Outils mathématiques 1 — TD 4 : Fonctions numériques

1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **2)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ **3)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$ **4)** $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x - \sin x}$ **6)** $f(x) = \ln(1-x)$ **7)** $f(x) = \ln\left(2x^2+3x-2\right)$ **8)** $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

2 Parité et symétries

2.1 Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = |x|$ **2)** $f(x) = x^2$ **3)** $f(x) = x^3$ **4)** $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = x^{3/2}$ **6)** $f(x) = 2x+1$ **7)** $f(x) = 2x^2+1$ **8)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ **10)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ **11)** $f(x) = \sin(2x)$ **12)** $f(x) = \sin(x^2)$

13) $f(x) = \cos(3x)$ **14)** $f(x) = \cos(x^3)$ **15)** $f(x) = \tan(x)$ **16)** $f(x) = \tan(x^2+1)$

17) $f(x) = \ln(x)$ **18)** $f(x) = \sin \circ \ln(x)$ **19)** $f(x) = \ln \circ \sin(x)$ **20)** $f(x) = \exp(x)$

21) $f(x) = \sin \circ \exp(x)$ **22)** $f(x) = \exp \circ \cos(x)$

2.2 Quelles règles peut-on énoncer concernant la parité de fonctions composées ?

2.3 À l'aide du cercle trigonométrique, étudier la parité des fonctions

$$f : \begin{array}{ll} [-1;1] & \to [-\pi/2;\pi/2] \\ x & \to \arcsin(x) \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ll} [-1;1] & \to [0;\pi] \\ x & \to \arccos(x) \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to]-\pi/2;\pi/2[\\ x & \to \arctan(x) \end{array}$$

2.4 On considère les fonctions $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x^3 - x + 2$ de graphes respectifs C_1 et C_2. Étudier les éventuels axes ou centres de symétrie de C_1 et C_2.

3 Périodicité et transformations de graphes

3.1 Étudier la parité et la périodicité des fonctions ci-après et déterminer l'ensemble d'étude restreint.

1) $f(x) = \cos\left(\dfrac{3\pi x}{4}\right)$ **2)** $f(x) = \cos(3x) + 4\sin(2x)$ **3)** $f(x) = \sin^2(x)$ **4)** $f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{4}\right)$

5) $f(x) = 1 + \cos^2(2x)$ **6)** $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ **7)** $f(x) = \cos(x)\cdot\sin(x)$ **8)** $f(x) = x + \sin(x)$

3.2 Tracer sur $[-2\ ;\ 6]$ la courbe représentative de la fonction f suivante :

$$f \text{ est 4–périodique et } \begin{cases} f(x) = x \text{ si } 0 \le x < 1 \\ f(x) = 1 \text{ si } 1 \le x < 3 \\ f(x) = 4 - x \text{ si } 3 \le x < 4 \end{cases}$$

et en déduire les graphes des courbes de

(a) $f_1(x) = 1 + f(x)$ et $f_2(x) = -2f(x)$;

(b) $g_1(x) = f(x-2)$ et $g_2(x) = f(2x)$.

(c) Conclure enfin sur la nature des transformations du graphe C_f associées aux opérations $\lambda \cdot f(x)$, $\lambda + f(x)$, $f(\lambda \cdot x)$ et $f(x - \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

4 Fonctions particulières

4.1 Soit la fonction de Heaviside $\theta(x)$ définie par

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Tracer les fonctions :

(a) $f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$;

(b) et $g(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$.

4.2 On souhaite créer une fonction causale $g(x)$ qui soit :
- nulle pour $x < \pi$;
- sinusoïdale, 2π-périodique, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2 pour $x \geq \pi$;
- et telle que $g(\pi) = 2$.

(a) Tracer le graphe de $g(x)$.

(b) Déterminer $g(x)$ à l'aide de la fonction de Heaviside.

4.3 Exprimer la fonction f ayant les caractéristiques suivantes :
- g est sinusoïdale, de valeur moyenne 2, d'amplitude 3, et de période $4\pi/3$ pour $x \in [-\pi/4\,;2\pi]$;
- en dehors de ces valeurs de x, g est nulle ;
- et g est maximale en $x = 2\pi/9$.

4.4 Donner les équations des courbes représentées sur les figures ci-dessous.