)$

$\Leftrightarrow x = e^{u}$

①. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

②. $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{u}$

③ $x = 1$ à $+\infty$

$\Rightarrow u = 0$ à $+\infty$.

④ $$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u} = \Big[\ln|u|\Big]_0^{+\infty} = \lim_{u \to +\infty} \ln u - \lim_{u \to 0} \ln u = +\infty.$$

5) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$ avec $u = \dfrac{x}{2} - 1$

① $$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 1/2 \Rightarrow dx = 2du$$

② $$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \qquad x = 2u + 2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cancel{8u} + 8 - 4u^2 - \cancel{8u} - 4}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 4u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - u^2}}$$

③ $x = 0$ à 1 $\rightarrow$ $u = -1$ à $-1/2$

$\Rightarrow$ ④ $$I = \int_{-1}^{-1/2} \frac{\cancel{2}du}{\cancel{2}\sqrt{1 - u^2}} = \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

$$I = \Big[\arcsin u\Big]_{-1}^{-1/2} = \arcsin(-1/2) - \arcsin(-1)$$ en radians.

$$= -\pi/6 + \pi/2 = \pi/3 = I$$

6) $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{3 + \exp(-x)}$ $= \displaystyle\int \frac{e^x}{3e^x + 1} dx$

On remarque que $\dfrac{e^x}{3e^x + 1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{u'}{u}$

avec $u = 3e^x + 1$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{3}\frac{u'}{u} dx = \frac{1}{3} \ln|u| + k$$

$$= \frac{1}{3} \ln(3e^x + 1) + k.$$

7) $I = \int_0^1 \boxed{\frac{2x-1}{x^2+x+1}} dx$ ES2

$f(x)$

$\Longrightarrow f(x) = g(x) + h(x)$

$g(x) \swarrow$ ln immédiate

$h(x) \searrow$ arctan par chgt de variable

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{-2}{x^2+x+1}$$

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{-2}{x^2+x+1} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 = \ln(3)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{-2}{x^2+x+1} dx \rightsquigarrow \int \frac{1}{u^2+1} du \times Cte$$

$$\frac{-2}{x^2+x+1} = \frac{-2}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-2}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2 + 1\right]} = \frac{-8}{3\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2 + 1\right]}$$

$$= -\frac{8}{3} \frac{1}{u^2+1} \text{ avec } u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$$

① $\frac{du}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} du$

② $-\frac{8}{3}\frac{1}{u^2+1}$ déjà déterminé

③ $x = 0$ à $1 \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ à $\sqrt{3}$

④ $I_2 = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -\frac{8}{3} \frac{1}{1+u^2} \frac{\sqrt{3}}{2} du = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2} du$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\arctan u\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\pi}{\underset{\cancel{3}\;9}{\cancel{6}}} = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} = I_2$$

$$I = I_1 + I_2 = \ln(3) - \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

sup) $$I = \int_0^1 \frac{6x+2}{2x^2 - x + 4}\,dx$$

CSTE

$$\frac{6x+2}{2x^2-x+4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4x-1}{2x^2-x+4} + \frac{\boxed{7/2}}{2x^2-x+4}$$

ln

arctan

$$I_1 = \frac{3}{2}\left[\ln|2x^2-x+4|\right]_0^1 = \frac{3}{2}\ln(5) - \frac{3}{2}\ln(4) = I_1$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\frac{7}{4\left(x^2 - \frac{x}{2} + 2\right)} = \frac{7}{4}\,\frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \frac{7}{\cancel{4}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{31} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\left[x-\frac{1}{4}\right]\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{28}{31}\,\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\left[x-\frac{1}{4}\right]\right)^2 + 1} = \frac{28}{31}\,\frac{1}{u^2+1}$$

avec $u = \frac{\sqrt{31}}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right)$ etc...

8) $$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \qquad u = \cos x$$

① $\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

② $$\frac{dx}{\sin x} = \frac{du}{-\sin^2 x} = -\frac{du}{\sin^2 x} = -\frac{du}{1-\cos^2 x}$$

$$= -\frac{du}{1-u^2}$$

③ x va de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{2}$

u va de $\cos\frac{\pi}{3}$ à $\cos\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ u va de $1/2$ à 0

④ $$I = -\int_{1/2}^{0} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{1/2} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A}{-u+1} + \frac{B}{u+1}$$

$$A = \lim_{1}\, (u+1)\frac{1}{1-u^2} = \lim_{1} \frac{1}{u+1} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{-1} (u+1) \frac{1}{1-u^2} = \lim_{-1} \frac{1}{1-u} = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-u+1} \, du + \int_0^{1/2} \frac{1}{2} \frac{1}{u+1} \, du$$

$$= -\frac{1}{2} \Big[\ln(-u+1) \Big]_0^{1/2} + \frac{1}{2} \Big[\ln(u+1) \Big]_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \ln(3) = I.$$