Outils mathématiques 1 — TD 6 : Branches infinies

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.
   (a) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \to +\infty$, et étudier la position de C par rapport à D quand $x \to +\infty$;
   (b) puis déterminer l'équation de l'asymptote à C en $-\infty$.

2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2 - 5x + 3} \qquad f_2(x) = \frac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1} \qquad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \qquad f_4(x) = \frac{x^2 + x\ln(x)}{x + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 2} \qquad f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1 - x}$$

3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$; $I =]-\infty\,;\,1[$ (b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$; $I =]0\,;\,+\infty[$

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty\,;\,2[$ (d) $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $I =]0\,;\,\pi[$ (f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.
   (a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;
   (b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.
   (c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \to 0$?

5. La fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?