Outils mathématiques 1 — TD de rentrée

Remarque : certains de ces énoncés seront à traiter en autonomie.

1. Simplifiez les expressions suivantes

   (a) $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}$, $y = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$, $y = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{1}$, $y = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$, $y = \frac{3}{\frac{4}{2}}$, $y = \frac{\frac{3}{4}}{2}$

   (b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1}$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x-1}}{x-1}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$,

   (c) $f(x) = -\frac{3x+1}{-x^2-1}$, $f(x) = \frac{-3x-1}{x^2+1}$, $f(x) = -\frac{-3x+1}{x^2+1}$, $f(x) = \dfrac{\frac{1}{(1-x^2)} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1 + \frac{1+x}{1-x}}$

1. (a) $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$

$y = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{3}{2}$

$y = \frac{5}{6} \times \frac{6}{1} = 5$

$y = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{5/6}{1/6} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{1} = 5$

$y = \frac{3}{\frac{4}{2}} = \frac{3}{2}$

$y = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

(b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} = \frac{1}{3(x-1)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1}$

$f(x) = \frac{\frac{1}{x-1}}{x-1} = \frac{1}{(x-1)^2}$

$f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2-1}$

c) $f(x) = -\frac{3x+1}{-x^2-1} = \frac{3x+1}{x^2+1}$

$f(x) = \frac{-3x-1}{x^2+1} = -\frac{3x+1}{x^2+1}$

$f(x) = -\frac{-3x+1}{x^2+1} = \frac{3x-1}{x^2+1}$

$$f(x)=\frac{\frac{1}{(1-x^2)}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1+\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x^2)\quad\frac{2}{1-x}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1+x)} = \frac{\cancel{\sqrt{1+x}}^{\,1}}{2\sqrt{1-x}\,(1+x)} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}}$$

$I$

$$(1+x)(1-x)$$

$$\sqrt{1+x}\cdot\cancel{\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{1-x+1+x}{1-x}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$1-x$

2. Géométrie

(a) Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3;7)$, $B(5;7)$ et $C(-1;2)$. Le point $I$ est le milieu de $[BC]$ :

i. calculer les coordonnées de $I$ ;

ii. calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ ;

iii. donner une équation de la droite $(AC)$.

$$x_I=\frac{5+(-1)}{2}=2 \qquad y_I=\frac{7+2}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5 \qquad I(2;4{,}5)$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-3\\7-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}3+1\\7-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

scalaire = réel

$$s=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=2\times4+0\times5=8=s.$$

Ex : $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=2\times(-4)+1\times3=-5=s.$

$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{CA} \cdot \vec{n} = 0 \iff \vec{CA} \perp \vec{n}$

__Wanted:__ Eq. de (AC) $\qquad$ $\underbrace{y = mx + p}_{\text{réduite}}$ $\qquad$ $ax + by + c = 0$

$$(AC) = \{ M(x;y) \ / \ y = mx + p \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$$

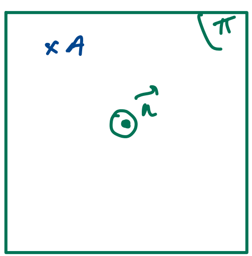
$$\left.\begin{array}{lll} A \in (AC) & (1) & 7 = 3m + p \\ C \in (AC) & (2) & 2 = -m + p \end{array}\right\}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 5 = 4m + 0. \qquad m = 5/4$

$(2) \Rightarrow p = 2 + m = \frac{8}{4} + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}.$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{13}{4} \iff 5x - 4y + 13 = 0.$$

(b) Dans l'espace, déterminer ~~les coordonnées~~ l'équation du plan de vecteur normal (perpendiculaire) $\vec{n} = (2; 1; 3)$ et passant par $A(3; 2; -1)$.




$\pi : 2x + 1y + 3z + d = 0$

$A \in \pi \Rightarrow 2 \times 3 + 1 \times 2 + 3(-1) + d = 0 \iff d = -5$

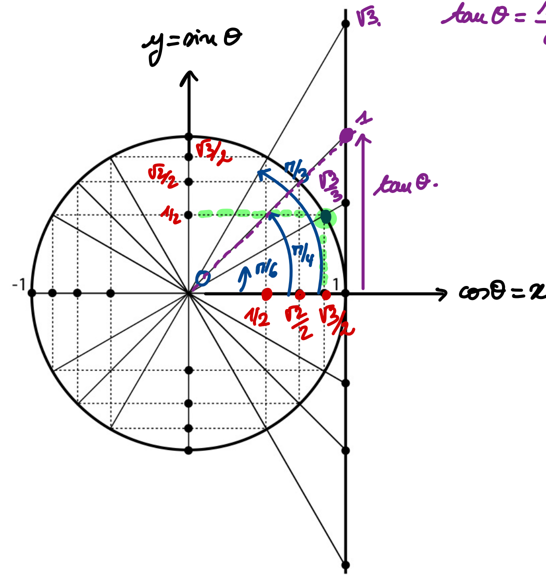
$\pi : 2x + y + 3z - 5 = 0.$

3. Étude de fonctions trigonométriques

(a) Indiquer, dans le cercle trigonométrique ci-dessous, les valeurs particulières de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$. On donne comme valeurs caractéristiques $x = \pi/6$, $\pi/4$ et $\pi/3$ pour les angles et $1/2$, $\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{3}/2$ pour les coordonnées.

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

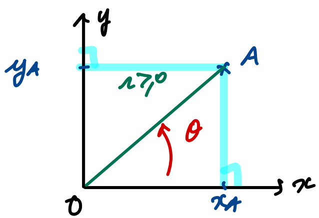
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$




$\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$

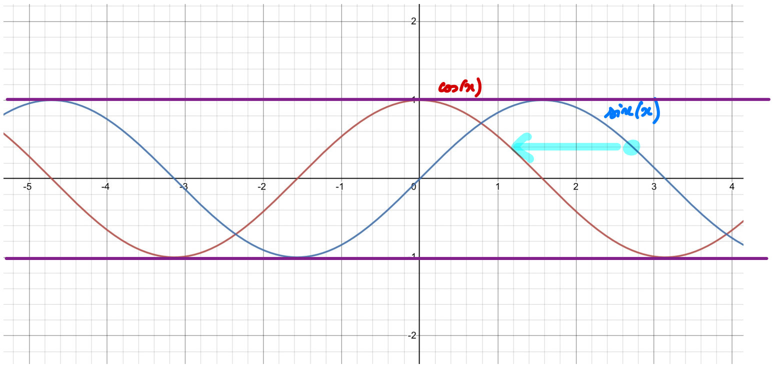
(b) Si $A$ est un point ayant pour coordonnées polaires $r = 2$ et $\theta = 30^o$, en déduire les coordonnées cartésiennes du point $A$.

coordonnée radiale $\quad$ coordonnée angulaire




$x_A = r\cos\theta = 2\cos(30°) = \sqrt{3}$

$y_A = r\sin\theta = 2\sin(30°) = 1.$




$-1 \le \cos x \le 1$ $\quad -1 \le \sin x \le 1$ $\quad$ Bornées.

$$\begin{cases} \sin(x+\varphi) = \cos(x) & \forall x \\ \sin(x+\pi/2) = \cos(x) & \forall x \end{cases}$$

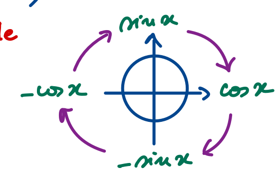
si je peux décrire une courbe avec un sinus, je peux aussi la décrire avec un cosinus.

cos x est paire $\qquad$ sin x est impaire

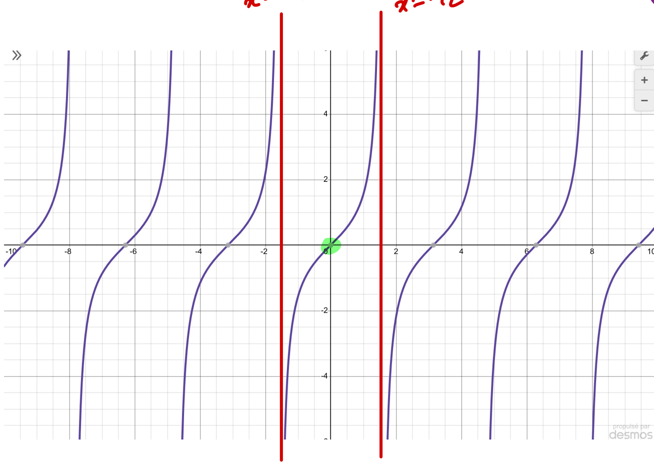
$\exists T \in \mathbb{R}^* \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x+\underset{\text{période}}{T}) = \cos(x)$

cos x et sin x sont $2\pi$-périodiques.

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$



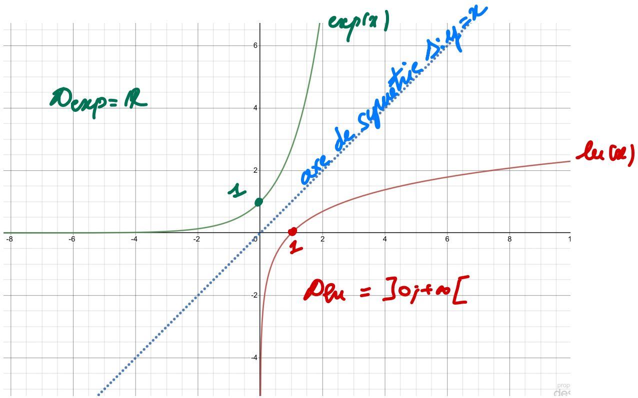

$x = -\pi/2$ $\qquad$ $x = \pi/2$



$\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \cos x = 0!!$

tan x est $\pi$-périodique

et impaire




$\ln(e^x) = x$

$\exp(\ln(x)) = x$ si $x > 0$.

$\exp(x) = \underbrace{e^x}_{\text{e à la puissance } x}$

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ $\quad 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ $\quad 10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$

$(e^a)^b = [\exp(a)]^b = e^{a \cdot b}$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $\quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$\ln(a^b) = b \ln(a)$

$\lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\quad \lim_{+\infty} e^x = +\infty$. MAIS la vitesse de croissance diffère.

$(\exp(x))' = \exp(x)$ $\quad$ <u>Wanted:</u> $y \,/\, \underbrace{y' + y = 3}_{\text{équation différentielle}}$. $\rightarrow$ exponentielle.

$(\ln x)' = 1/x$.

6. Simplifiez les expressions suivantes :

(a) $f_1(x) = \exp(-\ln(x))$, $f_2(x) = \frac{\exp(2x)}{\exp(x)}$, $f_3(x) = \ln(\exp(x^2))$,

(b) $f_4(x) = e^{2x} \cdot e^3$, $f_5(x) = (e^{2x})^3$, $x = 10^3 \cdot 10^5$, $x = (10^3)^5$,

(c) $f_8(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, $f_9(x) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$, $f_{10}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$

(a) $f_1(x) = \exp[\ln(x^{-1})] = \exp\left(\ln\left[\frac{1}{x}\right]\right) = \frac{1}{x} = f_1(x)$

$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x} e^{-x} = e^{2x-x} = e^x$

$f_3(x) = x^2$ (b) $f_4(x) = e^{2x} e^3 = e^{2x+3}$ $f_5(x) = (e^{2x})^3 = e^{6x}$

$x = 10^3 . 10^5 = 10^8$ $x = (10^3)^5 = 10^{15}$

(c) $f_8(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $f_9(x) = \ln[(1-x)(1+x)] = \ln(1-x^2)$

$f_{10}(x) = \frac{1}{2} \ln(x) = \ln(x^{1/2}) = \ln\sqrt{x}$.

7. Calculer la dérivée de $f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$.

$f'(x) = 2x \ln x$

$(uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = 2x . \ln x + x^2 . \frac{1}{x} - x = 2x \ln x \cancel{+x} \cancel{-x}$

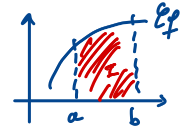
$= 2x \ln x$.

8. Soient $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sin(2x)$. Calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ et $I_2 = \int_{-\pi/8}^{\pi/6} g(x)dx$.

somme

$I = \int_a^b f(x)dx$ surfaces de rectangles

$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$




$\exists F(x) / F'(x) = f(x)$.

F est une primitive de $f(x)$.

$I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ avec $f(x) = x^2 - 1$

$F(x) = \frac{x^3}{3} - x \underbrace{+0}_{cste}$

$I_1 = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3} - 1\right] - \left[\cancel{\frac{0}{3} - 0}\right]$

$= -2/3$

$I_2 = \int_{-\pi/8}^{\pi/6} g(x)dx$ avec $g(x) = \sin(2x)$.

$(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$

$G(x) = \frac{-\cos(2x)}{2}$

$I_2 = \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_{-\pi/8}^{\pi/6} = -\frac{\cos(\pi/3)}{2} + \frac{\cos(-\pi/4)}{2}$

$= -\frac{1/2}{2} + \frac{\sqrt{2}/2}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4} = I_2 \simeq 0{,}104$ uA.

Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

## 1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(4;-1)$ et $D(1;-3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

1.4 Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.5 Calculer le produit scalaire $s = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$.

1.6 Déterminer le signe de $\theta$ ainsi que la surface du triangle $ACD$ à l'aide du déterminant.

1.1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.2 $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-18-3 \\ 6+6-2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix}$

1.3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0$ non.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

1.4. $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}} = \sqrt{9+16} = 5$

$\|\overrightarrow{AC}\| = AC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

1.5. $s = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 18 + 8 = 26 = s$.

Or $s = \|\overrightarrow{AC}\| . \|\overrightarrow{AD}\| . \cos\theta$

$26 = 5 \times 2\sqrt{10} . \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{26}{5 \times 2\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \cos\theta = 0{,}822 \Rightarrow \theta = \pm 34{,}7°$.

1.6. $\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -24 + 6 = -18$.

$= \|\overrightarrow{AC}\| . \|\overrightarrow{AD}\| . \sin\theta$. $\quad \det < 0 \Rightarrow \sin\theta < 0 \Rightarrow \theta = -34{,}7°$

$\mathcal{A} = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})|}{2} = 9\, u_A = \mathcal{A}$.

## 2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite $D$ d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite $D$ d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

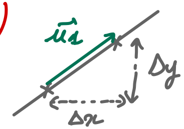
2.3 Soit $D$ la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de $D$ ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à $D$ :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0{,}5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.1. $y = mx + p$ $\quad \vec{u} = (1;-5) \quad \vec{n} = (5;1)$

$\vec{u} = (1; m)$




$\vec{u_1} = (\Delta x; \Delta y)$.

$\vec{u} = \frac{\vec{u_1}}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta x}; \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = (1; m)$.

2.2. $ax + by + c = 0 \quad \vec{n} = (a;b) = (2;3). \quad \vec{u} = (-3;2)$

2.3. (a) $y = 2x - 1$ (réduite) $\vec{u} = (1;2) \quad \vec{n} = (-2;1)$

(b) $\vec{u_1} = (1;-2) \quad \vec{u_2} = (1;-0{,}5) \quad \vec{u_3} = (1;2)$.

Seul $\vec{u_2} \perp \vec{u}$ $\Rightarrow$ Réponse (ii).

Règle: Soient $D_1$ de coefficient directeur $m_1$
$D_2$ " . . . " " $m_2$
Alors $D_1 \perp D_2 \iff m_1 \times m_2 = -1$.

2.4 Donner ~~l'~~ une équation cartésienne de la droite passant par $H(-2;1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.

$D$

$D_0$.

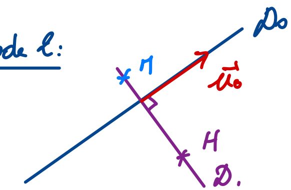
$D_0 : x - 2y - 5 = 0$

Méthode 1. Un vecteur normal à $D_0$ dirige $D$ et $H \in D$.

$\vec{n_0} = (1;\underset{m}{-2}) = \vec{u} \Rightarrow y = -2x + p$.

$\underset{y_H}{1} = -2 \times \underset{x_H}{(-2)} + p \Rightarrow p = -3 \Rightarrow y = -2x - 3$.

Méthode 2:



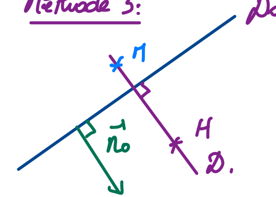

$D = \{M(x;y) \,/\, \vec{HM} \perp \vec{u_0}\}$

$\vec{HM} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \vec{u_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M \in D \iff \vec{HM} \cdot \vec{u_0} = 0 = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\iff 2x + 4 + y - 1 = 0 \iff 2x + y + 3 = 0$.

Méthode 3:




$M \in D \iff \vec{HM} \parallel \vec{n_0} \iff \det(\vec{HM}; \vec{n_0}) = 0$.

$\iff \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -2x - 4 - y + 1 = 0$

$\iff 2x + y + 3 = 0$.

## 2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite $D$ d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite $D$ d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

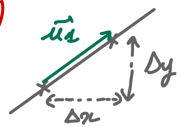
2.3 Soit $D$ la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de $D$ ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à $D$ :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.1. $y = mx + p$ $\quad \vec{u} = (1;-5)$ $\quad \vec{n} = (5;1)$

$\vec{u} = (1;m)$




$\vec{u_1} = (\Delta x;\Delta y)$.

$\vec{u} = \frac{\vec{u_1}}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta x};\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = (1;m)$.

2.2. $ax+by+c=0$ $\quad \vec{n} = (a;b) = (2;3)$. $\quad \vec{u} = (-3;2)$

2.3. (a) $y = 2x - 1$ (réduite) $\vec{u} = (1;2)$ $\quad \vec{n} = (-2;1)$

(b) $\vec{u_1} = (1;-2)$ $\quad \vec{u_2} = (1;-0,5)$ $\quad \vec{u_3} = (1;2)$.

Seul $\vec{u_2} \perp \vec{u}$ $\Rightarrow$ Réponse (ii).

Règle: Soient $D_1$ de coefficient directeur $m_1$
$D_2$ " . . . " " $m_2$
Alors $D_1 \perp D_2 \iff m_1 \times m_2 = -1$.

2.4 Donner ~~l'~~ une équation cartésienne de la droite passant par $H(-2;1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.

$D$

$D_0$.

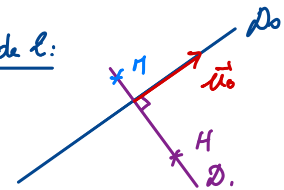
$D_0 : x - 2y - 5 = 0$

Méthode 1. Un vecteur normal à $D_0$ dirige $D$ et $H \in D$.

$\vec{n_0} = (1;\underset{m}{-2}) = \vec{u}$ $\Rightarrow$ $y = -2x + p$.

$\underset{y_H}{1} = -2\times \underset{x_H}{(-2)} + p$ $\Rightarrow$ $p = -3$ $\Rightarrow$ $y = -2x - 3$.

Méthode 2:



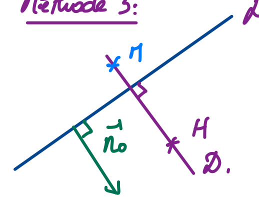

$D = \{M(x;y) \,/\, \vec{HM} \perp \vec{u_0}\}$

$\vec{HM} = \begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u_0} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$M \in D \iff \vec{HM}\cdot\vec{u_0} = 0 = \begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0$

$\iff 2x + 4 + y - 1 = 0 \iff 2x + y + 3 = 0$.

Méthode 3:




$M \in D \iff \vec{HM} /\!/ \vec{n_0} \iff \det(\vec{HM};\vec{n_0}) = 0$.

$\iff \begin{vmatrix}x+2 & 1\\ y-1 & -2\end{vmatrix} = 0 \iff -2x - 4 - y + 1 = 0$

$\iff 2x + y + 3 = 0$.

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2;-3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x+3$.

$\mathcal{D}$.

$\mathcal{D} : y = -2x + p \qquad G \in \mathcal{D} \Rightarrow -3 = -2\times 2 + p. \Rightarrow p = 1$

$y = -2x + 1.$

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :

- $D_1$ d'équation : $2x + y - 3 = 0$
- $D_2$ passant par $A(0;3)$ et $B(3;5)$
- $D_3$ d'équation : $4x - y = 6$

$I_{13} = D_1 \cap D_3$. vérifie $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$

$6x = 9 \Rightarrow x = 9/6 = 1{,}5.$

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow I_{13}(1{,}5;0)$

Wanted: Eq. de $D_2 = (AB)$. $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige $D_2$

$\Rightarrow \overset{b}{2}x \overset{-a}{-3}y + c = 0.$ Puis $A \in D_2 \Rightarrow -9 + c = 0$

$c = 9.$

$D_2 = \{M(x;y) \,/\, 2x - 3y + 9 = 0\}.$

$I_{12} = D_1 \cap D_2 \qquad \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ 2x - 3y + 9 = 0. & (2) \end{cases}$

$(1)-(2) \Rightarrow 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow I_{12} = A(0;3).$

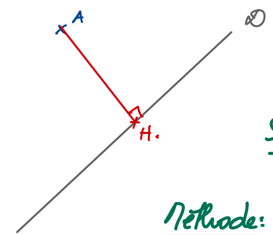
$I_{23} : \begin{cases} 2x - 3y = -9 \\ 4x - y = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2{,}7 \\ y = 4{,}8 \end{matrix}$ (calculatrice)

$I_{23} : \begin{cases} 2x - 3y = -9 \Rightarrow -4x + 6y = 18 \\ 4x - y = 6 \ (2) \end{cases}$

$(1') + (2) \Rightarrow 5y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{5} = 4{,}8.$

$(2) \Rightarrow 4x = 6 + y = \frac{30}{5} + \frac{24}{5} = \frac{54}{5} \Rightarrow x = \frac{54}{20} = \frac{27}{10} = 2{,}7$

2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5;-2)$ sur la droite $D$ d'équation $y = -3x + 4$.




Wanted: $H(x_H; y_H)$.

Stratégie: $H = (AH) \cap \mathcal{D}$.

Méthode: ① Equation de $(AH)$?
② Résolution du système

① $(AH) = \{M(x;y) \,/\, \vec{AM} \perp \vec{u}\}$ avec $\vec{u} = (1;-3)$.

$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix} \qquad \vec{AM}\cdot\vec{u} = 0 = \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = x - 5 - 3y - 6 = 0$

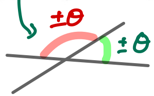
$(AH) : x - 3y - 11 = 0.$

18/9/2023

$\begin{cases} y = -3x+4 \\ x-3y-11=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2{,}3 \\ y = -2{,}9 \end{cases}$ $I(2{,}3;\,-2{,}9)$.
à la calculatrice

Fx 92 : MODE MENU 3 4/5. $\begin{matrix} 3x + 1y = 4 \\ 1x - 3y = 11 \end{matrix}$

2.8 Donner une mesure de l'angle $\theta$ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x;y)\ /\ y = 3x+2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x;y)\ /\ x - 4y + 12 = 0\}$.




Stratégie: Utilisation du produit scalaire

1. $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ directeurs
2. $s = \vec{u}_1 . \vec{u}_2$ avec les coordonnées
3. $s = \|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\| . \cos\theta \Rightarrow \cos\theta$
4. $\theta = \arccos(\text{résultat})$.

① $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ② $s = 1\times 4 + 3\times 1 = 7$

③ $\cos\theta = \dfrac{s}{\|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\|} = \dfrac{7}{\sqrt{1+9}\ \sqrt{16+1}} = \dfrac{7}{\sqrt{10}\ \sqrt{17}} = 0{,}537$

④ $\theta = \arccos(0{,}537) = 57{,}5°$.

$\theta = \pm 57{,}5°$ ou $\theta = \pm 122{,}5°$

2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1;-4)$ et de rayon 7.

$\mathscr{C}: (x-1)^2 + (y+4)^2 = 49$.

2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$ ; b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ ; c) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$

d) $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 9 = 0$

(a) Forme canonique : Cercle de centre $(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

(b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 - 2ab = (a-b)^2 - b^2$

$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$ $\Rightarrow$ $\underbrace{x^2-2x}_{(x-1)^2-1} + \underbrace{y^2+4y}_{(y+2)^2-4} - 3 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ est l'équation du cercle de centre $(1;-2)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

(c) $(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 2 = 0$

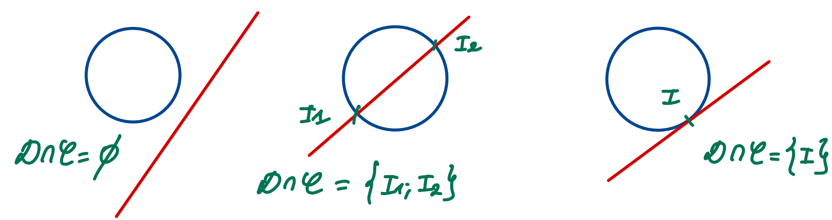
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 3$. est l'équation du cercle de centre $(-1;-2)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

(d) $(x-2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = -1$ n'est pas une équation de cercle.

$\Rightarrow$ On a intérêt à utiliser la forme canonique.

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite $D$ passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle $OAB$, ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.




$I_1 \in \mathcal{D} \cap \mathscr{C}$ $I_1(x_1;y_1)$ / $x_1$ et $y_1$ vérifient à la fois l'éq. de $\mathcal{D}$ et celle de $\mathscr{C}$.

Stratégie : ① Eq. de $\mathcal{D}$
② Eq. de $\mathcal{C}$
③ Système de 2 éq. à 2 inconnues
$\Rightarrow$ NON LINÉAIRE.

① $\vec{u} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y+1 \end{vmatrix} = 0 = y + 1 - 2x$

$\mathcal{D}: \; y = 2x - 1$

$\Rightarrow$ Vérif : $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$ 😀

② $\mathcal{C}: (x-2)^2 + y^2 = 9$

③ Système : $\begin{cases} y = 2x - 1 & (1) \\ (x-2)^2 + y^2 = 9 & (2) \end{cases}$ $\longrightarrow$ Substitution $(1) \to (2)$

$(x-2)^2 + (2x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 8x - 4 = 0.$

$\Delta = 144 = 12^2$

$x_1 = \dfrac{+8 - 12}{10} = -0{,}4$ $\qquad x_2 = \dfrac{+8+12}{10.} = 2$

$(1) \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 1 = -1{,}8$ $\qquad y_2 = 2x_2 - 1 = 3$

$\Rightarrow I_1(-0{,}4\,;-1{,}8)$ $\qquad I_2 = (2;3).$

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite $D$ passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle $OAB$, ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \right|$

$\det(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\Rightarrow \mathcal{A} = 0{,}5\, u_A$

$\theta = \langle \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB} \rangle < 0$ ①

$s = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{s}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2} \cdot 1.} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \pm \dfrac{3\pi}{4} = \pm 135°$ ②

$\Rightarrow \theta = -135°$ ← ①, ②.

### 3. Barycentres

3.1 Le barycentre de $n$ points $M_i$ de poids respectifs $p_i$ est le point $G$ vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

(a) Établir la relation entre les coordonnées de $G$ et celles des points $M_i$ ?

(b) Que devient cette dernière relation si $G$ est l'isobarycentre des points ?

(c) Calculer les coordonnées du barycentre $G$ et de l'isobarycentre $I$ du triangle formé par les points $A(0;3)$, $B(1;1)$ et $C(4;0)$ affectés respectivement des poids 1, 3 et 2.

Vu en cours $\rightarrow$ moyennes pondérées ou simples des coordonnées.

c) $x_G = \dfrac{1 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 4}{6} = \dfrac{11}{6}$

$y_G = \dfrac{1 \times 3 + 3 \times 1 \quad 2 \times 0}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$

$\Rightarrow G\left(\dfrac{11}{6}; 1\right)$

$x_I = \dfrac{0+1+4}{3} = 5/3$

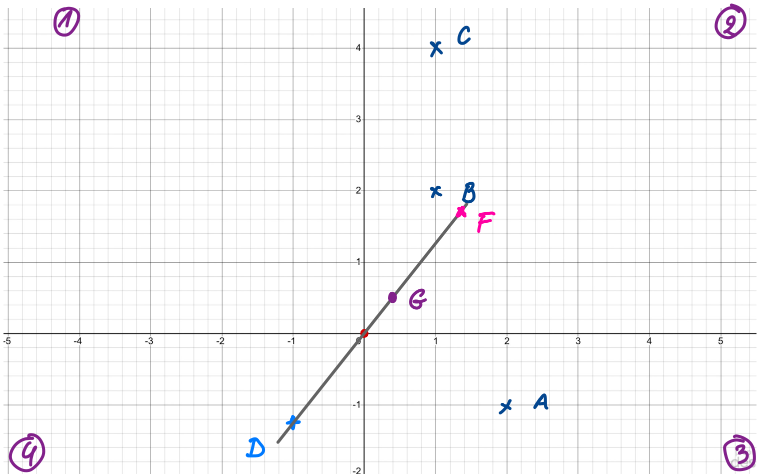
$y_I = \dfrac{3+1+0}{3} = 4/3$

$\Big\}\ I(5/3\,;4/3).$

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine ? On appellera le point $D$.

(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point $D$ une masse de 2 kg ?




Je cherche $x_D$ et $y_D$ telles que:

$$0 = \frac{1\times 2 + 1\times 1 + 1\times 1 + 4x_D}{\cancel{7}} \Rightarrow x_D = -1$$

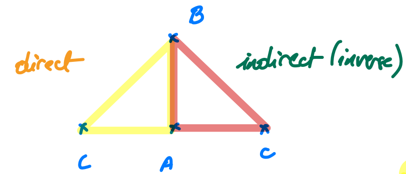
$$0 = \frac{1\times(-1) + 1\times 2 + 1\times 4 + 4y_D}{\cancel{7}} \Rightarrow y_D = -5/4 = -1,25.$$

Soit F le barycentre de A, B et C. Alors F a pour poids 3 et $x_F = 4/3$ et $y_F = 5/3$. $\quad 3\vec{OF} + 4\vec{OD} = \vec{0}$

(b) $$x_G = \frac{1\times 2 + 1\times 1 + 1\times 1 + 2\overset{x_D}{(-1)}}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$y_G = \frac{1\times(-1) + 1\times 2 + 1\times 4 + 2\times(-5/4)}{5} = 0,5$$

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point $C$ pour que le triangle $ABC$ soit direct, isocèle et rectangle en $A$, et calculer l'aire du triangle $ABC$.




$\det(\vec{AB};\vec{AC}) > 0.$

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$ $\qquad \vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$

Stratégie: 1. $\vec{AB}$ $\qquad$ 2. $\vec{AC}$ par permutation-opposition des coordonnées $\Rightarrow$ 2 possibilités

3. det $\Rightarrow \vec{AC}$ $\qquad$ 4. $\vec{AC} \to C$.

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 2. $\vec{AC_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{AC_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\det(\vec{AB};\vec{AC_2}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 2\times(-2) = 5 > 0 \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AC_2}$

4. $\vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x_C - 1 = -2 \Rightarrow x_C = -1$; $\ y_C + 2 = 1 \Rightarrow y_C = -1$

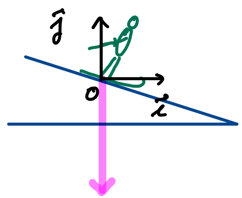
$$\boxed{\Rightarrow C(-1;-1)}$$

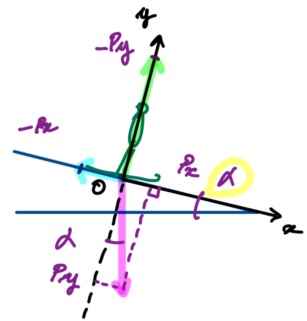
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB};\vec{AC})\right| = 2{,}5\,u_A = \mathcal{A}$$

## 4. Applications en physique

4.1 Un skieur de masse totale $m = 90$ kg, tout équipement compris, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale. Sa vitesse étant constante, on choisit de modéliser l'ensemble des frottements qu'il subit par une force unique $\vec{F}$ ayant la même direction que le mouvement du skieur mais de sens opposé. On peut modéliser le skieur par un solide en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Après avoir tracé les vecteurs modélisant les différentes forces mises en jeu, déterminer leurs coordonnées et en déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{F}$.




$$\vec{v} = \text{cste} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} = \sum \vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{f} + \vec{R} = \vec{0}$$

perpendiculaire au sol.

parallèle à la trajectoire

$$\vec{f} = f_x\,\vec{i} \qquad \vec{R} = R_y\cdot\vec{j} \qquad \vec{P} = P_x\cdot\vec{i} + P_y\,\vec{j}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + f_x\,\vec{i} + R_y\vec{j} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_x + f_x = 0 \\ P_y + R_y = 0. \end{array}\right\} \quad f_x = -P_x = -mg\sin(\alpha) \quad \|\vec{f}\| = f_x = 153\,N.$$

4.2 En électricité, en régime alternatif sinusoïdal, on peut représenter les tensions avec des vecteurs. On procède alors de la manière suivante :

FORMALISME de FRESNEL

— la valeur efficace est représentée par la norme du vecteur ;

— et la phase, ou le déphasage, par l'angle que forme le vecteur par rapport à $[Ox)$.

(a) Dans la 1ère situation, on souhaite calculer la somme $v$ des deux tensions suivantes :

— la tension $v_1$ mesurée aux bornes d'une résistance, de valeur efficace 12 V et qui constitue la référence des phases (elle a donc une phase de 0°) ;

— la tension $v_2$ mesurée aux bornes d'une capacité, de valeur efficace 4 V, et ayant un retard de phase de 90°.

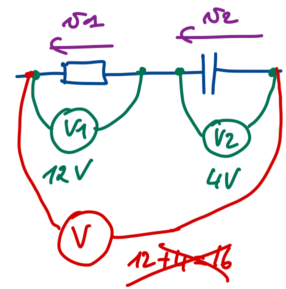
Déterminer la valeur efficace et la phase de $v$.

(b) Dans la 2e situation, on mesure :

— la tension $v_2$ aux bornes d'une inductance, qui a une valeur efficace de 3 V, et présente une avance de phase de 90° ;

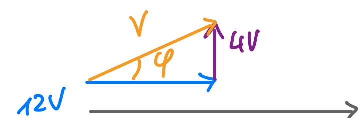
— la somme $v$ des deux tensions, de valeur efficace 10 V et avec une avance de phase de 30°.

Déterminer la valeur efficace et la phase de $v_1$.





représente une tension de 5V efficace avec une phase de 15°




$$V = \sqrt{144 + 16} \simeq 12{,}6\,V$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{12}\right) = 18{,}4°$$

$v$ observé a une valeur efficace de 12,6V et un retard de phase de 18,4°

(b) → Have fun !

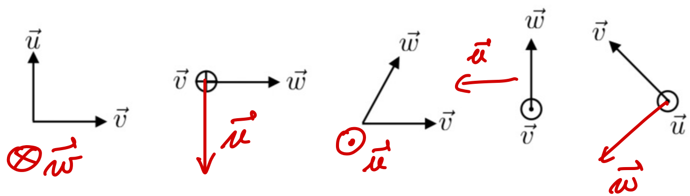
Outils mathématiques 1 — TD 2 : Géométrie dans l'espace

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Dans toute cette feuille, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

### 1. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1.1 Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$. Dessiner le vecteurs manquant dans les cinq cas représentés ci-dessous.




1.2 On considère les vecteurs $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ :

(a) donner leurs coordonnées ;

(b) calculer $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$ puis $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

$$\vec{b}\wedge\vec{c} = (\vec{i}+\vec{k})\wedge(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = \cancel{\vec{i}\wedge\vec{i}} + \underbrace{\vec{i}\wedge\vec{j}}_{\vec{k}} + \underbrace{\vec{i}\wedge\vec{k}}_{-\vec{j}} + \underbrace{\vec{k}\wedge\vec{i}}_{+\vec{j}} + \underbrace{\vec{k}\wedge\vec{j}}_{-\vec{i}} + \cancel{\vec{k}\wedge\vec{k}} = \vec{k}-\vec{i}$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{b}\wedge\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-0\\1\end{pmatrix}=-\vec{i}+\vec{k}$$

(b)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]\wedge\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\+1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\+0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Puisqu'il existe au moins un cas pour lequel l'associativité n'est pas vérifiée, le produit vectoriel n'est pas associatif.

1.3 On considère les vecteurs $\vec{u}=(3\,;1\,;-2)$, $\vec{v}=(2\,;0\,;1)$ et $\vec{w}=(1\,;1\,;4)$ :

(a) calculer leurs normes ;

(b) calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ ;

(c) calculer les produits vectoriels $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{w}$, $\vec{v}\wedge\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v})\wedge(2\vec{v}+3\vec{w})$ ;

(d) calculer le produit mixte $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est direct ou indirect.

(e) Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u}+2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

(a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{14} \qquad \|\vec{v}\|=\sqrt{5} \qquad \|\vec{w}\|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

(b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=4 \qquad \vec{u}\cdot\vec{w}=-4$

$$(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{w})=\begin{pmatrix}2\times3-3\times2\\2\times1-3\times0\\2\times(-2)-3\times1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+1\\0+1\\1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}=-33.$$

(c) $$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{u}\wedge\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-14\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}$$

$$(\vec{u}-\vec{v})\wedge(2\vec{v}+3\vec{w})=\begin{pmatrix}3-2\\1-0\\-2-1\end{pmatrix}\wedge\left[2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}7\\3\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\-35\\-4\end{pmatrix}$$

(d) $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = -14$

$= \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix} = -14$

L'un ou l'autre

$[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] < 0 \Rightarrow (\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est indirect.

(e) Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u} + 2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

(e) $\vec{a}$ unitaire $\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = 1$.

$\vec{a} = k(\vec{u} + 2\vec{v})$ $\qquad k > 0$

$\Rightarrow \|\vec{a}\| = 1 = \|k(\vec{u}+2\vec{v})\| = |k|\,\|\vec{u}+2\vec{v}\|$.

$\Rightarrow |k| = \dfrac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{u}+2\vec{v}\|} = \dfrac{1}{\|\vec{u}+2\vec{v}\|} \Rightarrow k = +|k| = \dfrac{1}{\|\vec{u}+2\vec{v}\|}$.

avec $\vec{u}+2\vec{v} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{u}+2\vec{v}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow \vec{a} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}$

## 2. Objets de l'espace et calculs de grandeurs

2.1 À partir des résultats de l'exercice précédent :

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ;

(b) donner une mesure au signe près de l'angle $\langle\vec{u};\vec{v}\rangle = \theta$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$ $\qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{5}$ $\qquad \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

(a) $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}$ par définition. D'autres réponses sont aussi possibles.

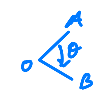
(b) $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = 0{,}478$

$\Rightarrow \theta = \pm 61{,}4°$

Dans l'espace, on ne s'intéresse pas au signe de $\theta$.

2.2 Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ et donner une mesure au signe près de l'angle $(\widehat{AOB}) = \theta$.

$\theta = \langle\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\rangle$




Outils : Aire : produit vectoriel puis norme.
Angle : produit scalaire

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}20\\-7\\5\end{pmatrix}$

$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{474} \simeq 21{,}8\ u_A = \mathcal{A}$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\|\cdot\|\overrightarrow{OB}\|} = \dfrac{11}{\sqrt{35}\,\sqrt{17}} = 0{,}451 \Rightarrow \theta = \pm 63{,}2°$

2.3 On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$ :

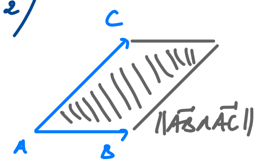
(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan $ABC$ ;

(b) calculer l'aire du triangle $ABC$ ;

(c) calculer le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

(a) $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$ $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}6\\+3\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{49} = 7 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$




(b) $\mathcal{A}_{\Delta} = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = 3{,}5\ u_A$

(c) $[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}] = m \qquad V = |m|$

$m = \det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

$M = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix} \qquad \det(M) = 6.$

$m = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = 6. \quad \Rightarrow \quad V = 6\ u_V.$

2.4 Déterminer une équation cartésienne :

(a) du plan $\Pi_1$ passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2;0;1)$ et $\vec{v} = (0;1;2)$ ;

(b) du plan $\Pi_2$ passant par $B(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2;1;1)$.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Pi_1 : -x-4y+2z+d=0. \qquad A\in\Pi_1 \Rightarrow -1-4+2+d=0$

$\Rightarrow d = 3.$

$\Rightarrow \Pi_1 : -x-4y+2z+3=0.$

(b) $\Pi_2 : \ 2x+y+z+d=0 \qquad B\in\Pi_2 \Rightarrow 2+0+1+d=0 \Rightarrow d=-3$

$\Rightarrow \Pi_2 : \ 2x+y+z-3=0.$

2.5 Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ de l'exercice précédent.

$[\vec{u};\vec{v};\vec{n}] = m \qquad V = |m|$

$m = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -4 \quad \Rightarrow \quad V = 4\ u_V$

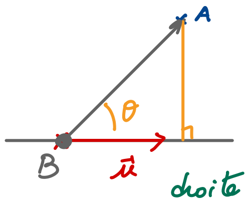
2.6 On considère :

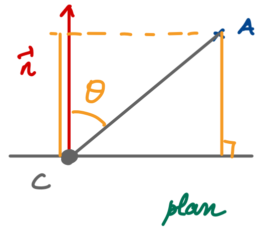
— le point $A$ de coordonnées $(2;0;5)$ ;

— la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0;-2;-4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2;1;0)$ ;

— le plan $\Pi$ d'équation $x+y+2z-5=0$.

(a) Calculer les distances $d_1$ de $A$ à $\mathcal{D}$ et $d_2$ de $A$ à $\Pi$ à l'aide des produits scalaires et vectoriels.




sin θ

cos θ.

$$d_1 = \frac{\|\vec{BA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \qquad d_2 = \frac{|\vec{CA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$d_1 = \frac{\left\|\begin{pmatrix}2\\2\\9\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{5}} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}-9\\18\\-2\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{409}}{\sqrt{5}} = 9{,}04\ u_L = d_1$$

Pour $d_2$, je dois d'abord trouver un point C

$$C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ ou } C\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \text{ ou } C\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$d_2 = \frac{|\vec{CA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{avec} \quad \vec{CA} = \begin{pmatrix}2-5\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{CA}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 7 \qquad \|\vec{n}\| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{7}{\sqrt{6}} \Rightarrow d_2 \simeq 2{,}86\ u_L$$

(b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan $\Pi$ ?

(c) Déterminer les équations d'une droite parallèle à $\Pi$ et passant par $A$. Cette droite est-elle unique ?

$$\mathcal{D} /\!/ \Pi \iff \vec{u}\perp\vec{n} \iff \vec{u}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

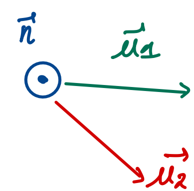
$\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ et $\Pi$ ne sont pas parallèles.

(c) $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_1 \perp \vec{n}$ $\qquad \vec{u}_2 \perp \vec{n}$

$$\begin{cases} x = -t+2 \\ y = t \\ z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -t+2 \\ y = -t \\ z = t+5 \end{cases}$$

$\mathcal{D}_1 /\!/ \Pi$ $\qquad \mathcal{D}_2 /\!/ \Pi$.




Il y a plusieurs possibilités.

## 3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

$$\Pi_1 : 2x+3y-z-5=0 \;;\; \Pi_2 : 4x-5y+3z+3=0 \;;\; \Pi_3 : 2x-6y+7z+6=0$$

$$\begin{cases} 2x+3y+(-1)z = 5 \\ 4x+(-5)y+3z = -3 \\ 2x+(-6)y+7z = -6 \end{cases}$$

$x = 32/43 \simeq 0{,}744$

$y = 49/43 \simeq 1{,}14$

$z = -4/43 \simeq -0{,}0930.$

3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -t-2 \\ z = 3t-1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-5 \\ z = -t+3 \end{cases} \quad t \in R$$

(a) montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection ;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.

$x = 2t+2 = 3t+1 \Rightarrow t=1$

$y = -t-2 = 2t-5 \Rightarrow t=1$

$z = 3t-1 = -t+3 \Rightarrow t=1$

⚠ Les trois valeurs doivent être identiques.

$t=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ y=-3 \\ z=2 \end{array} \Rightarrow I\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

$\mathcal{D}_1$ est dirigée par $\vec{u_1} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}_2$ par $\vec{u_2} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_1}\|\cdot\|\vec{u_2}\|} = \frac{1}{14} \Rightarrow \theta = \pm 85{,}9°$$

3.3 On considère :

— le plan $\Pi$ d'équation $3x-2y+4z+5=0$

— la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 3t+4 \\ z = 3t-1 \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$

Déterminer le point d'intersection ou bien, s'il n'existe pas, la distance entre $\Pi$ et $\mathcal{D}$.

$I = \Pi \cap \mathcal{D}$. Ses coordonnées $(x;y;z)$ doivent vérifier les éq. de $\mathcal{D}$ et l'éq. de $\Pi$.

$\Leftrightarrow$ Je cherche $t$ tel que : $3(-2t-1) - 2(3t+4) + 4(3t-1) + 5 = 0.$

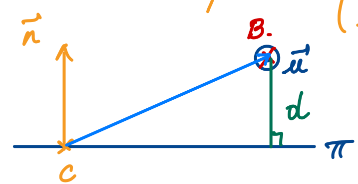
$\Leftrightarrow -\cancel{6t} - 3 - \cancel{6t} - 8 + \cancel{12t} - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow -10 = 0.$

$\Rightarrow t$ n'existe pas donc $\mathcal{D} /\!/ \Pi$.

$\forall t$ cette condition ne sera jamais vérifiée

Autre méthode : $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u} = 0$

De plus : $B\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} \notin \Pi$ $\quad 3\times(-1) - 2\times 4 + 4\times(-1) + 5 \neq 0.$




$$d = \frac{|\vec{CB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

$\Rightarrow C \in \Pi$, $B\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$.

Je choisis $C\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{CB} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 4-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{CB}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -10$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29} \quad \Rightarrow d = \frac{|-10|}{\sqrt{29}} \simeq 1{,}86\,u_L$$

3.4 Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = t+1 \\ y = t \qquad t \in R \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

(a) déterminer une équation cartésienne du plan $\Pi$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;

(b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

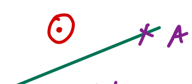
(a) $\mathcal{D}$ passe par $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\pi \perp \mathcal{D}$ : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi : x + y + 2z + d = 0.$

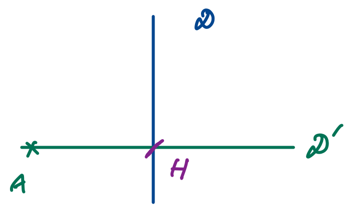
$O \in \pi \Leftrightarrow d = 0$

$\pi : x + y + 2z = 0.$

(b)




On n'est pas dans cette situation.



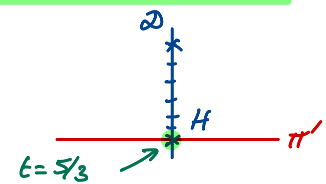

Wanted: Eq. de $\mathcal{D}'$!

Stratégie :
1. Je cherche $\pi' \perp \mathcal{D}$ tel que $A \in \pi'$
2. Je détermine $H = \pi' \cap \mathcal{D}$.
3. Je dis que $\mathcal{D}' = (AH) = \{ M / \vec{AM} = t\vec{AH} \}$.

1. $\pi \parallel \pi'$ $\quad \pi' : x + y + 2z + d = 0$
$A \in \pi' \Rightarrow 1 + 2 + 2\times 3 + d = 0 \Rightarrow d = -9$

$\Rightarrow \pi' : x + y + 2z - 9 = 0$

2. $(t+1) + (t) + 2(2t-1) - 9 = 0$ Je cherche $t$ qui correspond $H = \mathcal{D} \cap \pi'$




$\Rightarrow 6t - 10 = 0 \Rightarrow t = 5/3$

$\Rightarrow x_H = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$

$y_H = \frac{5}{3}$ $\qquad \Rightarrow H\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$

$z_H = 2\left(\frac{5}{3}\right) - 1 = \frac{7}{3}$

3. $\vec{AH} = \begin{pmatrix} 8/3 - 1 \\ 5/3 - 2 \\ 7/3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}t + 1 \\ y = -\frac{1}{3}t + 2 \\ z = -\frac{2}{3}t + 3 \end{cases}$$

NB : Je peux choisir $\vec{u}' = 3\vec{AH} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$

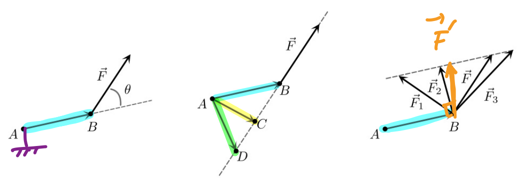
Les deux jeux d'équations sont équivalents.

**Application en physique**

4.1 Le moment $\vec{\mathcal{M}}$ de la force $\vec{F}$ appliquée en $B$ par rapport à un point $A$ donné est une grandeur physique vectorielle qui quantifie l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour de ce point $A$. Celui-ci se calcule au travers de la relation

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

et le sens de $\vec{F}$ permet de déterminer le sens de rotation à l'aide de la règle du tournevis.




(a) Moment d'une force (b) Différents points d'application (c) Différentes forces

À l'aide de la figure ci-dessus :

(a) montrer que le moment est le même pour les points d'application $B$, $C$ et $D$ (volet (b)) et conclure ;

(b) montrer que le moment est le même quelle que soit la force reportée dans le volet (c) et conclure.

(a) Je veux montrer que : $\vec{M} = \vec{AB} \wedge \vec{F} = \vec{AC} \wedge \vec{F} = \vec{AD} \wedge \vec{F}$.

$$\vec{AC} \wedge \vec{F} = (\vec{AB} + \underbrace{\vec{BC}}_{k\vec{F}}) \wedge \vec{F} = (\vec{AB} + k\vec{F}) \wedge \vec{F} = \vec{AB} \wedge \vec{F} + \underbrace{\cancel{k\vec{F} \wedge \vec{F}}}_{=0}$$

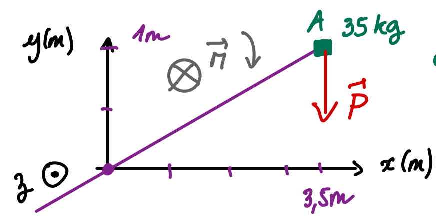
CQFD

Quel que soit le point d'application dans l'axe de $\vec{F}$, le moment est le même.

(b) $\vec{AB} \wedge \vec{F_1} = \vec{AB} \wedge (\vec{F} + k\vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{F} + \underbrace{\cancel{\vec{AB} \wedge k\vec{AB}}}_{=0}$ . $k \in \mathbb{R}^*$

→ Le moment est le même pour toutes les forces dont l'extrémité du vecteur se trouve sur la ligne pointillée.

⇒ Je suis plus efficace avec $\vec{F}' \perp \vec{AB}$




$g = 10\ m/s^2$

Question : Moment $\vec{M}$ du poids appliqué et ramené en O.

$$\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{P} = \underset{m}{\begin{pmatrix} 3,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \wedge \underset{N}{\begin{pmatrix} 0 \\ -350 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1225 \end{pmatrix} = \vec{M}$$

Outils mathématiques 1 — TD 3 : Systèmes de coordonnées

## 1. Coordonnées du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants, repérés soit en coordonnées cartésiennes $(x\ ;y)$, soit en coordonnées polaires $(r\ ;\theta)$ :

$$A(r = 3{,}5\ ;\theta = 40^o)\ ;\ B(x = 2; y = 2{,}5)\ ;\ C(r = 4; \theta = 35^o)\ ;\ D(r = 5; \theta = \pi/12)\ ;\ E(x = -1; y = 3)\ ;$$
$$F(r = 3; \theta = 125^o)\ ;\ G(r = 1{,}5; \theta = -20^o)\ ;\ H(x = 2; y = -1)\ ;\ I(r = 3{,}5\ ; \theta = -2\pi/3)$$

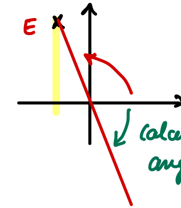
En calculant les coordonnées des points dans les deux systèmes de coordonnées, déterminer
- quel point est le plus éloigné de l'origine, et quel le point en est le plus proche ;
- quels points sont plus proches de l'origine que le point $B$ ;
- le point le plus haut, le plus bas, le plus à droite et le plus à gauche du plan ;
- le point le plus proche de l'axe des abscisses, et le point le plus proche de l'axe des ordonnées.

| POINTS | COORDONNÉES CARTÉSIENNES | POLAIRES $(r;\theta)$ |
|---|---|---|
| A | $(2{,}68;\ 2{,}25)$ | $(3{,}5;\ 40^\circ)$ |
| B | $(2;\ 2{,}5)$ | $(3{,}20;\ 51{,}3^\circ)$ |
| C | $(3{,}28;\ 2{,}29)$ | $(4;\ 35^\circ)$ |
| D | $(4{,}83;\ 1{,}29)$ | $(5;\ 15^\circ)$ |
| E | $(-1;\ 3)$ | $(3{,}16;\ 108^\circ)$ |
| F | $(-1{,}72;\ 2{,}46)$ | $(3;\ 125^\circ)$ |
| G | $(1{,}41;\ -0{,}513)$ | $(1{,}5;\ -20^\circ)$ |
| H | $(2;\ -1)$ | $(2{,}24;\ -26{,}6^\circ)$ |
| I | $(-1{,}75;\ -3{,}03)$ | $(3{,}5;\ -120^\circ)$ |

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ [\pm 180^\circ \text{ si } x<0]$$




calculatrice ne renvoie que des angles pour des $x$ positifs

En calculant les coordonnées des points dans les deux systèmes de coordonnées, déterminer
(a) quel point est le plus éloigné de l'origine, et quel le point en est le plus proche ;
(b) quels points sont plus proches de l'origine que le point $B$ ;
(c) le point le plus haut, le plus bas, le plus à droite et le plus à gauche du plan ;
(d) le point le plus proche de l'axe des abscisses, et le point le plus proche de l'axe des ordonnées.

(a) $r_{max} \to$ D est le plus éloigné de O
$r_{min} \to$ G est le plus proche de O

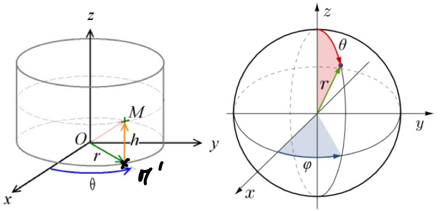
(b) Points tels que $r < 3{,}20$ : E, F, G et H.

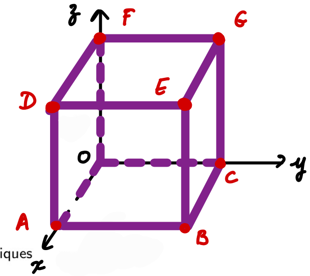
(c) + haut $y_{max} = 3 \Rightarrow$ point E
+ bas $y_{min} = -3{,}03 \Rightarrow$ point I
+ à droite $x_{max} = 4{,}83 \Rightarrow$ point D
+ à gauche $x_{min} = -1{,}75 \Rightarrow$ point I.

(d) $|y|$ minimale : G est le plus proche de $(Ox)$.
$|x|$ minimale : E est le plus proche de $(Oy)$.

## 2. Coordonnées de l'espace

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. La figure ci-dessous rappelle les variables utilisées pour repérer un point en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.



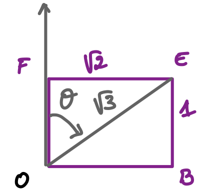




À gauche : Coordonnées cylindriques À droite : Coordonnées sphériques

**Fig. 1 : Systèmes de coordonnées dans l'espace**

2.1 Calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.

| Point | Cartésiennes $(x;y;z)$ | Cylindriques $(r;\theta;z)$ | Sphériques $(r;\theta;\varphi)$ |
|---|---|---|---|
| O | $(0;0;0)$ | $(0;0°;0)$ | $(0;0°;0°)$ |
| A | $(1;0;0)$ | $(1;0°;0)$ | $(1;90°;0°)$ |
| B | $(1;1;0)$ | $(\sqrt{2};45°;0)$ | $(\sqrt{2};90°;45°)$ |
| C | $(0;1;0)$ | $(1;90°;0)$ | $(1;90°;90°)$ |
| D | $(1;0;1)$ | $(1;0°;1)$ | $(\sqrt{2};45°;0°)$ |
| E | $(1;1;1)$ | $(\sqrt{2};45°;1)$ | $(\sqrt{3};54{,}7°;45°)$ |
| F | $(0;0;1)$ | $(0;0°;1)$ | $(1;0°;0°)$ |
| G | $(0;1;1)$ | $(1;90°;1)$ | $(\sqrt{2};45°;90°)$ |




$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54{,}7°$$

2.2 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points $A$, $B$, $C$, $D$ dont les coordonnées **cartésiennes** sont : $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;2\,;2)$, $C(-1\,;5\,;0)$ et $D(0\,;3\,;-1)$.

On applique les formules

| Point | Cartésiennes | Cylindriques | Sphériques |
|---|---|---|---|
| A | $(1;0;2)$ | $(1;0°;2)$ ← $z$ | $(\sqrt{5};26{,}6°;0°)$ ← $r$, $\arccos(3/r)$ |
| B | $(2;2;2)$ | $(\sqrt{8};45°;2)$ | $(\sqrt{12};54{,}7°;45°)$ |
| C | $(-1;5;0)$ | $(\sqrt{26};101°;0)$ | $(\sqrt{26};90°;101°)$ |
| D | $(0;3;-1)$ | $(3;90°;-1)$ | $(\sqrt{10};108°;90°)$ |

2.3 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **cartésiennes** :

(a) du point $A$ dont les coordonnées **sphériques** sont : $r = 3$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$ ;

(b) du point $B$ dont les coordonnées **cylindriques** sont : $r = 2$ , $\theta = 5\pi/4$, $z = 1$.

(a)
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

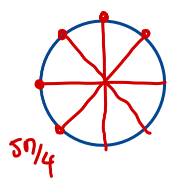
$$x = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} = x$$
$$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = y$$
$$z = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$A\left(\frac{9}{4} ; \frac{3\sqrt{3}}{4} ; \frac{3}{2}\right)$$

(b) $z = z$ $\quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$z = 1$

$$x = 2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$
$$y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$




$\Rightarrow B(-\sqrt{2} ; -\sqrt{2} ; 1)$

2.4 En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que $r$ =constante est :

(A) un cercle ; (B) un cylindre ; (C) une sphère

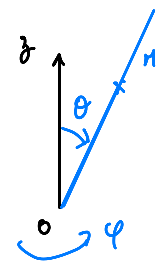
θ varie
$z$ = cte
$r$ = cte

Inadapté

$\theta \neq 90°$

2.5 En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que $\theta$ =constante est :

(A) un cercle passant par les pôles ; (B) un disque horizontal ; (C) un cône d'axe $(Oz)$




Si $r$ = cte je décris une sphère

Outils mathématiques 1 — TD 4 : Nombres complexes

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

## 1 Représentation dans le plan

1.1 On considère les points $M$ et $M'$ de coordonnées respectives $(1\,;\sqrt{3})$ et $(1\,;-\sqrt{3})$ :

(a) déterminer leurs affixes $z$ et $z'$ (sous forme algébrique) et faire le lien avec les coordonnées cartésiennes ;

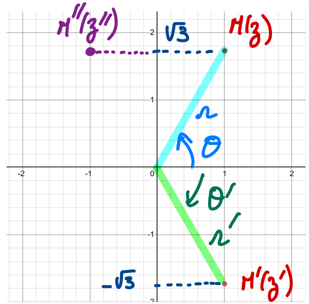
(b) donner les expressions exponentielles de $z$ et $z'$ et faire le lien avec les coordonnées polaires ;

(c) Que constituent $z$ et $z'$ l'un pour l'autre ?

(a) $M(x;y) \rightarrow M(z)$ $\quad z = x+iy$.

$\Rightarrow z = 1+i\sqrt{3}$ $\quad \begin{cases} x = Re(z) \\ y = Im(z) \end{cases}$

$z' = 1-i\sqrt{3}$




(b) $z = re^{i\theta}$ $\quad z' = r'e^{i\theta'}$

Module : $r = |z|$

Argument : $\theta = \arg(z)$

$r = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) + 0 = \frac{\pi}{3} = 60°$

$\Rightarrow z = 2e^{i\pi/3} = 2e^{i60°}$

$z' = r'e^{i\theta'}$ $\quad \theta' = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) + 0 = -\frac{\pi}{3} = -60°$

$\Rightarrow z' = 2e^{-i\pi/3} = 2e^{-i60°}$

(c) $z$ et $z'$ sont conjugués $\Leftrightarrow z' = \bar{z} \Leftrightarrow z = \bar{z'}$

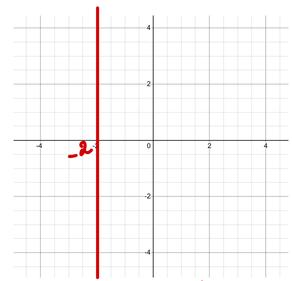
$\Leftrightarrow M$ et $M'$ sont symétriques par rapport à $(Ox)$.

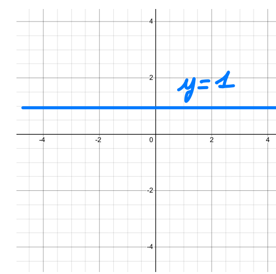
(sup) Soit $M''(z'')$ le symétrique de $M$ par rapport à $(Oy)$ alors $z'' = -\bar{z}$

1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes $z$ telles que :

(a) $\mathrm{Re}(z) = -2$ ; (b) $\mathrm{Im}(z) = 1$ ; (c) $|z| = 4$ ; (d) $|z| = -3$ ; (e) $\arg(z) = \pi/4$ ;

(f) $z \cdot \bar{z} = 4$ ; (g) $z + \bar{z} = -4$ ; (h) $z - \bar{z} = 8i$ ; (i) $z = \bar{z}$.

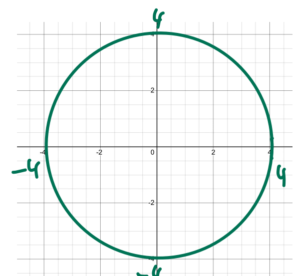



$Re(z) = -2 \Leftrightarrow Re(x+iy) = -2$

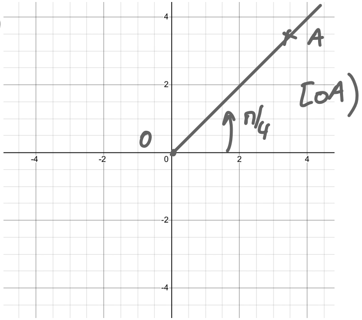
$\Leftrightarrow x = -2$

$Im(z) = y = 1$

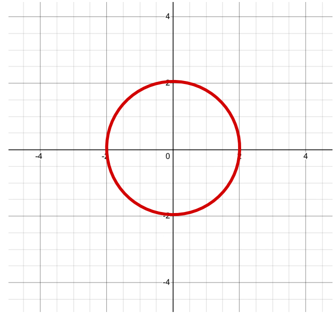



$|z| = r = 4$

(e)

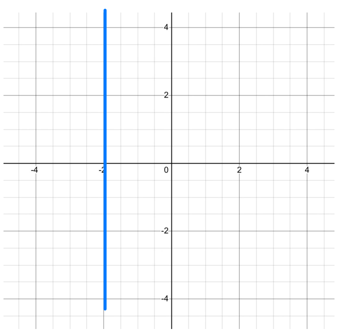



$\arg(z) = \frac{\pi}{4} = \theta$

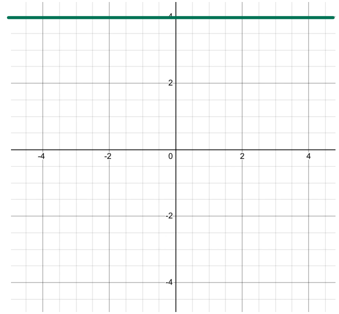


$z \cdot \bar{z} = r^2 = 4 \quad r \geq 0$

$\iff r = 2$

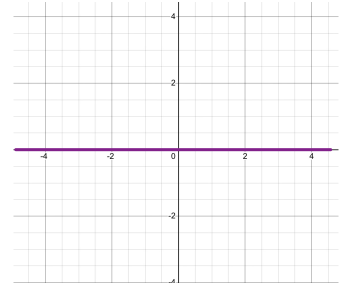


(g) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy$
$= 2x = -4$
$\iff x = -2$



(h) $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy)$
$= 2iy = 8i$

$\iff y = 4$



(i) $z = \bar{z}$

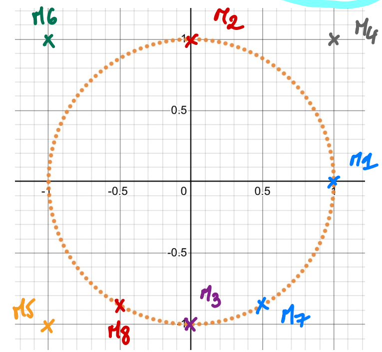
$x + iy = x - iy$

$\begin{cases} x = x \\ y = -y \iff y = 0. \end{cases}$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

$z_1 = 1$ ; $z_2 = i$ ; $z_3 = -i$ ; $z_4 = 1 + i$ ; $z_5 = -1 - i$ ; $z_6 = -1 + i$ ;

$z_7 = \dfrac{+1 - i\sqrt{3}}{2}$ ; $z_8 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$




$z_1 = 1e^{i0}$

$z_2 = 1e^{i\pi/2}$

$z_3 = 1e^{-i\pi/2}$

$z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z_5 = \sqrt{2}\, e^{-i\, 3\pi/4}$

$z_6 = \sqrt{2}\, e^{i\, 3\pi/4}$

$|z_7| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \qquad \arg(z_7) = -\frac{\pi}{3} \qquad z_7 = 1e^{-i\pi/3}$

$z_8 = 1e^{-2i\pi/3} = 1e^{-i\, 2\pi/3}$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 = -9$ ; (b) $z^2 + 3z + 4 = 0$ ; (c) $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

(d) $z^4 = 1$ ; (e) $z^3 = -1$ ; (f) $z^4 = -16$; (g) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

(a) $z^2 = -9 \iff z = \pm 3i \iff z_1 = 3i \quad z_2 = -3i$

$z^2 = (-1).9$

$\quad i^2 \quad (\pm 3)^2 \Rightarrow (\pm 3i)^2 = z^2$

Théorème d'Alembert : Un polynôme de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ 1 éq. de degré n admet n solutions dans $\mathbb{C}$.

(a bis) $z^2 = -19 \iff z_1 = i\sqrt{19}$ ou $z_2 = -i\sqrt{19}$

$\iff z = \pm i\sqrt{19}$

(b) $az^2 + bz + c = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \delta \;/\; \delta^2 = \Delta$

$\Rightarrow z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$

Ex: $z^2 + z + 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4\times1\times1 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2\times1} \iff z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

(b) $z^2 + 3z + 4 = 0 \qquad$ Wanted: 2 solutions dans $\mathbb{C}$.

$\Delta = 9 - 4\times4\times1 = -7 = (i\sqrt{7})^2$

$z = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2\times1} \iff \begin{cases} z_1 = \dfrac{-3-i\sqrt{7}}{2} \\ \text{ou} \\ z_2 = \dfrac{-3+i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

(c) $z^2 + 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0 \qquad \Delta = (4\times3) - 4\times4\times1 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2$

$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3} - 2i}{2\times1} = -\sqrt{3} - i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

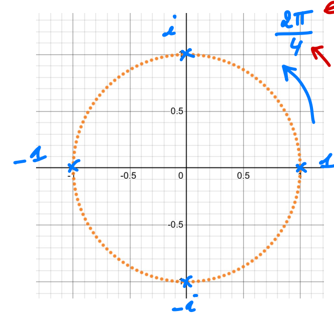
$z = -\sqrt{3} \pm i$

conjuguées.

(d) $z^4 = 1 \qquad$ Wanted: 4 solutions.

$\frac{2\pi}{4}$ ← 1 tour

degré n




J'écris $z = re^{i\theta}$

Je cherche $z^4 = 1$

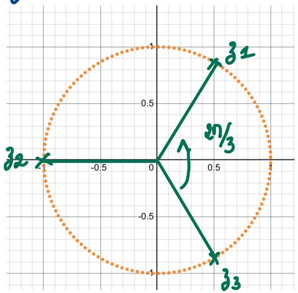
$\iff (re^{i\theta})^4 = 1e^{i0}$

$r^4 e^{i4\theta} = 1e^{i0}$

$\iff \begin{cases} r^4 = 1 \text{ avec } r > 0 \\ 4\theta = 0\,[2\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0\,[\frac{2\pi}{4}] = 0\,[\frac{\pi}{2}] \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = 1e^{i0} = 1 \\ z_2 = 1e^{i\pi/2} = i \\ z_3 = 1e^{i\pi} = -1 \\ z_4 = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \end{cases}$

(e) $z^3=-1$




<u>Wanted:</u> 3 solutions dans $\mathbb{C}$.

$z^3=-1 \iff r^3e^{i3\theta}=1e^{i\pi}$

En effet $z=re^{i\theta} \iff z^3=(re^{i\theta})^3$

$\iff z^3=r^3e^{i3\theta}$

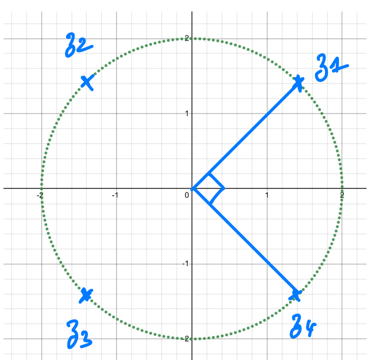
Maintenant, je cherche $r$ et $\theta$ tels que

$$\begin{cases} r^3=1 \text{ avec } r>0. \iff r=1 \\ 3\theta=\pi\ [2\pi] \iff \theta=\frac{\pi}{3}\ [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1=1e^{i\pi/3} \\ z_2=1e^{i\frac{3\pi}{3}}=1e^{i\pi}=-1 \\ z_3=1e^{i\frac{5\pi}{3}}=1e^{-i\pi/3} \end{cases}$$

(f) $z^4=-16$ Je cherche 4 solutions dans $\mathbb{C}$.

$r^4e^{i4\theta}=16\,e^{i\pi} \iff \begin{cases} r^4=16 \text{ avec } r\geq 0 \\ 4\theta=\pi\ [2\pi] \end{cases}$




$\iff \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{4}\ [\frac{2\pi}{4}] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z_1=2e^{i\pi/4} \\ z_2=2e^{i3\pi/4} \\ z_3=2e^{i5\pi/4}=2e^{-i3\pi/4} \\ z_4=2e\,e^{i7\pi/4}=2e^{-i\pi/4} \end{cases}$

(h) $z^3=2\sqrt{3}-2i \iff r^3e^{i3\theta}=\underbrace{4\,e^{-i\pi/6}}$

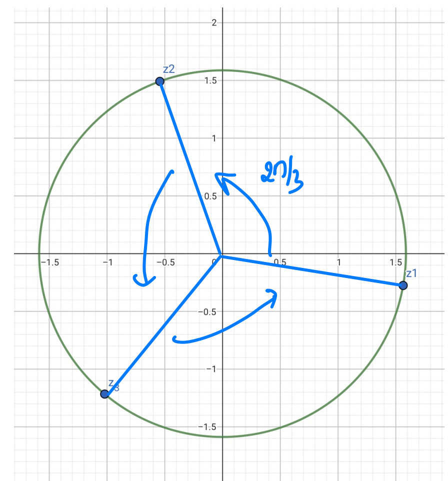
$|2\sqrt{3}-2i|=\sqrt{4\times3+4}=4$

$\arg(2\sqrt{3}-2i)=\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

$r^3e^{i3\theta}=4e^{-i\pi/6} \iff \begin{cases} r^3=4 \text{ avec } r\geq 0 \\ 3\theta=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} r=\sqrt[3]{4}\simeq 1{,}59 \\ \theta=-\frac{\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}]=-10°\ [120°] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1=4^{1/3}\,e^{-i\pi/18} \\ z_2=4^{1/3}\,e^{i11\pi/18} \\ z_3=4^{1/3}\,e^{i\frac{23\pi}{18}} \\ \quad=4^{1/3}e^{-i\frac{13\pi}{18}} \end{cases}$$




Pas de conjugués car coefficient complexe dans l'équation.

## 2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants en donnant les résultats sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 \; ; \; z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} \; ; \; z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i)$$

Ex: $\frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+i-1}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 = 1-4i-4-(4+4i-1)$$
$$= -3-4i-(3+4i) = -6-8i$$

$z_1 = re^{i\theta}$ $\quad r = \sqrt{100} = 10$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{-8}{-6}\right) \pm \frac{1}{2}$ tour

$= -2{,}21 = -127°$

$$\Rightarrow z_1 = 10\,e^{-i127°} = 10\,e^{-i2{,}21}$$

$$z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} = \frac{(1+3i)(1-2i)}{5} = \frac{1-2i+3i+6}{5} = \frac{7}{5} + i\frac{1}{5}$$

$z_2 = re^{i\theta}$ $\quad r = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{1/5}{7/5}\right) + 0 = 0{,}142 = 8{,}13°$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\,e^{i8{,}13°} = \sqrt{2}\,e^{i0{,}142}$$

$$z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i) = 3i - 4 - (\cancel{3}\underbrace{-i-9i}_{-10i}-\cancel{3}) = -4+13i$$

$z_3 = re^{i\theta} \Rightarrow$ $\quad r = \sqrt{185}$

$\theta = \arctan\left(\frac{13}{-4}\right) \pm \frac{1}{2}$ tour

$= 1{,}87 = 107°$

2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$ ; (b) $z_2 = (5+3i)^7$ ; (c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; (d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$ ; (e) $z_5 = \frac{4+6i}{1-5i}$

(a) $z_1 = \left[1\,e^{-i\pi/3}\right]^6 = 1^6\,e^{-i6\pi/3} = 1\,e^{-i2\pi} = 1 = z_1$

(b) $z_2 = (5+3i)^7 = \left[r\,e^{i\theta}\right]^7$ $\quad r = \sqrt{34}$, $\quad \theta = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}540$

$= \sqrt{34}^7\,e^{i\,3{,}78} = 34^{\frac{7}{2}}\,e^{i3{,}78}$

$\simeq 229\,000\,e^{i\,217°} \simeq 229\,000\,e^{-i143°}$

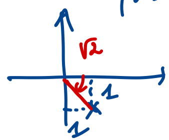
(c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}{2\,e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{\frac{i5\pi}{12}}$

Ou bien

$$z_3 = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

→ R.V. à l'exercice 3.1.

(d) $z_3 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^2}{\left(2e^{i\pi/6}\right)^3} = \frac{2e^{-i\pi/2}}{8e^{i3\pi/6}} = \frac{1}{4}e^{-i\pi} = -\frac{1}{4}$




(e) $z_5 = \frac{4+6i}{1-5i} = \frac{(4+6i)(1+5i)}{26} = \frac{4+20i+6i-30}{26} = \frac{-26+26i}{26} = -1+i$

(ou) $z_5 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i135°}$

BILAN:

* Sommes ou différences → ALGÉBRIQUE

$(1+i)+(1-i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4} + \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

* Puissances : EXPONENTIELLE

* RAPPORTS/PRODUITS : dépend du calcul (en général plus simple sous forme exponentielle)

Ex: $\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{2(1-i)} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}\cdot\cancel{2}e^{i\pi/3}}{\cancel{2\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}}$

$= e^{i\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right]} = e^{i\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right]} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

## 3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$, déterminer les valeurs **exactes** de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

Règle: $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases}$

$z = \sqrt{3}+i$ $\quad z' = 1+i$

① à écrire sous forme exponentielle

② Rapports ou des produits : quelles combinaisons pour faire apparaître des arguments de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.

③ On applique la règle

1. $z = 2e^{i\pi/6}$ $\quad z' = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

2. $\frac{5\pi}{12} \to z\cdot z'$ $\qquad \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12} \to \frac{z'}{z}$ $\qquad \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

3. Faire les calculs sous formes algébriques et exponentielles.

$z\cdot z' = 2e^{i\pi/6}\times\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$= \underbrace{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}_{Re(z\cdot z')} + i\,\underbrace{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}_{Im(z\cdot z')}$

Sous forme algébrique : $z \cdot z' = (\sqrt{3}+i) \times (1+i)$

$= \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - 1 = \underbrace{(\sqrt{3}-1)}_{Re(z \cdot z')} + i\underbrace{(\sqrt{3}+1)}_{Im(z \cdot z')}$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-1$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$

Et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$

$\frac{z'}{z} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/12} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{Re(z'/z)} + i\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{Im(z'/z)}$

Sous forme algébrique : $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4}$

$= \underbrace{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}_{Re(z'/z)} + i\underbrace{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}_{Im(z'/z)}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ET} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

3.2 À l'aide des nombres complexes :

(a) déterminer les expressions de $\cos(a+b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$ ;

(b) puis calculer précisément les valeurs de $\cos(\pi/4+\pi/3)$ et $\sin(\pi/4-\pi/3)$.

$\cos(a+b) = Re\left(e^{i(a+b)}\right)$ $\qquad \cos(a) = Re(e^{ia})$, $\cos(b) = Re(e^{ib})$

$e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$

$\Downarrow$

$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = [\cos a + i\sin a] \cdot [\cos b + i \sin b]$

$= \boxed{\underbrace{\cos a \cos b - \sin a \sin b}_{\cos(a+b)}} + i\boxed{\underbrace{[\sin a \cos b + \cos a \sin b]}_{\sin(a+b)}}$

$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$

$= \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

$\boxed{\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2\cos a \sin a \end{aligned}}$ $\qquad (\cos a)^2 = \cos^2 a$

A.N : $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{0} + \sin x \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \sin x.$

## 4. Application

Si un courant de valeur efficace $I$ traverse une résistance $R$, une capacité $C$ et une inductance $L$, on observe :

— une tension aux bornes de $R$ en phase avec le courant, et de valeur efficace $U_R = RI$ ;

— une tension aux bornes de $C$ avec un retard de phase de 90 degrés (déphasage négatif) sur le courant et de valeur efficace $U_C = \frac{I}{C\omega}$, où la pulsation $\omega$ est liée à la fréquence au travers de la relation $\omega = 2\pi f$ ;

— une tension aux bornes de $L$ avec une avance de phase de 90 degrés (déphasage positif) sur le courant et de valeur efficace $U_L = L\omega I$.

4.1 Nous allons définir les impédances des récepteurs $R$, $L$ et $C$. Nous les notons $\underline{Z}$ : elles permettent de généraliser la loi d'Ohm (vue en continu dans le cas des résistances) à ces trois récepteurs en régime alternatif sinusoïdal.

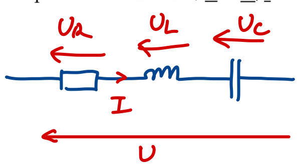
(a) Tracer sur l'axe des abscisses le vecteur $\vec{I}$ correspondant au courant traversant les récepteurs, de valeur efficace $I$.

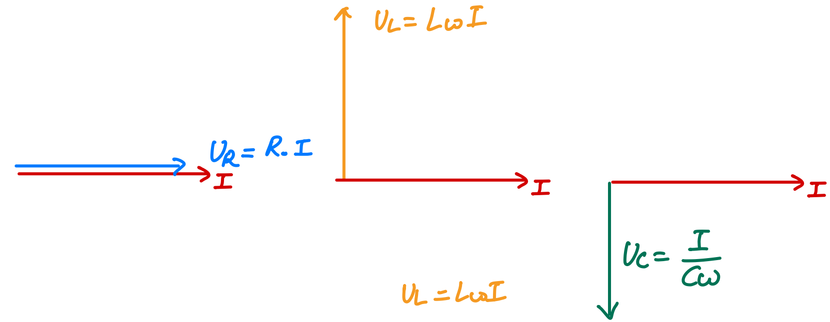
(b) Tracer dans le plan les vecteurs représentant les trois tensions observées $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ et $\vec{U}_C$. On rappelle que la norme du vecteur correspond à la valeur efficace mesurée, et la coordonnée angulaire du vecteur correspond au déphasage.

(c) Donner les affixes du vecteur de courant et des vecteurs de tension sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

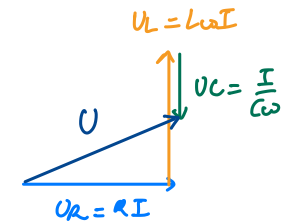
(d) Ces affixes sont appelées les *phaseurs* de courant et de tension : sur quelles grandeurs mesurables nous renseignent le module et de l'argument d'un phaseur ?

(e) Déterminer les impédances $\underline{Z}$ des trois récepteurs, définies par le rapport entre le phaseur de tension et le phaseur de courant, $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$. Déterminer les impédances des trois récepteurs.




Intérêt : $\omega$ fixée




$\underline{U_R} = R.I + i0. = R.I\,e^{i0}$

$\underline{U_L} = 0 + iL\omega I = L\omega I\,e^{i\pi/2}$

$\underline{U_C} = 0 + i\frac{-I}{C\omega} = \frac{I}{C\omega}\,e^{-i\pi/2}$ argument : phase

$\underline{I} = I + i0 = I e^{i0}$.

Module : Valeur efficace

(e) $\underline{Z_R} = R.$ $\underline{Z_L} = iL\omega$ $\underline{Z_C} = -\frac{i}{C\omega}$.

Outils mathématiques 1 — TD 5 : Fonctions numériques

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

## 1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

**1)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **2)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ **3)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$ **4)** $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

**5)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos x - \sin \cancel{x}\,(2x)}$ **6)** $f(x) = \ln(1-x)$ **7)** $f(x) = \ln\left(2x^2+3x-2\right)$ **8)** $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

$\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

tels que

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \,/\, x-1=0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

privé de l'ensemble des

2) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \,/\, x^2-4=0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$= ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 2[ \cup ]2; +\infty[$

0

$f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ est paire

paire

paire paire

3) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x^2+x-6=0\}$

$\Delta = 25 = 5^2$ $x_1 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ $x_2 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2; -3\}$

4. $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

$f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

$\mathcal{D}_f = \{x \,/\, x^2+3x-4 \geqslant 0\}$

Règle : le signe de $ax^2+bx+c$ est celui de $a$ à l'extérieur des racines.

Preuve : $\lim\limits_{\pm\infty} ax^2+bx+c = \lim\limits_{\pm\infty} ax^2$ or $x^2 > 0$.

$\Delta = 25 = 5^2$ $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1.$

$\mathcal{D}_f = ]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$

comprises

NB : $g(x) = \ln(x^2+3x-4)$

$\mathcal{D}_g = ]-\infty; -4[ \cup ]1; +\infty[$

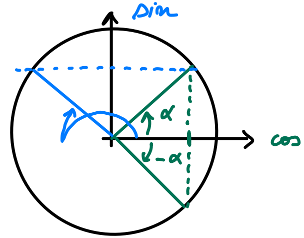
5) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) - \sin(2x)}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \,/\, \cos x - \sin(2x) = 0\}$

J'élimine $x \,/\, \cos x = \sin(2x)$

$$\cos a = \cos b \iff \begin{cases} a = b \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ a = -b \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\sin a = \sin b \iff \begin{cases} a = b \ [2\pi] \\ a = \pi - b \ [2\pi] \end{cases}$$



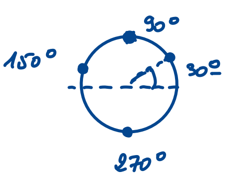

$$\begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

$$\cos(x) = \sin(2x)$$

$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(2x)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x = 2x \ [2\pi] & \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2} + x = \pi - 2x \ [2\pi] & \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} [2\pi] ; \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \right\}$$




5 bis) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x - \sin x}$

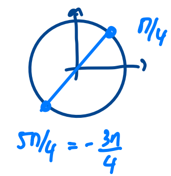
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{ x / \cos x = \sin x \}$$

$$\cos x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\iff \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x \ [2\pi] & \iff 2x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{4} \ [\pi] \\ \text{ou} \\ x = x - \frac{\pi}{2} \ [2\pi] & \iff 0 = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \text{ n'admet pas de solution} \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} [\pi] \right\}$$




6) $f(x) = \ln(1 - x)$ $\quad D_f = \{ x / 1 - x > 0 \}$

strict

$$= \{ x < 1 \} = ]-\infty ; 1[$$

7) $f(x) = \ln(2x^2+3x-2)$

$D_f = \{x \,/\, 2x^2+3x-2>0\}$

$\Delta = 25 = 5^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$ ou $x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$D_f = ]-\infty;-2[ \cup ]\frac{1}{2};+\infty[$

exclues. car $\ln(0)$ n'existe pas.

8) $f(x) = \dfrac{\overset{\text{impaire}}{\sin x}}{\underset{\text{impaire}}{x}}$ est paire $\quad D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

R.V. aux prolongements par continuité... 😎

## 2 Parité et symétries

2.1 Etudier la parité des fonctions suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** $f(x) = \lvert x\rvert$ | **2)** $f(x) = x^2$ | **3)** $f(x) = x^3$ | **4)** $f(x) = \sqrt{x}$ |
| **5)** $f(x) = x^{3/2}$ | **6)** $f(x) = 2x+1$ | **7)** $f(x) = 2x^2+1$ | **8)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ |
| **9)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ | **10)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ | **11)** $f(x) = \sin(2x)$ | **12)** $f(x) = \sin(x^2)$ |
| **13)** $f(x) = \cos(3x)$ | **14)** $f(x) = \cos(x^3)$ | **15)** $f(x) = \tan(x)$ | **16)** $f(x) = \tan(x^2+1)$ |
| **17)** $f(x) = \ln(x)$ | **18)** $f(x) = \sin\circ\ln(x)$ | **19)** $f(x) = \ln\circ\sin(x)$ | **20)** $f(x) = \exp(x)$ |
| **21)** $f(x) = \sin\circ\exp(x)$ | **22)** $f(x) = \exp\circ\cos(x)$ | | |

1) $|x|$ est paire

2) $x^2$ est paire car 2 est pair.

3) $x^3$ est impaire car 3 est impair.

4) $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ni paire ni impaire

$D = \mathbb{R}^+$ pas centré en 0.

5) $x^{3/2} = x^1 \times x^{1/2} = x\sqrt{x}$ ni paire ni impaire

6) $f(x) = \underbrace{2x}_{I} + \underbrace{1}_{P}$ ni paire ni impaire

7) $f(x) = \underbrace{2x^2}_{P} + \underbrace{1}_{P}$ est paire

8) $f(x) = \dfrac{x^{\,I}}{\underbrace{x^2+1}_{\text{paire}}}$ est impaire

9) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ est paire

10) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1} \rightarrow$ ni paire ni impaire

11) $f(x) = \sin\circ 2x$ composée.

$f(-x) = \sin(2(-x)) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$.

$\Rightarrow f$ est impaire $\qquad I\circ I \rightarrow I$

9) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ 10) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ 11) $f(x) = \sin(2x)$ 12) $f(x) = \sin(x^2)$

13) $f(x) = \cos(3x)$ 14) $f(x) = \cos(x^3)$ 15) $f(x) = \tan(x)$ 16) $f(x) = \tan(x^2+1)$

17) $f(x) = \ln(x)$ 18) $f(x) = \sin \circ \ln(x)$ 19) $f(x) = \ln \circ \sin(x)$ 20) $f(x) = \exp(x)$

21) $f(x) = \sin \circ \exp(x)$ 22) $f(x) = \exp \circ \cos(x)$

12) $f(x) = \sin(x^2) = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \sin x$ impaire, $v(x) = x^2$ paire

$= \sin x \circ x^2$

$I \circ P$

$f(x) = I \circ P(x)$ $\quad f(-x) = I \circ \underbrace{P(-x)}_{\text{paire}} = I \circ P(x) = f(x)$. est paire

$I \circ I \to I$

$I \circ P \to P$

$I \circ I \circ I \circ I \circ I \circ I \circ P \to P$

$I \circ P \circ I \circ I \to P$

$I \circ I \circ I \circ I \circ I \circ I \to I$

Pour une fonction composée de fonctions admettant une parité la fonction est impaire si toutes les fonctions sont impaires. Si l'une est paire, la composée est paire.

13) $\cos(3x) = \cos x \circ 3x$ est paire

14) $\cos(x^3) = \cos x \circ x^3$ est paire

15) $\tan x = \dfrac{\sin x \;\; I}{\cos x \;\; P}$ est impaire

16) $f(x) = \tan(x^2+1) = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \tan x$, $v(x) = x^2 + 1$

$I \circ P \to P$ : $f$ est paire

17) $f(x) = \ln x$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(-1) \text{ n'existe pas} \end{array}\right\}$ ni paire ni paire

18) $\sin x \circ \ln x = \sin(\ln x) = f(x)$

$\left.\begin{array}{l} f(1) \text{ existe} \\ f(-1) \text{ n'existe pas} \end{array}\right\}$ ni paire ni impaire

19) $\ln \circ \sin(x) = f(x)$ ni paire ni impaire

20) $f(x) = e^x$ ni paire ni impaire

20 bis) $\ln(x^2)$ $\quad N \circ P(-x) = N \circ P(x)$

↳ est paire

21) $\sin[e^x] \to I \circ N$

ni paire ni impaire

22) $f(x) = e^{\cos x}$ $\quad f(-x) = e^{\cos(-x)} = e^{\cos(x)} = f(x)$

est paire

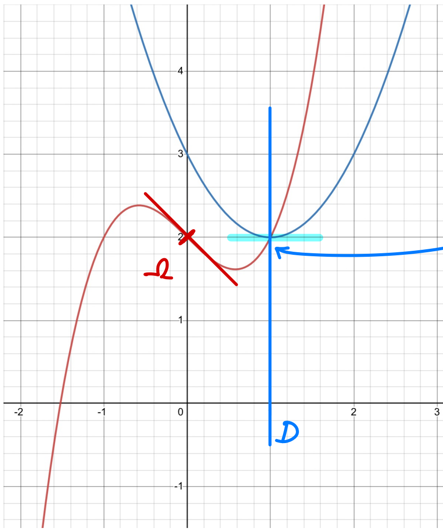
$N \circ P \to P$.

22 bis) $\cos[e^x] = f(x)$ $\quad f(-x) = \cos[e^{-x}] \neq f(x)$

$\neq -f(x)$

2.2 On considère les fonctions $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x^3 - x + 2$ de graphes respectifs $C_1$ et $C_2$. Étudier les éventuels axes ou centres de symétrie de $C_1$ et $C_2$.

« Si $f$ est ni paire ni impaire, sa courbe n'admet aucune symétrie » ⇒ FAUX.




$f(x) = \underbrace{x^2}_{P} \underbrace{- 2x}_{I} \underbrace{+ 3}_{P}$

Ici $f'(x) = 0$

$D : x = x_0$ avec $f'(x_0) = 0$

En $\Omega(x_\Omega ; y_\Omega)$ $g''(x_\Omega) = 0$.

$y_\Omega = g(x_\Omega)$.

$f'(x) = 2x - 2 \iff x_0 = 1$ $D : x = 1$.

$g'(x) = 3x^2 - 1$ $g''(x) = 6x$ $g''(x_\Omega) = 0 \iff x_\Omega = 0$

$y_\Omega = g(0) = 2$

$\Omega(0 ; 2)$

## 3 Périodicité et transformations de graphes

3.1 Étudier la parité et la périodicité des fonctions ci-après et déterminer l'ensemble d'étude restreint.

**1)** $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$ **2)** $f(x) = \cos(3x) + 4\sin(2x)$ **3)** $f(x) = \sin^2(x)$ **4)** $f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$

**5)** $f(x) = 1 + \cos^2(2x)$ **6)** $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ **7)** $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$ **8)** $f(x) = x + \sin(x)$

→ $\cos x$ est paire et $2\pi$-périodique

→ $\sin x$ est impaire et $2\pi$-périodique

→ $\tan x$ est impaire et $\pi$-périodique

→ Si $f(x)$ est $T$-périodique alors $f(\omega x)$ est $\frac{T}{\omega}$-périodique

→ $\sin^2 x = (\sin x)^2$ est $\pi$-périodique

→ $\cos^2 x$ est $\pi$-périodique

→ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (1)

→ $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ (2)

→ $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ (3)

$(1)+(2) \to 2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$(1)-(2) \to \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\cos(2x) = \cos(\omega x)$ avec $\omega = 2$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

→ $\tan^2 x = [\tan x]^2$ est $\pi$-périodique

1) 4) 3) 5) 2) 6) 7) 8)

1) $f(x) = \cos\left(\underbrace{\tfrac{3\pi}{4}x}\right)$ paire

$\omega x$ avec $\omega = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 4}{3\pi} = \frac{8}{3}$

4) $f(x) = \tan\left(\underbrace{\tfrac{x}{4}}\right)$ est impaire

$\omega x = \frac{1}{4} \cdot x \Rightarrow T = \frac{\pi}{1/4} = 4\pi.$

3) $f(x) = \sin^2 x$ est paire et $\pi$-périodique

5) $f(x) = \underbrace{1}_{\text{cte paire}} + \underbrace{\cos^2(2x)}_{\text{paire}}$ est paire

$\omega = 2 \qquad T = \frac{\pi}{2}$

Une constante ne modifie pas la période (+ et − en $x$).

2) $f(x) = \underbrace{\cos(3x)}_{P} + \underbrace{4\sin(2x)}_{I}$ ni paire ni impaire

$f$ est $T$-périodique $\Leftrightarrow \forall x \in D_f \; \exists T \,/\, f(x+T) = f(x).$

Donc si $T$ est période, $2T$ aussi, $3T$ aussi etc....

$\cos(3x)$ : $\frac{2\pi}{3}$ ; $\frac{4\pi}{3}$ ; $\frac{6\pi}{3} = 2\pi.$

$4\sin(2x)$ : $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ; $2\pi.$

$T$ est la plus petite période commune aux deux fonctions.

$\Rightarrow f$ est $2\pi$-périodique

2bis) $f(x) = \cos(4x) + 2\tan(3x).$ ni pair ni impair

$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ; $\pi$ $\qquad$ $\frac{\pi}{3}$ ; $\frac{2\pi}{3}$ ; $\pi$

période commune

$f$ est $\pi$-périodique

**6)** $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ **7)** $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$ **8)** $f(x) = x + \sin(x)$

6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est impaire

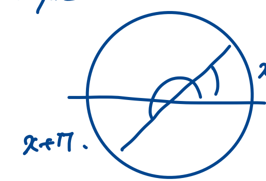
$f$ est au plus $2\pi$-périodique

De plus : $f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ est $\pi$-périodique.

Ou alors $f(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}$

$= \dfrac{-\cos x}{-\sin x}$

$= f(x) \quad \forall x \in D_f.$




$\Rightarrow f$ est $\pi$-périodique.

7) $f(x) = \underbrace{\cos(x)}_{P}\ \underbrace{\sin(x)}_{I}$ est impaire

$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ est $\pi$-périodique

8) $f(x) = \underbrace{x}_{I} + \underbrace{\sin(x)}_{I}$ est impaire

non-périodique

$f$ n'est pas périodique.

3.2 Tracer sur $[-2\ ;\ 6]$ la courbe représentative de la fonction $f$ suivante :

$$f \text{ est 4–périodique et } \begin{cases} f(x) = x \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 1 \text{ si } 1 \leq x < 3 \\ f(x) = 4 - x \text{ si } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

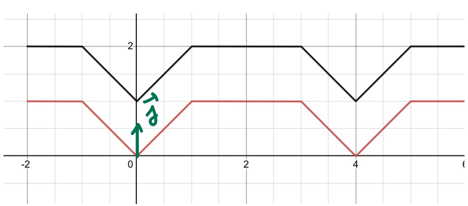
définie par morceaux

et en déduire les graphes des courbes de

(a) $f_1(x) = 1 + f(x)$ et $f_2(x) = -2f(x)$ ; $\mathscr{C}_{f_1}$ $\mathscr{C}_{f_2}$

(b) $g_1(x) = f(x-2)$ et $g_2(x) = f(2x)$. $\mathscr{C}_{g_1}$ $\mathscr{C}_{g_2}$

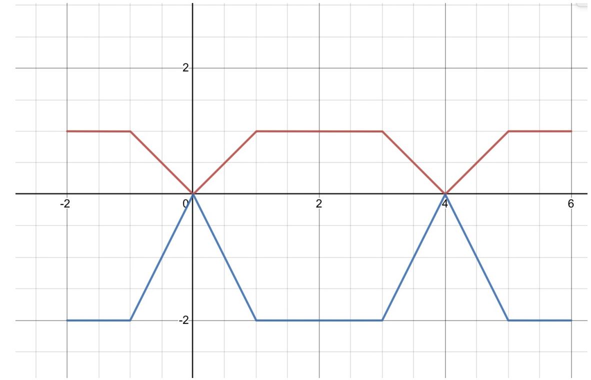
(c) Conclure enfin sur la nature des transformations du graphe $C_f$ associées aux opérations $\lambda \cdot f(x)$, $\lambda + f(x)$, $f(\lambda \cdot x)$ et $f(x - \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.




$\mathscr{C}_{f_1}$

$\mathscr{C}_f$

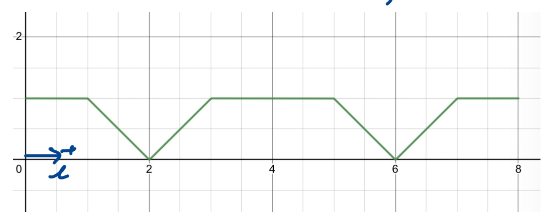
$g(x) = \lambda + f(x)$ $\quad \mathscr{C}_f \to \mathscr{C}_g$ via une translation de $\lambda\vec{j}$




$\mathscr{C}_{f_2}$

$g(x) = \lambda f(x)$ $\quad \mathscr{C}_f \to \mathscr{C}_g$ via une dialatation verticale de $\lambda$.

⚠ Si $\lambda < 0$ il y a une symétrie d'axe $(Ox)$.




$\mathscr{C}_{g_1}$

$g(x) = f(x - \lambda)$ $\quad \mathscr{C}_f \to \mathscr{C}_g$ via une translation de $\lambda\vec{i}$

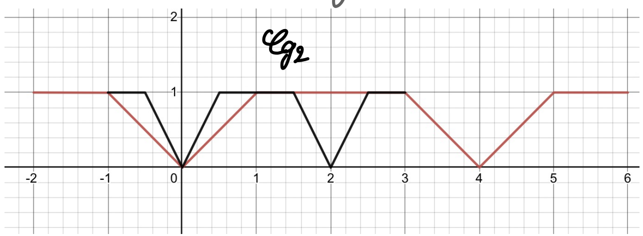
↳ On décale vers la droite en retranchant.

$g_2(x) = f(2x)$

$g_2(0) = f(0)$

$g_2(1) = f(2)$

$g_2(0{,}5) = f(1)$




$g(x) = f(\lambda x)$ $\quad \mathscr{C}_f \to \mathscr{C}_g$ via une contraction horizontale de $\lambda$.
De plus si $\lambda < 0$, on a une symétrie d'axe $(Oy)$.

## 4 Fonctions particulières

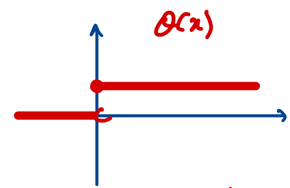
4.1 Soit la fonction de Heaviside $\theta(x)$ définie par

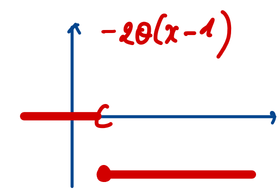
$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

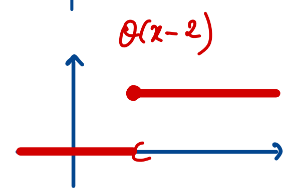
Tracer les fonctions :

(a) $f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$ ;

(b) et $g(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$.



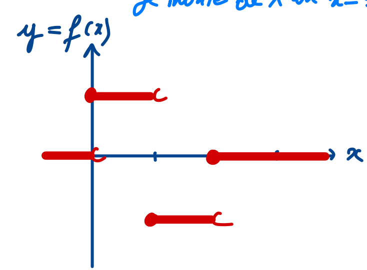




$f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$

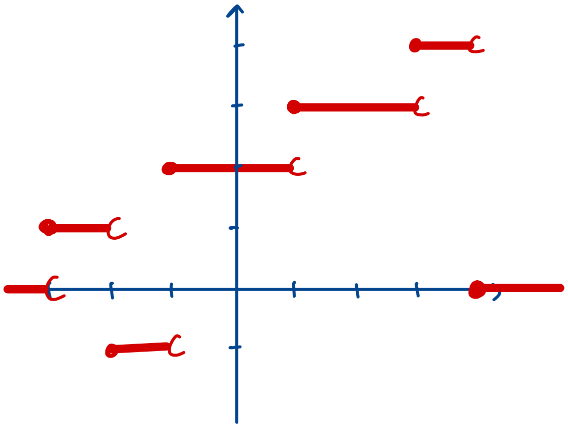
$\lambda\,\theta(x - x_0)$

Je monte de $\lambda$ en $x = x_0$.

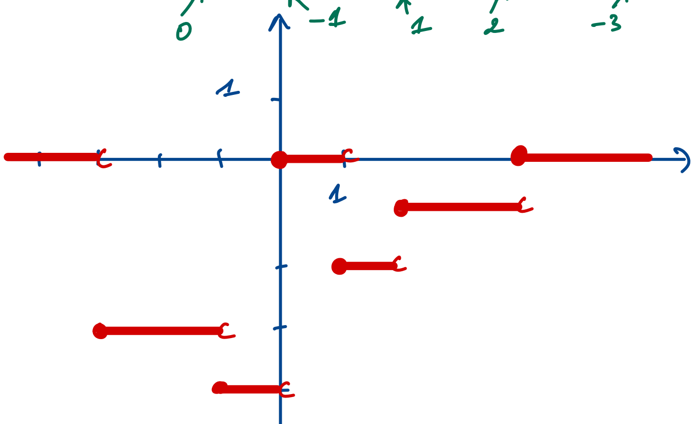


(b) ⚠ à l'ordre des $x_0$.

$$g(x) = \underset{-3}{\theta(x+3)} - \underset{-2}{2\theta(x+2)} + \underset{-1}{3\theta(x+1)} + \underset{1}{\theta(x-1)} + \underset{3}{\theta(x-3)} - \underset{4}{4\theta(x-4)}$$



(sup) $$h(x) = \underset{0}{4\theta(x)} - \underset{-1}{\theta(x+1)} - \underset{1}{2\theta(x-1)} + \underset{2}{\theta(x-2)} - \underset{-3}{3\theta(x+3)} + \underset{4}{\theta(x-4)}$$




4.2 On souhaite créer une fonction causale $g(x)$ qui soit :

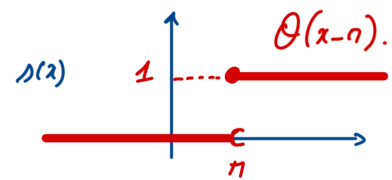
- nulle pour $x < \pi$ ;
- sinusoïdale, $2\pi$-périodique, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2 pour $x \geq \pi$ ;
- et telle que $g(\pi) = 2$.

(a) Tracer le graphe de $g(x)$.

(b) Déterminer $g(x)$ à l'aide de la fonction de Heaviside.

$$g(x) = \underset{\text{support}}{s(x)} \times \underset{\text{fonction à "activer"!}}{f(x)}.$$

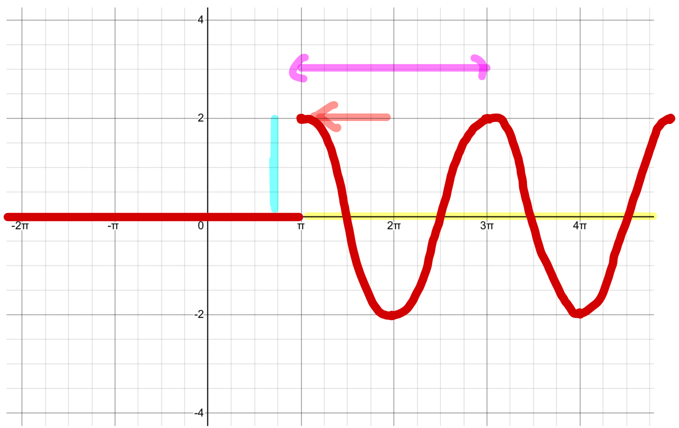
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \pi \\ f(x) & \text{si } x \geq \pi. \end{cases} = s(x) \times f(x)$$



$s(x)$ est plus facile à gérer s'il vaut 0 ou 1.

fonction éteinte — fonction allumée

$g(x) = s(x) \times [V_m + A\cos(\omega x + \varphi)]$ ou $g(x) = s(x) \times [V_m + A\sin(\omega x + \varphi)]$




$s(x) = \theta(x-\pi)$

$g(x) = \theta(x-\pi) \times [0 + 2\cos(x+\varphi)]$ OU $g(x) = \theta(x-\pi) \times 2\sin(x+\varphi)$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

WANTED : $\varphi$. $g(\pi) = 2 \Leftrightarrow g$ est maximale en $x = \pi$.

$\cos(x+\varphi) = 1$ $\sin(x+\varphi) = 1$ pour $x = \pi$.

$\Leftrightarrow \cos(\pi+\varphi) = \cos 0$

$\begin{cases} \pi + \varphi = 0 \\ \pi + \varphi = -0 \end{cases}$ $\varphi = -\pi$

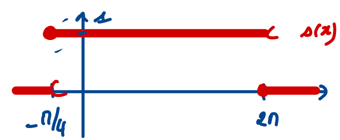
$\sin(\pi+\varphi) = \sin(\pi/2) = 1$

$\begin{cases} \pi + \varphi = \pi/2 \\ \pi + \varphi = \pi/2 \end{cases}$ $\varphi = -\pi/2$.

$\Rightarrow \boxed{g(x) = \theta(x-\pi)\cos(x-\pi)}$ $\boxed{g(x) = \theta(x-\pi)\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

4.3 Exprimer la fonction $f$ ayant les caractéristiques suivantes :

— $g$ est sinusoïdale, de valeur moyenne 2, d'amplitude 3, et de période $4\pi/3$ pour $x \in [-\pi/4\,; 2\pi]$ ;
— en dehors de ces valeurs de $x$, $g$ est nulle ;
— et $g$ est maximale en $x = 2\pi/9$.




$s(x) = 1\,\theta\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\,\theta(x - 2\pi)$
$= \theta\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \theta(x - 2\pi)$

$f(x) = V_m + A\cos(\omega x + \varphi)$
$= 2 + 3\cos\left(\frac{3}{2}x + \varphi\right)$ car $\omega = \frac{2\pi \cdot 3}{4\pi} = \frac{3}{2}$

$f(x) = 2 + 3\sin\left(\frac{3}{2}x + \varphi\right)$

Recherche de $\varphi$ : En $x = \frac{2\pi}{9}$, le sin et le cos valent 1.

$\cos\left(\frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{9} + \varphi\right) = \cos(0)$

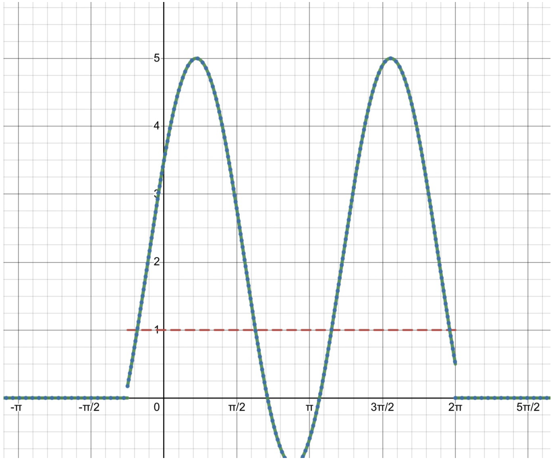
$\frac{\pi}{3} + \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

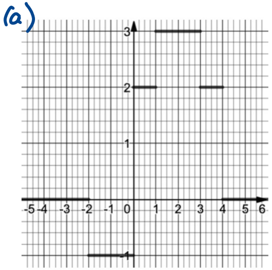
$\boxed{g(x) = \left[\theta\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \theta(x - 2\pi)\right] \times \left[2 + 3\cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}$

$\boxed{g(x) = \left[\theta\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \theta(x - 2\pi)\right] \times \left[2 + 3\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}$

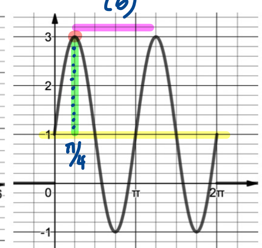



4.4 Donner les équations des courbes représentées sur les figures ci-dessous.

(a)




(b)




(a) $f(x) = -\theta(x+2) + 3\theta(x) + \theta(x-1) - \theta(x-3) - 2\theta(x-4)$

(b) $s(x) = \theta(x) - \theta(x-2\pi)$

$g(x) = s(x) \times f(x)$

$$f(x) = V_m + A\cos(\omega x + \varphi)$$
$$= 1 + 2\cos(2x + \varphi)$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$\cos(2x+\varphi) = 1$ pour $x = \pi/4$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos(0) = 1$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$g(x) = [\theta(x) - \theta(x-2\pi)] \cdot \left[1 + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$g(x) = [\theta(x) - \theta(x-2\pi)] \cdot [1 + 2\sin(2x)]$$

Outils mathématiques 1 — TD 6 : Branches infinies

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.
   (a) Montrer que la droite $D$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $C$ représentative de $f$ quand $x \to +\infty$, et étudier la position de $C$ par rapport à $D$ quand $x \to +\infty$ ;
   (b) puis déterminer l'équation de l'asymptote à $C$ en $-\infty$.

(a) Je dois montrer que $\lim\limits_{+\infty} \underbrace{f(x)}_{\text{ordonnée de } \mathcal{C}.} - \underbrace{2x}_{\text{ordonnée de } D.} = 0$

$$\lim_{+\infty} f(x) - 2x = \lim_{+\infty} \underbrace{-x}_{\to -\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to +\infty} = \text{F.I } \text{"}\infty - \infty\text{"}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{\underbrace{x + \sqrt{x^2-1}}_{\to +\infty}}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\underbrace{x + \sqrt{x^2-1}}_{\to +\infty}} = 0^-$$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) - 2x = 0^-$

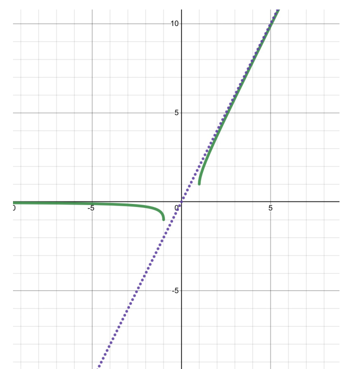
La droite $D: y = 2x$ est A.O à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. De plus $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$.

(b) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to +\infty.} = \text{F.I } \infty - \infty.$

$$= \lim_{-\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\underbrace{x - \sqrt{x^2-1}}_{\neq 0}}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1}{\underbrace{x - \sqrt{x^2-1}}_{\to -\infty}} = 0^-$$

Donc $(Ox): y = 0$ est A.H à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. De plus $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $(Ox)$.



Etude des branches infinies : checklist.

1. $\mathcal{D}f$
2. Calcul des limites dans les trous de $\mathcal{D}f$.
3. Equation de l'asymptote
4. Positions relatives.

2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2-5x+3} \qquad f_2(x) = \frac{x^3+x+7}{2x^2+1} \qquad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \qquad f_4(x) = \frac{x^2+x\ln(x)}{x+1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x}+2}{e^x-2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x}$$

1. $f(x) = \dfrac{2}{2x^2-5x+3}$ $\qquad \mathcal{D}f = ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; \frac{3}{2}[ \cup ]\frac{3}{2} ; +\infty[$

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$

En effet $\mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{x \,/\, 2x^2-5x+3=0\}$

$\Delta = 1 = 1^2 \rightarrow x_1 = \dfrac{+5-1}{4} = 1$

$x_2 = \dfrac{+5+1}{4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5.$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{2x^2-5x+3} \Leftrightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{2x^2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0^+$

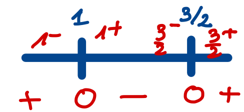
$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0^+$

$(Ox)$ est A.H à $\mathcal{C}f$ en $\pm\infty$ et $\mathcal{C}f$ est au-dessus de $(Ox)$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{1} f(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{\overset{>0}{2}}{\underset{\to 0}{2x^2-5x+3}} = \infty.$

$Sg(f(x)) = Sg(2x^2-5x+3)$

signe

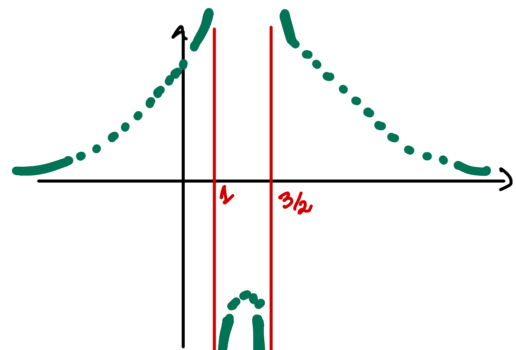



$\lim\limits_{1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{1^-} f(x) = +\infty.$

$D_1$ : $x = 1$ est A.V à $\mathcal{C}f$.

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{\frac{3}{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty.$

$D_2$ : $x = \frac{3}{2}$ est A.V à $\mathcal{C}f$.



2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2-5x+3} \qquad f_2(x) = \frac{x^3+x+7}{2x^2+1} \qquad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \qquad f_4(x) = \frac{x^2 + x\ln(x)}{x+1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x}+2}{e^x-2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x}$$

2. $f(x) = \dfrac{x^3+x+7}{2x^2+1}$

$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$

$\left.\begin{array}{l} \deg N = 3 \\ \deg D = 2 \end{array}\right\}$ $\deg(f) = 1$ linéaire. (droite)

"À l'infini" $f(x) \sim \dfrac{x^3}{2x^2} \sim \dfrac{x}{2}$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ $\Rightarrow$ Recherche d'A.O. d'éq $mx+p$

COURS

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$

$p = \lim\limits_{+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3+x+7}{2x^2+1} - \dfrac{1}{2}x = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3+x+7-x^3-x/2}{2x^2+1}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x/2+7}{2x^2+1} = 0^+$

$D : y = \dfrac{x}{2}$ est A.O à $C_f$ en $+\infty$ et $C_f$ est au-dessus.

Même démarche en $-\infty$ :

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

$m = \dfrac{1}{2}$

$p = 0^-$

$D : y = \dfrac{x}{2}$ est A.O à $C_f$ en $-\infty$ et $C_f$ est en-dessous

3. $f(x) = x - \sqrt{2x}$

$D = [0;+\infty[$

$\boxed{1}$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x - \sqrt{2x} = \lim\limits_{+\infty} x - (2x)^{1/2} \Leftrightarrow \lim\limits_{+\infty} x = +\infty.$

$\rightarrow$ Recherche d'A.O.

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 = m$

$p = \lim\limits_{+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{+\infty} x - \sqrt{2x} - x = \lim\limits_{+\infty} -\sqrt{2x} = -\infty$

$p \to -\infty$ $\Rightarrow$ Pas d'A.O mais direction asymptotique $y = x$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$

$D = ]0;+\infty[ \setminus \{-1\} = ]0;+\infty[$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$

$$\lim_{+\infty} \frac{x^2+x\ln x}{x+1} = \lim_{+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}[1+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}]}{\cancel{x}[1+\underbrace{1/x}_{\to 0}]} = +\infty.$$

→ Recherche d'A.O.

$$m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}[\underbrace{1+\ln x/x}_{\to 1}]}{\cancel{x^2}(\underbrace{1+1/x}_{\to 1})} = 1 = m$$

$$p = \lim_{+\infty} f(x) - mx = \lim_{+\infty} \frac{x^2+x\ln x}{x+1} - x = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x\ln x - \cancel{x^2} - x}{x+1}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x}[\underbrace{\ln x - 1}_{\to +\infty}]}{\cancel{x}[\underbrace{1+1/x}_{\to 1}]} = +\infty$$

$p \to +\infty$ → Pas d'A.O mais une direction asymptotique $y = x$.

$\boxed{2}$ $$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{\underbrace{x^2}_{\to 0}+\underbrace{x\ln x}_{\to 0}}{\underbrace{x+1}_{\to 1}} = 0.$$

Pas d'A.V mais $C_f \to O(0;0)$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x}+2}{e^x-2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x}$$

5. $D_f = ]-\infty; \ln(2)[ \cup ]\ln(2); +\infty[$

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$

$e^{2x} = [e^x]^2$

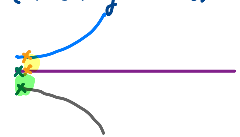
$$\lim_{+\infty} \frac{e^{2x}+2}{e^x-2} = \lim_{+\infty} \frac{\overset{e^x}{\cancel{e^{2x}}}[\underbrace{1+2/e^{2x}}_{\to 1}]}{\underset{1}{\cancel{e^x}}[\underbrace{1-2/e^x}_{\to 1}]} = +\infty.$$

En $+\infty$ $f(x) \sim e^x$ donc $C_f$ admet une branche parabolique $(Oy)$.

En effet : $$m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\overset{e^x}{\cancel{e^{2x}}}[\underbrace{1+2/e^{2x}}_{\to 1}]}{x\cancel{e^x}[\underbrace{1-2/e^x}_{\to 1}]} = +\infty.$$

$\boxed{2}$ $$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+2}{\underbrace{e^x}_{\to 0}-2} = -1$$

$\Leftrightarrow D : y = -1$ est A.H à $C_f$.



$$\lim_{-\infty} \underbrace{f(x)}_{C_f} - \underbrace{(-1)}_{D} = \lim_{-\infty} \frac{e^{2x}+2}{e^x-2} + 1$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{e^{2x}+\cancel{2}+e^x-\cancel{2}}{e^x-2}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{\overbrace{e^{2x}+e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x-2}_{<0}} = 0^-$$

Donc $C_f$ est au-dessous de $D$.

$\boxed{3}$

$$\lim_{\ln(2)^{\pm}} \frac{\overbrace{e^{2x}+2}^{\to 6>0}}{e^{x}-2} = \pm\infty.$$

$e^x - 2 \to 0^+$ si $x \to \ln 2^+$

$0^-$ si $x \to \ln 2^-$

6. $f(x) = 2x - \cos x$ $\quad D = ]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{+\infty} \underbrace{2x}_{\to +\infty} - \underbrace{\cos x}_{\text{bornée}} = +\infty.$ $\quad \to$ Recherche d'A.O.

$$m = \lim_{+\infty} \frac{2x - \cos x}{x} = \lim_{+\infty} 2 - \frac{\cos x}{x} = 2 = m$$

$$\frac{\cos x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \times \underbrace{\cos x}_{\text{bornée}}$$

$p = \lim\limits_{+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{+\infty} 2x - \cos x - 2x = \lim\limits_{+\infty} -\cos x$ n'existe pas.

p n'existe pas

Pas d'A.O mais direction asymptotique $y = 2x$

La même démarche en $-\infty$ donne $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad m=2$ et p n'existe pas

$\Rightarrow$ Même conclusion.

$$f_5(x) = \frac{e^{2x}+2}{e^x-2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x}$$

7. $f(x) = 2^x - e^x$

$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$ $\quad \boxed{2} \quad \boxed{1}$

$e \simeq 2{,}72 > 2$

$$\lim_{+\infty} 2^x - e^x = \lim_{+\infty} e^x\left[\frac{2^x}{e^x} - 1\right] = \lim_{+\infty} \underbrace{e^x}_{\to +\infty}\underbrace{\left[\Big(\underbrace{\frac{2}{e}}_{<1}\Big)^x - 1\right]}_{\to -1} = -\infty.$$

$\left(\frac{2}{e}\right)^x \to 0$

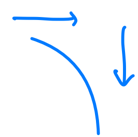
« Plus je vais vers la droite plus $C_f$ descend »

Q: Taux de descente ? $m = ?$

$$m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to +\infty}\underbrace{\left[\left(\frac{2}{e}\right)^x - 1\right]}_{\to -1} = -\infty.$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

« Plus on va vers la droite, plus $C_f$ descend »



$\Rightarrow$ En $+\infty$, pas d'A.O mais une branche parabolique de direction $(Oy)$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} 2^x - e^x = 0$

$\Rightarrow$ $(Ox)$ est A.H à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

Positions relatives:

$e > 2$

$e^x > 2^x$ si $x > 0$

$e^x < 2^x$ si $x < 0$

$2^x - e^x > 0$ si $x < 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{-\infty} f(x) = 0^+$ Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $(Ox)$

8. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{1 - x}$

$\mathcal{D}_f = ]0;+\infty[ \setminus \{1\} = ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x \ln x}{1 - x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x} \underbrace{\ln x}_{\to +\infty}}{\cancel{x}\underbrace{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}_{\to -1}} = -\infty.$

$\Rightarrow$ Recherche d'A.O.

$m$ = taux de descente $\qquad m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot x} = 0.$ $\quad (\to 0,\ \to -1)$

Plus je vais vers la droite et moins ça descend.

$\rightarrow$ Pas d'A.O. mais une branche parabolique de direction $(Ox)$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{\overbrace{x \ln x}^{\to 0}}{\underbrace{1 - x}_{\to 1}} = 0$

$\Rightarrow$ Pas d'A.V mais $\mathcal{C}_f \to (0;0)$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{1} f(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{\overbrace{x \ln x}^{\to 0}}{\underbrace{1 - x}_{\to 0}} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ $\rightarrow$ théorème de l'Hospital

$= \lim\limits_{1} \dfrac{\overbrace{\ln x + 1}^{\to 1}}{-1} = -1 \qquad (x \ln x)' = \ln x + x\dfrac{1}{x}$

$(1 - x)' = -1$

Pas d'A.V mais $\mathcal{C}_f \to (1;-1)$

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ prolonge $f$ par continuité.

4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

(a) Déterminer les ensembles de définition de $f$ et $g$ ;

(b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.

(c) Peut-on parler de branches infinies pour $f$ et $g$ quand $x \to 0$ ?

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ $\qquad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$

$f$ est paire $\qquad g$ est paire

1 En $+\infty$ (même chose en $-\infty$)

$$\lim_{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \underbrace{\sin x}_{\text{bornée}} = 0.$$

(Ox) est A.H à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Positions relatives :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{0^-} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{0^+}$$

$\Rightarrow$ Pas de positions relatives fixes.

$$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0} \underbrace{(1-\cos x)}_{\text{bornée}} = 0$$

$\Rightarrow$ (Ox) est A.H à $\mathcal{C}_g$ en $\pm\infty$.

Positions relatives :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$
$$0 \leq 1-\cos x \leq 2$$
$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0^+}$$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} g(x) = 0^+ \Leftrightarrow \mathcal{C}_g$ est au-dessus de (Ox).

2 En 0.

2 En 0 $\lim_{0} \frac{\sin x}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \to$ L'Hospital

$$= \lim_{0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$\mathcal{C}_f \to (0;1)$

$$\lim_{0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \to \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

1

$\mathcal{C}_g \to (0;\frac{1}{2})$

(c) Non, car les courbes se rapprochent de points (elles ne partent pas vers l'infini).

5. La fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?

$$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \to \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}}{1} = \lim_{0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \to \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{0} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}} = \lim_{0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$\lim_{0} f(x)$ n'existe pas.

Outils mathématiques 1 — TD 7 : Continuité, dérivabilité et fonctions réciproques

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

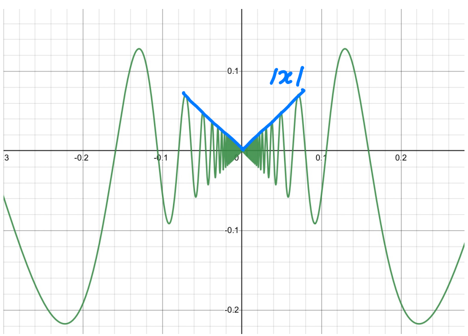
1. Donner une approximation à $10^{-2}$ près des solutions de l'équation $x^2 = -\ln(x)$.

2. Prolonger par continuité chacune des fonctions $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de leurs prolongements par continuité.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ $\quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$

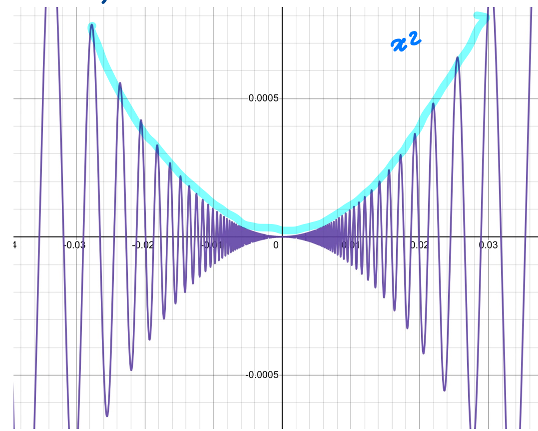
$$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \underset{\to 0}{x} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$




$$\lim_{0} g(x) = \lim_{0} \underset{\to 0}{x^2} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$




$$\lim_{0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{0} \frac{x \sin(1/x) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{0} \sin\Big(\underset{\to \pm\infty}{\frac{1}{x}}\Big) \quad \text{n'existe pas.}$$

$\Rightarrow \tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{0} \frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = \lim_{0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$\Rightarrow \tilde{g}$ est dérivable en $0$ et $\tilde{g}'(0) = 0$.

3. Lorsque c'est possible, prolonger par continuité les fonctions suivantes :

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x} \quad \text{(b)}\ g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

$f$ est $2\pi$-périodique $\Rightarrow I = [-\pi; +\pi]$

Dans $I$, $f$ n'est pas définie en $0$.

$$\Rightarrow \lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{1-\cos x}_{\to 0}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \to \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{0} \frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{\sin x}_{\to 0}} = \pm\infty.$$

$\Rightarrow f$ n'est pas prolongeable par continuité en $0\,[2\pi]$.

(b) $\dfrac{1}{\underbrace{1-x}_{x \neq 1}} - \dfrac{n}{\underbrace{1-x^n}_{\substack{x\neq 1 \\ x \neq -1 \text{ si } n \text{ est pair}}}}$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \qquad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{1} g(x) = \lim_{1} \frac{1}{\underbrace{1-x}_{\to 0}} - \frac{3}{\underbrace{1-x^3}_{\to 0}} = \text{“}\infty - \infty\text{”}$$

$$= \lim_{1} \frac{1-x^3-3(1-x)}{(1-x)(1-x^3)} = \lim_{1} \frac{-x^3+3x-2}{x^4-x^3-x+1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$\to$ L'Hospital

$$= \lim_{1} \frac{-3x^2+3}{4x^3-3x^2-1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$\hookrightarrow$ L'Hospital

$$= \lim_{1} \frac{-6x}{12x^2-6x} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \neq 1 \\ -1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

4. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f$ définie par morceaux par

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x < 1 \\ x^2-1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

$f$ est continue en $1 \iff \lim_{1} f(x) = f(1)$

$f$ est dérivable en $1 \iff \lim_{1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = P$ existe et est finie.

$\lim_{1} f(x) = ?$ → Cela dépend si $x \to 1^+$ ou $x \to 1^-$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^+} x^2 - 1 = 0 \\ \lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^-} x - 1 = 0\end{array}\right\} \quad \lim_{1} f(x) = 0 \quad \text{et } f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{1} f(x) = f(1)$$

Donc $f$ est continue en $x = 1$.

Montrons que $f$ n'est pas dérivable

$$\lim_{1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

$$\neq$$

$$\lim_{1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{1} \frac{\cancel{x-1} - 0}{\cancel{x-1}} = 1$$

$\lim_{1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'existe pas donc $f$ n'est pas dérivable en 1.

Autre méthode :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \longrightarrow 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 2 \end{cases}$$

5. À l'aide des formules de dérivées usuelles, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

**1)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ **2)** $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$ **3)** $f(x) = \exp\left[\tan\left(x^2 + 1\right)\right]$

**4)** $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ **5)** $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos^3(x)$ **6)** $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

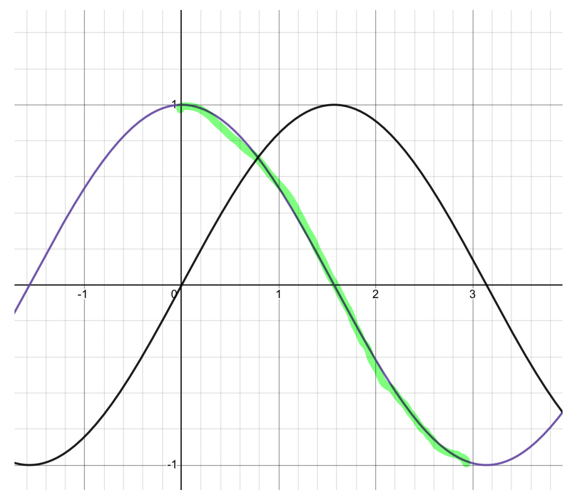
**7)** $f(x) = \arctan(3x)$ **8)** $f(x) = \arctan(\cancel{3x}\, x^3)$ **9)** $f(x) = \arccos(2x + 1)$

**10)** $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$ **11)** $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

Correction en ligne

Question supplémentaire : $\mathcal{D}_f$ ?

$\arccos(x) = ?$ « Quel est l'angle de $[0 ; \pi]$ qui a pour cosinus $x$ ? »



$\mathcal{D}_{\arccos} = [-1;1]$

$\arcsin(x) = ?$ « Quel est l'angle de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ qui a pour sinus $x$ ? ».

$\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1;1]$

$\arctan x = ?$ « Quel est l'angle de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ qui a pour tangente $x$ ? »

$\mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$.

Dérivées:

$$\begin{cases} \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$f(x) = u \circ v \circ w \circ g(x)$

$f'(x) = g'(x) \times w' \circ g(x) \times v' \circ w \circ g(x) \times u' \circ v \circ w \circ g(x)$.

**7)** $f(x) = \arctan(3x)$ **8)** $f(x) = \arctan(\cancel{3x})$ $x^3$ **9)** $f(x) = \arccos(2x+1)$

**10)** $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$ **11)** $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

→ Dérivées

→ $\mathcal{D}_f$.

$\arctan(u(x)) = \arctan \circ u(x) \Rightarrow \arctan'(u) = u' \times \dfrac{1}{1+u^2}$

7) $f(x) = \arctan(3x)$ $f'(x) = \dfrac{3}{1+9x^2}$

8) $f(x) = \arctan(x^3)$ $f'(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^6}$.

9) $f(x) = \arccos(2x+1)$ $f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$

$1-(2x+1)^2 = 1-4x^2-4x-1 = 2^2(-x^2-x)$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{-x^2-x}}$

10) $f(x)= \arcsin(x^2)$ $\quad f'(x)= \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

11) $f(x)= \arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = u \circ v \circ w\,(x)$

avec
$$\begin{cases} u(x)= \arctan(x) \rightarrow u'(x)= \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x)= \sqrt{x} \rightarrow v'(x)= \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ w(x)= \dfrac{1+x}{1-x} \rightarrow w'(x)= \dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{2}{(1-x)^2}}_{w'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}}_{v'\circ w(x)} \times \underbrace{\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2}}_{u'\circ v\circ w(x)}$$

$$f'(x)= \frac{1}{(1-x)^{\cancel{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ \frac{2}{\cancel{1-x}}} = \frac{1}{2(1-x)\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}}$$

$$1+\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x} = \frac{2}{1-x}$$

$\sqrt{1-x}\ \sqrt{1-x}$

$$f'(x)= \frac{1}{2\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$$

## Ensembles de définition :

7) $f(x)= \arctan(3x)$ $\quad D_f = \mathbb{R}.$

8) idem

9) $\arccos(2x+1)$ $\quad D_f = \{x \,/\, \underbrace{-1 \leq 2x+1 \leq 1}\}$

$-2 \leq 2x \leq 0$

$= [-1;0].$

10). $f(x)= \arcsin(x^2)$ $\quad -1 \leq x^2 \leq 1$ trop grand.

$-1 \leq x \leq 1$

$D_f = [-1;1].$

11) $f(x)= \arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\quad D_f = \left\{x \,/\, \dfrac{1+x}{1-x} \geq 0 \text{ et } x \neq 1\right\}$

$\mathbb{R}$

Ex: Signe de $\dfrac{x-7}{4x+9}$ ?

$7 \qquad -9/4$

C'est le signe de $(x-7)(4x+9)$.

$\times$

$4x^2$

$\dfrac{x-7}{4x+9} \geqslant 0 \iff \left]-\infty; -\frac{9}{4}\right[ \cup \left]7;+\infty\right[$

$\Rightarrow$ On utilise la règle du signe du polynôme de degré 2.

$\dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \iff x \in [-1;1[$

$a=-1$

$\mathcal{D}f = [-1;1[$.

6. Remplir le tableau ci-dessous :

| $x$ | -1 | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | -1/2 | 0 | 1/2 | $\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arccos($x$) | $\pi$ | $5\pi/6$ | $3\pi/4$ | $2\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi/3$ | | $\pi/4$ | $\pi/6$ | $0$ | |
| arcsin($x$) | $-\pi/2$ | $-\pi/3$ | $-\pi/4$ | $-\pi/6$ | $0$ | $\pi/6$ | | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | |
| arctan($x$) | $-\pi/4$ | | | | $0$ | | $\pi/6$ | | | $\pi/4$ | $\pi/3$ |

1. Donner une approximation à $10^{-2}$ près des solutions de l'équation $x^2 = -\ln(x)$.

On procède par dichotomie.

$f(x) = x^2 + \ln x$ Wanted: $x \,/\, f(x) = 0$.

Combien de solutions ?

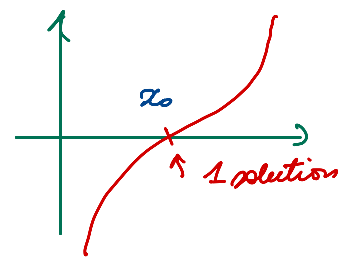
$\mathcal{D}f = ]0;+\infty[$

$\lim\limits_{0} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

A.V $x=0$. $\qquad$ Branche parabolique $(Oy)$ $(x^2)$

$f$ continue sur $\mathcal{D}f$.

$f$ Monotone ? $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ sur $\mathcal{D}f$.




$f(1) = 1 > 0$.

$x_0 \in ]0;1[$

$f(0,5) < 0$

$\Rightarrow x_0 \in ]0,5;1[$

etc....

$x_0 \in ]0,65; 0,66[$

Outils mathématiques — TD 8 : Primitives et intégrales #1

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

### Partie 1

1. On considère la figure 1. Calculer la surface teintée en rouge sachant que $f(x) = \frac{1}{5x}$ et $g(x) = -x^2 + 0,2x + 1$.

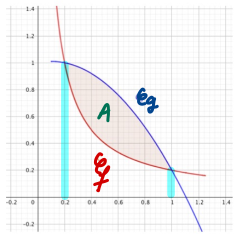



FIGURE 1 : Aire à calculer

$$A = \int_{0,2}^{1} g(x)\,dx - \int_{0,2}^{1} f(x)\,dx = \int_{0,2}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{0,2}^{1} \left(-x^2 + 0,2x + 1 - \frac{1}{5x}\right) dx$$

1. Est-ce une forme immédiate ?

→ élémentaire : $x \to \frac{x^2}{2}$ $\quad \cos x \to \sin x$

→ usuelle : $\boxed{1}$ $u'u^n \to \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$\boxed{2}$ $v' \times u' \circ v \to u \circ v$

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + 0,1x^2 + x - \frac{1}{5}\ln|x|\right]_{0,2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 0,1 + 1 - \frac{\ln(1)}{5}\right) - \left(-\frac{0,2^3}{3} + 0,1 \times 0,2^2 + 0,2 - \frac{\ln(0,2)}{5}\right)$$

$$= \frac{212}{375} + \frac{\ln(0,2)}{5} \simeq 0,243 \text{ UA}.$$

$-4x^{-2}$

2. Déterminer la primitive $F$ de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - \frac{4}{x^2}$ telle que $F(1) = -1$.

fixe la valeur de la constante d'intégration.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{4}{x} + k$$

$$x^n \longrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{si } n \neq -1$$

$k$ est telle que $F(1) = -1$

$$F(1) = \frac{1}{3} + 1 + 4 + k = \frac{16}{3} + k$$

$$F(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{16}{3} + k = -1 \Rightarrow k = -\frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{4}{x} - \frac{19}{3}}$$

3. Déterminer la primitive $G$ de la fonction $g(t) = 3 \cdot \cos(3t)$ telle que $G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

① Est-ce une forme immédiate ?

→ On suppose que c'est la forme ② ($v' \times u' \circ v$) avec

Supposition 1 : $v(t) = 3t$

Supposition 2 : $u'(t) = \cos(t) \rightarrow u(t) = \sin(t)$

Calcul : ALORS $v'(t) = 3$

Donc $v' \times u' \circ v = 3 \times \cos(3t)$

$\underbrace{g(t)}_{\text{CQJVF}} = \underbrace{v' \times u' \circ v(t)}_{\text{CQJSF}}$

$G(t) = u \circ v(t) + k$

$= \sin(3t) + k$

$G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \iff \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)}_{=1} + k = 1 \iff k = 0.$

$\Rightarrow \boxed{G(t) = \sin(3t) + 0.}$

Question : Soit $h(x) = x \exp(x^2)$. Déterminer une primitive quelconque de $h(x)$.

Je suppose que c'est une forme $v' \times u' \circ v$ avec

$v(x) = x^2$

$u'(x) = \exp(x) \rightarrow u(x) = \exp(x)$

$\Rightarrow v'(x) = 2x$ et $v' \times u' \circ v(x) = 2x \exp(x)$

$\Rightarrow \underbrace{h(x)}_{\text{CQJVF}} = \frac{1}{2} \times \underbrace{v' \times u' \circ v(x)}_{\text{CQJSF}}$

$H(x) = \frac{1}{2} u \circ v(x) + 0 = \frac{\exp(x^2)}{2} + 0.$

Déterminer une primitive quelconque de

$f(x) = 4x \sin(x^3)$.

Je suppose que c'est une forme $v' \times u' \circ v(x)$ avec

2 suppositions $\left( \begin{array}{l} v(x) = x^3 \\ u'(x) = \sin(x) \end{array} \right.$ 1 calcul $\Rightarrow v'(x) = 3x^2$

$\Rightarrow$ CQJSI $= v' \times u' \circ v(x) = 3x^2 \sin(x^3)$

ce que je sais faire

$f(x) = \frac{4}{3x} \times v' \times u' \circ v$

C'est une fonction $\Rightarrow$ STOP.

**Partie 2**

Rechercher les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 2) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 3) $f(x) = \sin x - 2\cos x$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ 5) $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$ 6) $f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$

7) $f(x) = (x-9)^3$ 8) $f(x) = \sin x \cos^2 x$ 9) $f(x) = x\left(x^2+1\right)^2$

10) $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$ 11) $f(x) = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$ 12) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

13) $f(x) = \frac{x}{(x^2+3)^3}$ 14) $f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3$ 15) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

1) $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + x + k \quad k \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} + k$

$x^{-1/2} \longrightarrow \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$

3) $F(x) = -\cos x - 2\sin x + k$

4) $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} + k$

5) $F(x) = x - \tan(x) + k$

6) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$ $\rightarrow v' \times u' \circ v$ ?

S1 $\rightarrow v(x) = \frac{x-\pi}{4} = \frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}$

S2 $\rightarrow u'(x) = \cos(x)$

Calcul : $v'(x) = \frac{1}{4}$

CQJSF : $v' \times u' \circ v = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$ $f(x) = 4 \times v' \times u' \circ v$

$\Rightarrow F(x) = 4\, u \circ v(x) + k = 4\sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) + k.$

① Est-ce une forme immédiate ? $\rightarrow u'u^n$ → Suppositions en rouge.

7) $f(x) = (x-9)^3$ $n = 3$, $u = x - 9$

$\Rightarrow u' = 1 \quad \Rightarrow u'u^n = 1(x-9)^3$

sois

$f(x) = 1\, u'u^n \quad \Rightarrow F(x) = 1\,\frac{u^{n+1}}{n+1} + k = \frac{(x-9)^4}{4} + k.$

8) $f(x) = (\sin x)(\cos x)^2$ $n = 2$, $u = \cos x$

$\Rightarrow u' = -\sin x \quad \Rightarrow u'u^n = -\sin x \cdot \cos^2 x$

$f(x) = -1\, u'u^n \quad \Rightarrow F(x) = -1\,\frac{u^{n+1}}{n+1} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + k.$

9) $f(x) = x\,(x^2+1)^2$

$\rightarrow$ 1 Forme $u'u^n$ ?

$n = 2$

$u = x^2 + 1$

$u' = 2x \quad \Rightarrow \quad u'u^n = 2x\,(x^2+1)^2$.

$f(x) = \frac{1}{2}\, u'u^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^3}{3} + k$

cote

$= \frac{(x^2+1)^3}{6} + k.$

10) $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$

$n = 4$

$u = 1 + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow u'u^n = -\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$

$f(x) = -1\, u'u^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = -1\, \frac{(1+1/x)^5}{5} + k$

👌😎👍🎉

$= -\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5 + k.$

11) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

$n = 2$

$u = \sqrt{x} + 1$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10) $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ **11)** $f(x) = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$ **12)** $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

13) $f(x) = \frac{x}{(x^2+3)^3}$ **14)** $f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3$ **15)** $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

16) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 17) $f(x) = x^2(x+1)^2$ 18) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow u'u^n = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(\sqrt{x}+1)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2\, u'u^n$

$F(x) = 2\, \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{3} + k = \frac{2}{3}\,(\sqrt{x}+1)^3 + k.$

12) $f(x) = \sin x \, \cos^{-2} x$

$n = -2$

$u = \cos x$

$\Rightarrow u' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad u'u^n = -\sin x\, \cos^{-2} x$

$f(x) = -1\, u'u^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{\cos^{-1} x}{-1} + k = \frac{1}{\cos x} + k.$

13) $f(x) = \frac{x}{(x^2+3)^3} = x\,(x^2+3)^{-3}$

$n = -3$

$u = x^2 + 3$

$\Rightarrow u' = 2x \quad \Rightarrow \quad u'u^n = 2x\,(x^2+3)^{-3}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\, u'u^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+3)^{-2}}{-2} + k = -\frac{1}{4(x^2+3)^2} + k$

14). $f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3 = \frac{x^3}{(x^4+1)^3} = x^3(x^4+1)^{-3}$

$n = -3$
$u = x^4+1$

$\Rightarrow u' = 4x^3 \Rightarrow u'u^n = 4x^3(x^4+1)^{-3}$

$f(x) = \frac{1}{4} u'u^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \frac{(x^4+1)^{-2}}{-2} + k$

$= -\frac{1}{8(x^4+1)^2} + k.$

15) $f(x) = \cos x \,(2+\sin x)^{-1/2}$

$n = -1/2$
$u = 2+\sin x$

$\Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow u'u^n = \cos x\,(2+\sin x)^{-1/2}$

$= f(x)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{(2+\sin x)^{1/2}}{1/2} + k = 2\sqrt{2+\sin x} + k.$

16) $f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$

$n = 1$
$u = \ln x$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{x} \Rightarrow u'u^n = \frac{1}{x} \ln x = f(x)$

$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + k = \frac{\ln^2 x}{2} + k.$

17) $f(x) = x^2(x+1)^2$

$n = 2$
$u = x+1$

$\Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u'u^n = 1.(x+1)^2$

$f(x) = x^2 . u'u^n =$ Stop

↳ cste ? NON !!!

On reste dans la question 1 !

$f(x) = x^2(x^2+2x+1) = x^4+2x^3+x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + k$

18) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$ $\quad u'u^n \to$ NON.

$v' \times u' \circ v$

$v = \sqrt{x+1}$
$u' = e^x$

$\Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow v' \times u' \circ v = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$

$F(x) = 2\, u \circ v + k = 2\, e^{\sqrt{x+1}} + k.$

**Partie 3 : polynômes**

1. Effectuer la division euclidienne des polynômes suivants et, lorsque le reste est nul, déterminer l'ensemble des racines de $P(x)$.
   (a) $P(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$ par $x - 2$
   (b) $P(x) = x^3 + 3x - 2i$ par $x - i$
   (c) $P(x) = 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15$ par $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

$P(x)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -16x & +20 & x-2 \\
-(x^3 & -2x^2) & & & x^2+3x-10 \\
\hline
0 & +3x^2 & -16x & +20 & \\
& -(3x^2 & -6x) & & \\
\hline
& 0 & -10x & +20 & \\
& & -(-10x & +20) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}
$$

$\deg(R) < 1$

le reste est nul

$P(x) = (x-2)\underbrace{(x^2+3x-10)}_{}$

2 racines

$\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$

$x_1 = \dfrac{-3-7}{2} = -5$

$x_2 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$

$P(x) = (x-2)(x-2)(x+5) = (x-2)^2(x+5)$

2 (2) et −5 (1) sont racines de P.

(b)

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +3x & -2i & x-i \\
-(x^3 - ix^2) & & & x^2+ix+2 \\
\hline
ix^2 & +3x & -2i & \\
-(ix^2 & +x) & & \\
\hline
& 2x & -2i & \\
& -(2x & -2i) & \\
\hline
& & 0 &
\end{array}
$$

STOP quand $\deg(R) < 1$

$\hookrightarrow ix \times (-i) = -i^2 x = -(-1).x = x$

$\Rightarrow x^3 + 3x - 2i = (x-i)(x^2+ix+2)$

$\boxed{\text{Polynômes à coefficients réels : ils admettent les racines complexes par couples de conjugués.}}$

→ Cette règle ne s'applique pas ici

$x^2 + ix + 2 = 0$

$\Delta = i^2 - 4 \times 2 \times 1 = -1 - 8 = -9 = (3i)^2$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-i-3i}{2} = -2i \\ x_2 = \dfrac{-i+3i}{2} = i \end{cases}$$

$P(x) = (x-i)(x-i)(x+2i) = (x-i)^2(x+2i)$

$i\,(2)$ et $-2i\,(1)$

(c) $P(x) = 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15$ par $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 \\ \cline{2-2} -(3x^5 - 9x^4 + 3x^3 \quad + 12x) & 3x + 3 \\ \hline 3x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 8x + 15 & \\ -(3x^4 - 9x^3 + 3x^2 \quad + 12) & \\ \hline 0 + 0 + 5x^2 - 8x + 3 & \end{array}$$

STOP quand $\deg(R) < 4$

$$\frac{3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} = 3x + 3 + \frac{5x^2 - 8x + 3}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}.$$

partie entière

partie fractionnaire.

Partie 4.

2. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ admet le nombre 1 comme racine double. En déduire une autre racine.

P a 3 racines en comptant la multiplicité

(1) M.q : $1(2)$ de P
(2) $b(1) \in \mathbb{R}$ de P.

(1) $1(2)$ de P $\Leftrightarrow \exists Q \,/\, P(x) = (x-1)^2 Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -(x^3 - 2x^2 + x) & x + 3 \\ \hline 3x^2 - 6x + 3 & \\ -(3x^2 - 6x + 3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P(x) = (x-1)^2 \cdot (x+3)$

$-1(2)$ et $-3(1)$

3. Trouver les racines de $P(x) = x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320$ sachant qu'il admet une **racine triple**.

Je sais résoudre les éq. de degrés 1 et 2.

(1) Je calcule $P''(x)$ racine triple

(2) Racines de $P''$ : $a$ et $b$ rien.

(3) $P(a) = 0 \rightarrow a$ est la racine triple.

(1) $P'(x) = 4x^3 - 21x^2 - 24x + 176$

$P''(x) = 12x^2 - 42x - 24 = 6(\underbrace{2x^2 - 7x - 4})$

(2) $\Delta = 49 + 4 \times 4 \times 2 = 81 = 9^2$

$x_1 = \dfrac{+7-9}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{+7+9}{4} = 4.$

(3) $P(4) = 0$ et $P(-\frac{1}{2}) \neq 0$

$\Rightarrow a = 4$ est la racine triple de $P(x)$.

P étant de degré 4, il ne manque qu'une racine $r(1) \in \mathbb{R}$.

$x - r = \dfrac{x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320}{(x-4)^3}$ → division euclienne à reste nul

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | $n=1$ |
| $a^2$ | $ab$ | $b^2$ | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | $n=2$ |
| $a^3$ | $a^2b$ | $ab^2$ | $b^3$ | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | $n=3$ |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | $n=4$ |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | $n=5$ |

Triangle de Pascal.

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(x-4)^3 = x^3 - 3 \times 4 \times x^2 + 3x \cdot 16 - 4^3$

$= x^3 - 12x^3 + 48x - 64$

$(x-4)^3 = (x-4)(x-4)^2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320 & x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \\
\hline
-(x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x) & x + 5 \\
\quad 5x^3 - 60x^2 + 240x - 320 & \\
-(5x^3 - 60x^2 + 240x - 320) & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

$P(x) = (x-4)^3 (x+5)$

4(3) et −5(1) de $P(x)$.

Théorème de décomposition : Soit $F(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$ avec deg $N <$ deg $D$.

Soit de plus $F(x)=\dfrac{N(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

racines de $D(x)$ encore appelées les pôles de $F(x)$.

ALORS $F(x)=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$

avec $A, B$ et $C \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon où l'on décompose.

Wanted: $A, B$ et $C$. Je devrai déterminer les valeurs des constantes.

**Partie 4 : fractions rationnelles**

1. **Éléments simples de 1ère espèce** — Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes, et en donner les primitives.

$$\text{(a) } \frac{1}{(x-1)(x+2)} \;;\; \text{(b) } \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)} \;;\; \text{(c) } \frac{x^5+5x^2+3x+4}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{(d) } \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x+3)} \;;\; \text{(e) } \frac{x}{(x+1)^2(x-1)}$$

a) $F(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$

théorème

Wanted: $A$ et $B$ par identification.

$$\frac{1+0x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)} \quad \forall x \in \mathcal{D}_F.$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \qquad A=1/3 \qquad B=-1/3.$$

Autre méthode : $(x-1)F(x)=\dfrac{A\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}+\dfrac{B(x-1)}{x+2}$

$$=A+B\,\frac{x-1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 1} A+\underbrace{B\frac{x-1}{x+2}}_{\to 0} \qquad (x-1\to 0,\; x+2\to 3)$$

$$\Rightarrow A=\lim_{1}(x-1)F(x)=\lim_{1}\frac{\cancel{x-1}^{\,1}}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\frac{1}{3}$$

Astuce #1 : Si $p$ est pôle simple de $F$ associé à la constante $A$, alors $A=\lim_{p}(x-p)F(x)$.

$$B = \lim_{-2} (x+2)F(x) = \lim_{-2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + k.$$

M

Procédure :
1. $\deg N < \deg D$ ?
2. Pôles (natures et multiplicités).
3. Ecriture décomposée
4. Identification.

C/L : $M = \deg(D)$ = nombre de constantes à déterminer.

(b) $$F(x) = \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$$

1. $1 < 2$ ? oui $M=2$
2. Pôles : $3 \; (1) \; \in \mathbb{R}$, $-1 \; (1) \; \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ 1 Elément simple de $1^{ere}$ espèce

3. $$F(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

4. $$A = \lim_{3} (x-3)F(x) = \lim_{3} \frac{3x-1}{x+1} = 2 = A$$

$$B = \lim_{-1} (x+1)F(x) = \lim_{-1} \frac{3x-1}{x-3} = \frac{-4}{-4} = 1 = B.$$

$$F(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow P(x) = 2\ln|x-3| + \ln|x+1| + K.$$

(c) Voir après (d)

(d) $$F(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x+3)}$$

1. $\deg N < \deg D$ ? oui $M=3$
2. Pôles : $-1 \; (1) \in \mathbb{R}$, $1 \; (1) \in \mathbb{R}$, $-3 \; (1) \in \mathbb{R}$

3. $F(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+3}$

4. $A = \lim_{-1} (x+1)F(x) = \lim_{-1} \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+3)} = -\dfrac{1}{4}$

$B = \lim_{1} (x-1)F(x) = \lim_{1} \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{3}{8}$

$C = \lim_{-3} (x+3)F(x) = \lim_{-3} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1} = \dfrac{7}{8}$

$\Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{8}\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{7}{8}\dfrac{1}{x+3}$

$\Rightarrow P(x) = -\dfrac{1}{4}\ln|x+1| + \dfrac{3}{8}\ln|x-1| + \dfrac{7}{8}\ln|x+3| + K.$

(c) $\dfrac{x^5+5x^2+3x+4}{(x-1)(x+2)} = F(x)$

1. $\deg N < \deg D$ ? NON.

↳ On procède à la division euclidienne

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad\qquad + 5x^2 + 3x + 4 & x^2+x-2 \\
\hline
-(x^5 + x^4 - 2x^3) & x^3 - x^2 + 3x \\
0 \; -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 4 & \\
-(-x^4 - x^3 + 2x^2) & \\
0 \; + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4 & \\
-(3x^3 + 3x^2 - 6x) & \\
9x + 4 &
\end{array}
$$

$F(x) = \underbrace{x^3 - x^2 + 3x}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\dfrac{9x+4}{(x-1)(x+2)}}_{\text{partie fractionnaire } G(x).}$

Je décompose en éléments simples la fraction $G(x)$

① $\deg N < \deg D$ ? oui $M = 2$

② Pôles : $1(1) \in \mathbb{R}$
$-2(1) \in \mathbb{R}$.

$2 = M$ je n'ai rien oublié.

③ $G(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$

④ $A \longrightarrow$ astuce #1
$B \longrightarrow$ astuce #1.

Astuce #1 : si $p$ est pôle simple de $F$ associé à la constante $A$, alors $A = \lim\limits_{p} (x-p)F(x)$.

$A = \lim\limits_{1} (x-1)\, G(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{9x+4}{x+2} = \dfrac{13}{3} = A$

$B = \lim\limits_{-2} (x+2)\, G(x) = \lim\limits_{-2} \dfrac{9x+4}{x-1} = \dfrac{-14}{-3} = \dfrac{14}{3} = B.$

$\Rightarrow F(x) = x^3 - x^2 + 3x + \dfrac{13}{3}\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{14}{3} \cdot \dfrac{1}{x+2}$

$\Rightarrow P(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{13}{3}\ln|x-1| + \dfrac{14}{3}\ln|x+2| + K.$

(e) $\dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)} = F(x)$

① $\deg N < \deg D$ ? oui $M = 3$

② Pôles : $-1(2) \in \mathbb{R}$
$1(1) \in \mathbb{R}$

③ $F(x) = \dfrac{A_1}{x+1} + \dfrac{A_2}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x-1}$

Retour au théorème de décomposition : J'associe à $p(N) \in \mathbb{R}$ (pôle réel de multiplicité $N$) les $N$ éléments suivants :

$$\frac{A_1}{x-p} + \frac{A_2}{(x-p)^2} + \dots + \frac{A_N}{(x-p)^N}.$$

④ $B = ?$ $\longrightarrow$ A#1 car pôle simple

$B = \lim\limits_{1} (x-1)\, F(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{4} = B.$

⚠ $A_1$ et $A_2$ sont associés à un pôle double

$$(x+1)F(x) = A_1 \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}} + A_2 \frac{\cancel{x+1}}{(x+1)^{\cancel{2}}} + B \frac{x+1}{x-1}$$

$x \to -1$ : $A_1$, $\infty$, $0$

$$(x+1)^2 F(x) = A_1 \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+1}} + A_2 \frac{\cancel{(x+1)^2}}{\cancel{(x+1)^2}} + B \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

$x \to -1$ : $0 + A_2 + 0$

**Astuce #2:** Si $p(N) \in \mathbb{R}$ associé à

$$\frac{A_1}{x-p} + \frac{A_2}{(x-p)^2} + \cdots + \frac{A_N}{(x-p)^N}$$

Alors $A_N = \lim\limits_{p} (x-p)^N F(x)$

$A_2$ se détermine grâce à A#2 : $A_2 = \lim\limits_{-1} (x+1)^2 F(x)$

$$= \lim_{-1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = A_2$$

**Astuce #3:** J'identifie $\lim\limits_{\pm\infty} x^k F(x)$ en augmentant $k$ jusqu'à avoir une équation.

$$\lim_{+\infty} xF(x) = \lim_{+\infty} \frac{A_1 \cdot x}{x+1} + \frac{A_2 \cdot x}{(x+1)^2} + \frac{Bx}{x-1}$$

$\frac{A_1 \cdot x}{x+1} \to A_1$, $\frac{Bx}{x-1} \to B$, $\Leftrightarrow \frac{A_2 x}{x^2} = \frac{A_2}{x} \to 0$

$$= A_1 + B$$

$$\lim_{+\infty} xF(x) = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} \Leftrightarrow \lim_{+\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0.$$

$$\Rightarrow A_1 + B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1 = -B = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \ln|x-1| + K$$

**Astuce #4 :** Je calcule (si c'est possible) $F(0)$, $F(1)$, $F(-1)$ etc.

**Astuce #5 :** Conservation de la parité → voir exercice 2 partie 4.

(f) $F(x) = \dfrac{3x+2}{(x-1)^2(x+4)}$

① $\deg N < \deg D$ $\quad n=3$

② pôles : $1(2) \in \mathbb{R}$
$-4(1) \in \mathbb{R}$

③ $F(x) = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x+4}$

④ A#1 pour B $\quad B = \lim\limits_{-4} (x+4)F(x) = \lim\limits_{-4} \dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$

$= -2/5$

A#2 : $\quad A_2 = \lim\limits_{1} (x-1)^2 F(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{3x+2}{x+4} = 1$

A#3 : $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = A_1 + B = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{3x^2+2x}{x^3+\dots} = 0$

$\Rightarrow A_1 + B = 0 \quad \Rightarrow A_1 = -B = 2/5$

$A_1 = \dfrac{2}{5} \qquad B = 1 \qquad A_2 = -\dfrac{2}{5}$

(g) $F(x) = \dfrac{4x^2-13x+12}{(x-2)^2(x-1)}$

① $\deg N < \deg D$ ? oui $\quad n = 3$

② Pôles : $2(2) \in \mathbb{R}$
$1(1) \in \mathbb{R}$.
$=3$ :)

③ $F(x) = \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{(x-2)^2} + \dfrac{B}{x-1}$ $\quad$ ← A#3, ← A#2, ↓ A#1

④ $B = \lim\limits_{1} (x-1)F(x) = 3$

$A_2 = \lim\limits_{2} (x-2)^2 F(x) = \lim\limits_{2} \dfrac{4x^2-13x+12}{x-1} = 2.$

**Astuce #3 :** $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = A_1 + B = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{4x^3+\dots}{x^3+\dots} = 4.$

$A_1 + B = 4 \Rightarrow A_1 = 1$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 2 \\ B = 3. \end{cases}$$

2. **Éléments simples de 2ème espèce** — Décomposer en éléments simples [1] dans $\mathbb{R}$ :

$$\text{(a)}\ \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+x+1)}\ ;\quad \text{(b)}\ \frac{1}{x^2(x^2+1)}\ ;\quad \text{(c)}\ \frac{1}{x^3(x^2+1)}$$

Polynôme à coef réels : soit $a$ complexe racine de $P$

$$P(x) = (x-a)(x-\bar{a})$$

$$= x^2 - \bar{a}x - ax + a\bar{a}$$

$$= x^2 - \underbrace{(\bar{a}+a)}_{2\operatorname{Re}(a)}x + \underbrace{a\bar{a}}_{|a|^2}$$

Je peux "cacher" deux racines complexes conjugués dans un polynôme à coef. réels.

Théorème de décomposition : $F(x) = \dfrac{N(x)}{(\underbrace{x^2+px+q}_{\Delta<0})^n}$

À chaque couple $a$ et $\bar{a}$ (1) j'associe l'élément simple $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$

Exemple : $F(x) = \dfrac{x^2+3}{(x+1)(x^2+x+4)^2}$

① $\deg N = 2$ $\quad 2<5 \quad$ $M=5$
$\deg D = 5$

② Pôles : $-1(1) \in \mathbb{R}$

1 couple (2) de $\mathbb{C}$

$M = 1+2\times 2 = 5.$

③ Écriture : $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B_1x+C_1}{x^2+x+4} + \dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+x+4)^2}$ $\quad$ 5.

④ $\left.\begin{matrix} B_1 \text{ et } C_1 \\ B_2 \text{ et } C_2 \end{matrix}\right\}$ Astuces 3 et 4.

$A$ : astuce 1.

$F(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-2)(x^2+x+1)}$

1. $\deg N < \deg D$ $\quad M=3$

2. Pôles : $2(1)$ de $\mathbb{R}$

1 couple $(1) \in \mathbb{C}$

$1+2\times 1=3$

③ $F(x) = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

④ $A = \lim\limits_{2} (x-2)F(x) = \lim\limits_{2} \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} = \dfrac{5}{7} = A$

A#3 : $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{Ax}{x-2} + \dfrac{Bx^2+Cx}{x^2+x+1} = A+B.$

$\underbrace{\dfrac{Ax}{x-2}}_{A}$ $\quad \underbrace{\dfrac{Bx^2+Cx}{x^2+x+1}}_{B}$

$\lim\limits_{+\infty} xF(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3+x}{x^3+\dots} = 1$

$\Rightarrow A+B=1 \quad \Rightarrow B = 1-\dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7}$

A#4 : $F(0) = \dfrac{A}{-2} + \dfrac{C}{1} = C - \dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{0+1}{(0-2)(0+0+1)} = -\dfrac{1}{2}$

$\Big\} \quad C - \dfrac{A}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$C = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}A = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{14} = -\dfrac{1}{7} = C.$

b) $F(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$

① $0 < 4$ ? oui $\quad M = 4$

② Pôles : $0\,(2) \in \mathbb{R}$

1 couple (1) $\in \mathbb{C}$ $\quad \dfrac{2 + 2\times1}{4}$

③ $F(x) = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$= \underbrace{\dfrac{A_1}{x}}_{\text{impaire}} + \underbrace{\dfrac{A_2}{x^2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\dfrac{Bx}{x^2+1}}_{\text{impaire}} + \underbrace{\dfrac{C}{x^2+1}}_{\text{paire}}$

④ Astuce #5 : $\left.\begin{array}{l} A_1 = 0 \\ B = 0. \end{array}\right\}$ La parité à l'étape 3 doit rester celle de $F(x)$ de l'énoncé.

$F(x) = \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{C}{x^2+1}$

Astuce 2 $\qquad$ Astuce 3.

Astuce 2: $A_2 = \lim\limits_{0} x^2 F(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{1}{x^2+1} = 1$

Astuce 3: $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = 0 + 0 = 0$

$\lim\limits_{+\infty} x^2 F(x) = A_2 + C = 0 \Rightarrow C = -1$

$F(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{x} - \arctan(x) + K.$

Méthode: $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)}$

$= \frac{\cancel{1+x^2}\ 1}{x^2\cancel{(x^2+1)}} - \frac{\cancel{x^2}\ 1}{\cancel{x^2}(x^2+1)}$

$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$

(c) $\frac{1}{x^3(x^2+1)} = F(x)$

1. $0<5$ ? oui $n=5$

2. Pôles: $0(3) \in \mathbb{R} \rightarrow 3$ ES1
1 couple (1) de $\mathbb{C} \rightarrow 1$ ES2

3. $F(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

4. A#2 $\rightarrow A_3$

A#5 : $F$ est impaire
$\Rightarrow A_2 = 0$
$C = 0.$

$F(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{Bx}{x^2+1}$

$A_3 = \lim_{0} x^3 F(x) = \lim_{0} \frac{1}{x^2+1} = 1 = A_3$

Astuce #3: $\lim_{+\infty} xF(x) = A_1 + B = \lim_{+\infty} \frac{x}{x^5 + \dots} = 0.$

$\Rightarrow A_1 + B = 0.$

Astuce #4: $F(1) = A_1 + \underbrace{A_3}_{=1} + \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$

$A_1 + \frac{B}{2} = -\frac{1}{2}$

$$- \begin{cases} A_1 + B = 0 \\ A_1 + \frac{B}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\frac{B}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 1 \quad A_1 = -B = -1$

$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2+1}$

$$F(x) = -\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + k$$

non-demandé.

3. Rechercher des primitives des fractions rationnelles suivantes :

**16)** $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ **17)** $f(x) = \dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$ **18)** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{3x}{4}$

**19)** $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ **20)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$ **21)** $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^5}$

16) $$f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}}\,1 - \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{(x-1)^{-2} = u'u^n}$$

$$F(x) = x - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + k = x + \frac{1}{x-1} + k.$$

18) $$f(x) = \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\frac{u'}{u}} + \underbrace{\frac{3x}{4}}_{\frac{3}{4}x}$$

$$F(x) = \ln|x^2+1| + \frac{3}{8}x^2 + k.$$

19) $$f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1+x-x}{x(x+1)} = \frac{\cancel{1+x}\;1}{x\cancel{(1+x)}} - \frac{\cancel{x}\;1}{\cancel{x}(1+x)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

$$F(x) = \ln|x| - \ln|1+x| + k.$$

21) $$f(x) = \frac{1}{(x+2)^5} = (x+2)^{-5} = u'u^n$$

$$F(x) = \frac{(x+2)^{-4}}{-4} + k = -\frac{1}{4(x+2)^4} + k.$$

→ Corrections sur moodle.
À préparer.

Outils mathématiques 1 — TD 9 : Primitives et intégrales #2

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Déterminer les primitives de $f(x) = \tan(x)$.

2. Calculer, en intégrant par parties, $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ et $I_2 = \int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

1) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow F(x) = -\ln|\cos(x)| + k.$

2) (1) Forme immédiate ? non

(2) Fraction rationnelle ? non

(3) Puis-je faire une IPP ? oui

Méthode en 4 étapes pour l'IPP :

$\boxed{1}$ Je fais apparaître pour $f(x)$ un produit de 2 fonctions.

$\boxed{2}$ Je choisis $v$ la fonction à dériver (déri-V).
↳ aide (ALPES).

$\boxed{3}$ Schéma visuel → $u$ et $v'$

$\boxed{4}$ J'applique $I = [uv]_a^b - \int_a^b u v'\,dx$

$\boxed{1}$ $f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\boxed{2}$ $v(x) = \ln(x)$

$\boxed{3}$ $u' = 1/\sqrt{x} \longrightarrow u = 2\sqrt{x}$

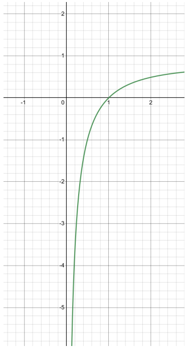
$v' = 1/x \longleftarrow v = \ln x$

$\boxed{4}$ $I_1 = \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx$

$= [2\sqrt{e} - 0] - 2\underbrace{\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{J}$

$J = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^e = 2\sqrt{e} - 2 = J.$

$I_1 = 2\sqrt{e} - 2(2\sqrt{e} - 2) = 4 - 2\sqrt{e} \simeq 0{,}703$ u.A.



$$I_2 = \int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$$

mais $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie en 0.

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_\varepsilon^e - 4\left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^e$$

$$= \underbrace{2\sqrt{e}\ln e}_{2\sqrt{e}} - \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{2\sqrt{\varepsilon}\ln(\varepsilon)}_{\to 0} - 4\sqrt{e} + \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{4\sqrt{\varepsilon}}_{\to 0}$$

$\sqrt{x}$ et $\ln x$ en 0.

$$I_2 = -2\sqrt{e} \simeq -3,30 \text{ uA}.$$

1) $$I = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$$

① $x \times \frac{1}{\cos^2 x}$

② alP polynôme $v(x) = x$

③ $u' = 1/\cos^2 x \to u = \tan(x)$

$v' = 1 \leftarrow v = x$

④ $$I = \left[x \tan(x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \tan(x)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\ln(\cos(x))\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = I$$

$I \simeq 0,432$ uA.

3. Intégrer par parties :

**1)** $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ **2)** $J = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^3 x}\, dx$

**3)** $K = \displaystyle\int_0^{1/2} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x)\, dx$ **4)** $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \exp(3x)\sin(2x)\, dx$

3. Intégrer par parties :

**1)** $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ **2)** $J = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

**3)** $K = \displaystyle\int_0^{1/2} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x)\,dx$ **4)** $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \exp(3x)\sin(2x)\,dx$

2) $J = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^3 x}\,dx$

$\cancel{x \sin x \times \frac{1}{\cos^3 x}}$

$\frac{x}{\cos^3 x} \times \sin x$

① $x \times \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ ← Produit

② $v(x) = x$

$-g'g^n \longrightarrow -\frac{g^{n+1}}{n+1}$

③ $u' = \sin x \cos^{-3} x \longrightarrow u = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} = \frac{1}{2\cos^2 x}.$

$v' = 1 \longleftarrow v = x$

④ $J = \left[\frac{x}{2\cos^2 x}\right]_0^{\pi/3} - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

↑ $\boxed{1}$ Forme immédiate ?

$I = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,23$ u.a.

3) $K = \displaystyle\int_0^{1/2} (3x^2 - 6x + 1)\ln(-x+1)\,dx$

IPP: ① Produit : $(3x^2 - 6x + 1) \times \ln(-x+1)$.

② $v(x) = \ln(-x+1)$

③ $u' = 3x^2 - 6x + 1 \to u = x^3 - 3x^2 + x$

$v' = \frac{-1}{-x+1} \leftarrow v = \ln(-x+1)$

④ $K = \left[(x^3 - 3x^2 + x) \times (\ln(-x+1))\right]_0^{1/2}$

$- \displaystyle\int_0^{1/2} (x^3 - 3x^2 + x) \times \left(\frac{-1}{-x+1}\right)dx$

$$k = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{-x+1}\,dx}_{H}$$

[ ]

1. Forme immédiate ? non

2. Fraction rationnelle ? Oui

① $3 < 1$ ? non $\rightarrow$ division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + x & -x+1 \\ \cline{2-2} -(x^3 - x^2) & -x^2 + 2x + 1 \\ \hline -2x^2 + x & \\ -(-2x^2 + 2x) & \\ \hline -x & \\ -(-x+1) & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$H = \int_0^{1/2} \left(-x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{-x+1}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \ln|-x+1|\right]_0^{1/2}$$

$$H = \frac{17}{24} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$k = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{17}{24} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{24} - \frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k$$

$$k \simeq 0{,}102 \text{ u.a.}$$

**4)** $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \exp(3x)\sin(2x)\,dx$

① $e^{3x} \times \sin(2x)$

② $v(x) = e^{3x}$

③ $u' = \sin(2x) \longrightarrow u = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$v' = 3e^{3x} \longleftarrow v = e^{3x}$

$$L = \underbrace{\left[-\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x)\right]_0^{\pi/4}} + \frac{3}{2} \underbrace{\int_0^{\pi/4} e^{3x} \cos(2x)\, dx}_{M}$$

$$L = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} M$$

Je calcule $M$ par IPP.

① $e^{3x} \times \cos(2x)$

② $v(x) = e^{3x}$

③ $u' = \cos(2x) \longrightarrow u = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$v' = 3e^{3x} \longleftarrow v = e^{3x}$

④ $$M = \left[\frac{1}{2} e^{3x} \sin(2x)\right]_0^{\pi/4} - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{3\pi/4} - \frac{3}{2} L$$

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} M \\ M = \frac{e^{3\pi/4}}{2} - \frac{3}{2} L \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{e^{3\pi/4}}{2} - \frac{3}{2} L\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^{3\pi/4} - \frac{9}{4} L$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4} L = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^{3\pi/4}$$

$$\Rightarrow L = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} e^{3\pi/4} \simeq 2{,}59 \text{ uA}$$

Sup: $\displaystyle\int_0^1 x \arctan(x)\, dx$

① $x \times \arctan(x)$

② $v(x) = \arctan(x)$

③ $u' = x \longrightarrow u = \frac{x^2}{2}$

$v' = \frac{1}{1+x^2} \longleftarrow v = \arctan(x)$

④ $I = \underbrace{\left[ \frac{x^2}{2} \arctan(x) \right]_0^1}_{} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\, dx}_{J}$

$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} J$

$J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

$= [x]_0^1 - [\arctan(x)]_0^1$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \hline -(x^2+1) & 1 \\ -1 & \end{array}$$

$J = 1 - \frac{\pi}{4}$

$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = I \simeq 0{,}285$

4. On considère les fonctions $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dt$. En intégrant par parties :
— déterminer la primitive de $f$ s'annulant en 0 ; $F(x)$
— déterminer la primitive de $g$ s'annulant en 1. $G(x)$

$F(x) = \int_0^x \ln(X)\, dX$

IPP :

① $1 \times \ln(X)$

② $v(X) = \ln(X)$

③ $u' = 1 \quad \rightarrow u = X$

$v' = 1/X \quad \leftarrow v = \ln X$

④ $F(x) = [X \ln X]_0^x - \int_0^x 1\, dX$

$= x \ln x - 0 - [X]_0^x$

$F(x) = x \ln x - x$

$X.$

$F(x) = \begin{cases} x \ln x - x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

prolongement par continuité.

$G(x) = \int_1^x X \ln\left(\frac{X}{X+1}\right) dX$

s'annule en 1.

① $x \cdot \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

② $v(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

③ $u' = x \quad \rightarrow u = \frac{x^2}{2}$

$v' = \frac{1}{x(x+1)} \quad \leftarrow v = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\left[\ln x - \ln(x+1)\right]' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]' = \frac{\cancel{x+1}}{x} \cdot \frac{\cancel{x+1-x}}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$G(x) = \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^x \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{H(x)}\,dx.$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$H(x) = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= [x]_1^x - \left[\ln|x+1|\right]_1^x$$

$$= x - 1 - \ln|x+1| + \ln(2)$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \cancel{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \cancel{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$\ln(2) = -\ln(1/2)$

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

Vérif : $G(1) = \cancel{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}\ln(2)} = 0$ 👍😎😁

5. Intégrer en effectuant un changement de variables :

**1)** $I = \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ avec $u(x) = x+1$ **2)** $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ avec $x(t) = \sin t$

1) $I = \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ avec $u = x+1$.

Méthode :

1) Je change d'ABORD l'élément

2) Je change l'intégrande (l'expression)

3. Je change les bornes

4) Je réécris I en remontant les 3 étapes.

1) $\frac{du}{dx}$ ou $\frac{dx}{du}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(x+1) = 1 \qquad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\Leftrightarrow du = 1\,dx \Leftrightarrow du = dx$$

2. $\frac{1}{x^2+2x+2}$ $\qquad u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$

$$= \frac{1}{(u-1)^2+2(u-1)+2} = \frac{1}{u^2-\cancel{2u}+1+\cancel{2u}-\cancel{2}+\cancel{2}}$$

$$= \frac{1}{u^2+1}$$

3) Bornes : $x$ va de $0$ à $2$

$u$ va de $0+1=1$ à $2+1=3$ (car $u=x+1$)

4) $I = \int_1^3 \frac{1}{u^2+1}\,du = [\arctan(u)]_1^3$

$$I = \arctan(3) - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}464$$