Outils mathématiques S1 – DS de novembre 2021 – NOM : **Groupe :** **Note :**

20 points, 90 minutes. Les parties sont indépendantes. Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre ***uniquement*** *sur ce sujet.*

Partie 1 : Nombres complexes – *4 points*

Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + j$ et $z_2 = \sqrt{2}(1 + j)$.

1. Calculer $(z_1)^9$. *(1 pt)*

$z_1 = \sqrt{3}+j \Rightarrow |z_1| = 2$ et $\arg(z_1) = \pi/6$

$\Rightarrow z_1 = 2e^{j\pi/6}$

$\Rightarrow (z_1)^9 = 2^9 \cdot e^{j9\pi/6} = 512 e^{-j\pi/2} = -512j$

$\frac{12\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = \cancel{2\pi} - \frac{\pi}{2}$

0,50

0,50

2. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $(z_1)^n$ est un imaginaire pur. *(1 pt)*

On cherche n tel que $(z_1)^n = re^{j\pi/2 [\pi]}$

c'est-à-dire tel que $n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} [\pi] = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = \frac{\cancel{\pi}}{2} \cdot \frac{6}{\cancel{\pi}} + k \cdot \cancel{\pi} \cdot \frac{6}{\cancel{\pi}} = 3 + 6k$

$= 3 [6]$

0,50

0,50

3. Quels nombres doit-on élever au carré pour obtenir z_2 ? *(0,5 pt)*

On cherche $z / z^2 = \sqrt{2}(1+j)$

$\Leftrightarrow r^2 e^{j2\theta} = 2e^{j\pi/4} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \text{ et } r > 0 \Rightarrow r = \sqrt{2} \\ 2\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} [\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} e^{j\pi/8} \\ z = \sqrt{2} e^{j9\pi/8} = \sqrt{2} e^{-j7\pi/8} \end{cases}$

0,50

4. Calculer $\overline{z_1} \cdot z_2$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de $\sin(\pi/12)$. *(1,5 pt)*

$\overline{z_1} = \sqrt{3} - j = 2e^{-j\pi/6}$

$z_2 = \sqrt{2}(1+j) = 2e^{j\pi/4}$

$\overline{z_1} z_2 = 4e^{j(\pi/4 - \pi/6)} = 4e^{j\pi/12}$

0,50

$= (\sqrt{3} - j)\sqrt{2}(1+j) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + j\sqrt{3} - j + 1)$

$= \sqrt{6} + \sqrt{2} + j(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

0,50

$4(\cos\frac{\pi}{12} + j\sin\frac{\pi}{12}) = \sqrt{6} + \sqrt{2} + j(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Identification des parties imaginaires.

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

0,50

Partie 2 : géométrie dans le plan – *4 points*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère :

- les points $A(3; 2)$, $B(-1; -2)$ et $C(4; -1)$;
- les droites $\mathcal{D}_1 = \{M(x; y) \ / \ y = 5x - 1\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x; y) \ / \ x - 4y + 12 = 0\}$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice $\mathcal{M}$ de $[AB]$. *(0,5 pt)*

Soit H le milieu de $[AB]$ alors $H(1; 0)$

$\mathcal{M} = \{M(x;y) / \vec{HM} \cdot \vec{AB} = 0\}$ avec $\vec{HM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{HM} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \overset{\text{éq.}}{=} 0 = -4x + 4 - 4y$

$\Rightarrow \mathcal{M} : -4x - 4y + 4 = 0$

ou encore $\mathcal{M} : x + y - 1 = 0$

0,50

2. Calculer les coordonnées du point I d'intersection entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. *(0,5 pt)*

On utilise la calculatrice pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x - y = 1 \\ x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16/19 \\ y = 61/19 \end{cases}$$

0,50

3. Donner une mesure de l'angle θ entre $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$, les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, respectivement. *(1 pt)*

$$\cos\theta = \frac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_1}\|\cdot\|\vec{u_2}\|} \quad \text{avec } \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0,50

$$\Rightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \qquad \|\vec{u_1}\| = \sqrt{26} \qquad \|\vec{u_2}\| = \sqrt{17}$$

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}} = 0{,}428 \Rightarrow \theta = \pm 1{,}13 \text{ rad}$$

$$\theta = \pm 64{,}7°$$

0,50

4. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC et préciser s'il est direct ou indirect. *(0,5 pt)*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB};\vec{AC})\right| \quad \text{avec } \vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{AB};\vec{AC}) = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16 > 0 \rightarrow \text{triangle direct}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = 8 \text{ u}^2$$

0,50

5. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{AB}$, de sens opposé et de norme 2. *(1 pt)*

On cherche $\vec{v}$ / $\vec{v} = k.\vec{AB}$ avec $k < 0$ et $\|\vec{v}\| = 2$

0,50

$$\vec{v} = k.\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = 4 = k^2 \cdot 32$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \Rightarrow k = -\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{8}}{8}.$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{\sqrt{8}}{8}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{8}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0,50

6. On place les masses $m_A = 2$ kg en A, $m_B = 3$ kg en B et $m_c = 1$ kg en C. Si l'on place une masse $m_E = 4$ kg au point E, le barycentre du système se trouve en O. Déterminer les coordonnées du point E. *(0,5 pt)*

On cherche x_E et y_E tels que :

$2x_A + 3x_B + x_C + 4x_E = 0$ ET $2y_A + 3y_B + y_C + 4y_E = 0$

$\Leftrightarrow 2.3 + 3.(-1) + 4 + 4x_E = 0$ $\qquad$ $\Leftrightarrow 2.2 + 3.(-2) + (-1) + 4y_E = 0$

$\Leftrightarrow 7 + 4x_E = 0$ $\qquad$ $\Leftrightarrow -3 + 4y_E = 0$

$\Leftrightarrow x_E = -7/4$ $\qquad$ $\Leftrightarrow y_E = 3/4.$

0,50

E a pour coordonnées $E(-7/4\,;\,3/4)$

Partie 3 : géométrie dans l'espace – *3,5 points*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère :

— les quatre points $A(-2;4;3)$, $B(1;-3;-1)$, $C(2;-4;5)$ et $D(-1;-2;3)$;
— le plan P d'équation $x + 2y - z + 4 = 0$;
— la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = (-3;2;1)$.

1. Écrire des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$. *(0,5 pt)*

$\mathcal{D} = \{M(x;y;z) \;/\; \vec{AM} = t.\vec{u}\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3t - 2 \\ y = 2t + 4 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

0,50

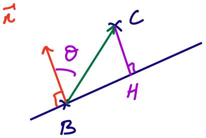
2. Parmi les quatre points, lequel appartient à P ? *(0,5 pt)*

C'est B car $1+2\times(-3)+1+4=0$

Il n'y en a pas d'autre (on demande lequel)

0,5

3. Calculer la distance d entre le point C et le plan P. *(1 pt)*



$d = CH = BC|\cos\theta| = \dfrac{\|\vec{BC}\|.\|\vec{n}\|.|\cos\theta|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|\vec{BC}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

avec $\vec{BC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

0,5

$\vec{BC}.\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = 1-2-6 = -7$ $\quad \|\vec{n}\| = \sqrt{6}$

$\Rightarrow d = \dfrac{7}{\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{6}$ ou $d \simeq 2,86$ uL

0,5

4. Déterminer l'équation du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et contenant D *(0,5 pt)*

Soit $\vec{n}_\Pi$ normal à $\mathcal{D}$, on choisit $\vec{n}_\Pi = \vec{u} = (-3;2;1)$

0,5

$\Rightarrow \Pi : -3x+2y+z+d=0$

De plus $D \in \Pi \Rightarrow -3\times(-1)+2\times(-2)+3+d=0$

$\Rightarrow d=-2$

et $\Pi : -3x+2y+z-2=0$

5. La droite $\mathcal{D}$ et le plan P sont-ils parallèles ? *(0,5 pt)*

$\mathcal{D} /\!/ P \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} = 0$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Calculons : $\vec{u}.\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = -3+4-1=0$

$\Rightarrow$ oui, $\mathcal{D} /\!/ P$

0,5

6. Quelle est la nature de $\Pi \cap P$? *(0,5 pt)*

$\Pi \cap P$ est une droite puisque P et Π ne sont ni parallèles, ni égaux.

0,5

$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_\Pi = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ ils sont même perpendiculaires.

Partie 4 : Fonctions – *3,5 points*

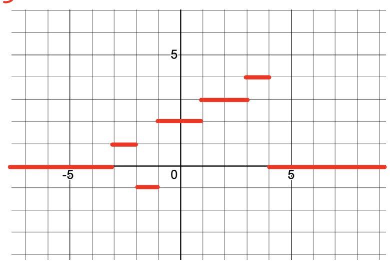
1. Pour chacune des fonctions du tableau ci-dessous, indiquer les **éventuelles** périodicités et parités. Écrire *aucune* s'il n'y en a pas. *(1 pt)*

0,5 0,5

Fonction	Période	Parité
$\sin(4x+2)$	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	Impaire
$\sin^2(8x-\pi/3)$	$\frac{\pi}{8}$	Paire
$\tan^2(2x+\pi/5)$	$\pi/2$	Paire
$\dfrac{x^2+1}{x^3+x}$	Aucune	Impaire
$\dfrac{2x^2+1}{x+1}$	Aucune	Aucune

2. On note $\theta(x)$ la fonction de Heaviside. Dans le graphe ci-dessous, tracer la fonction $f(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$. *(1 pt)*

$-3 \quad 1 \quad -2 \quad 3 \quad -1 \quad 4$



1

3. Exprimer la fonction g ayant les caractéristiques suivantes : *(1,5 pt)*
   — g est sinusoïdale, de valeur moyenne 2, d'amplitude 3, et de période $4\pi/3$ pour $x \in [-\pi/4\,;2\pi]$;
   — en dehors de ces valeurs de x, g est nulle ;
   — et g est maximale en $x = 2\pi/9$.

$g(x) = s(x) \times f(x)$

support — fonction sinusoïdale

avec $s(x) = \theta(x+\pi/4) - \theta(x-2\pi)$ 0^{50}

et $f(x) = A_0 + A\sin(\omega x+\varphi)$ avec $A_0 = 2$, $A = 3$, $\omega = \frac{2\pi}{4\pi}\cdot 3 = \frac{3}{2}$ 0^{50}

et φ / $\underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{9}+\varphi\right)}_{\text{Sinus maximal en } \frac{2\pi}{9}} = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow f(x) = 2+3\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$

ou bien avec un cosinus : $\cos\left(\frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{9}+\varphi\right) = 1 = \cos 0$ 0^{50} pour φ

$\Rightarrow \varphi = -\pi/3$

$\Rightarrow f(x) = 2+3\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$

Partie 5 : Branches infinies – *5 points*

Etudier les branches infinies des trois fonctions suivantes :

1. $f(x) = x + \exp(-x)$ *(1 pt)*

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ $\quad \lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} x+e^{-x} = \lim_{-\infty} x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$ $\quad -\infty$

$m = \lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{-\infty} 1+\frac{e^{-x}}{x} = \underset{=+\infty}{-\infty}$ 0^{50}

$\rightarrow$ On a une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x+e^{-x} = +\infty$

De plus $\lim_{+\infty} f(x)-x = \lim_{+\infty} \cancel{x}+e^{-x}-\cancel{x} = \lim_{+\infty} e^{-x} = 0^+$ 0^{50}

$\rightarrow$ D: $y = x$ est A.O à C_f en $+\infty$ et C_f est au-dessus de D

2. $g(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ *(2 pt)*

$D_g = \{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq 0 \text{ et } x+1>0\} =]-1;0[\cup]0;+\infty[$

(1) $\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0^+$ (croissances comparées) 0^{50}

$\rightarrow$ D: $y=0$ est A.H à C_f et C_f est au-dessus de D.

(2) $\lim_{0} g(x) = \lim_{0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \rightarrow$ l'Hospital

$= \lim_{0} \frac{1/x+1}{1} = 1 \rightarrow$ Pas de branche infinie mais le point $(0;1)$ 1

(3) $\lim_{-1} g(x) = \lim_{-1} \frac{\ln(x+1)}{x} = +\infty \Rightarrow D$: $x=-1$ est A.V à C_f 0^{50}

3. $h(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x-1}$ *(2 pt)*

$D_h = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

(1) $\lim_{+\infty} h(x) = \lim_{+\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x-1} = \lim_{+\infty} \frac{2x^2}{x} = +\infty \rightarrow$ Recherche d'A.O.

$m = \lim_{+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{2x^2+\cdots}{x^2+\cdots} = 2 = m$

$p = \lim_{+\infty} h(x)-2x = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{2x^2}+3x+1-\cancel{2x^2}+2x}{x-1} = \lim_{+\infty} \frac{5x+1}{x-1} = 5 = p$

De plus $\lim_{+\infty} h(x)-2x-5 = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{2x^2}+\cancel{3x}+1-\cancel{2x^2}+\cancel{2x}-\cancel{5x}+5}{x-1} = \lim_{+\infty} \frac{5}{x-1} = 0^+$

$\Rightarrow D$: $y = 2x+5$ est A.O à C_h en $+\infty$ et C_h est au-dessus 1^{00}

En $-\infty$, les calculs sont identiques sauf que $\lim_{-\infty} \frac{5}{x-1} = 0^-$

$\Rightarrow D$: $y = 2x+5$ est A.O à C_h en $-\infty$ et D est au-dessus 0^{50}

Enfin $\lim_{1} h(x) = \lim_{1} \frac{2x^2+3x+1}{x-1}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \lim_{1^+} h(x) = +\infty \\ \lim_{1^-} h(x) = -\infty \end{cases}$ 0^{50}

$\Rightarrow D'$: $x = 1$ est A.V à C_f