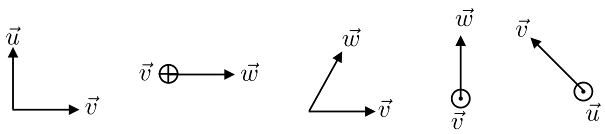
Outils mathématiques 1 — TD 2 : Géométrie dans l'espace

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Dans toute cette feuille, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1.1 Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Dessiner le vecteurs manquant dans les cinq cas représentés ci-dessous.



1.2 On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$:

(a) donner leurs coordonnées ;

(b) calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

1.3 On considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;1\,;-2)$, $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ et $\vec{w} = (1\,;1\,;4)$:

(a) calculer leurs normes ;

(b) calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$;

(c) calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$;

(d) calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct ou indirect.

(e) Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u} + 2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

2. Objets de l'espace et calculs de grandeurs

2.1 À partir des résultats de l'exercice précédent :

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

(b) donner une mesure au signe près de l'angle $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

2.2 Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ et donner une mesure au signe près de l'angle $(\widehat{AOB})$.

2.3 On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$:

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;

(b) calculer l'aire du triangle ABC ;

(c) calculer le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

2.4 Déterminer une équation cartésienne :

(a) du plan Π_1 passant par $A(1; 1; 1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2; 0; 1)$ et $\vec{v} = (0; 1; 2)$;

(b) du plan Π_2 passant par $B(1; 0; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; 1)$.

2.5 Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ de l'exercice précédent.

2.6 On considère :

— le point A de coordonnées $(2; 0; 5)$;
— la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0; -2; -4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2; 1; 0)$;
— le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.

(a) Calculer les distances d_1 de A à $\mathcal{D}$ et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.

(b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?

(c) Déterminer les équations d'une droite parallèle à Π et passant par A. Cette droite est-elle unique ?

3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

$$\Pi_1 : 2x + 3y - z - 5 = 0 \;\; ; \; \Pi_2 : 4x - 5y + 3z + 3 = 0 \;\; ; \; \Pi_3 : 2x - 6y + 7z + 6 = 0$$

3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 5 \quad t \in R \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

(a) montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection ;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.

3.3 On considère :
— le plan Π d'équation $3x - 2x + 4z + 5 = 0$
— la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 4 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 1 \end{cases}$

Déterminer le point d'intersection ou bien, s'il n'existe pas, la distance entre Π et $\mathcal{D}$.

3.4 Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \qquad t \in R \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

(a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;

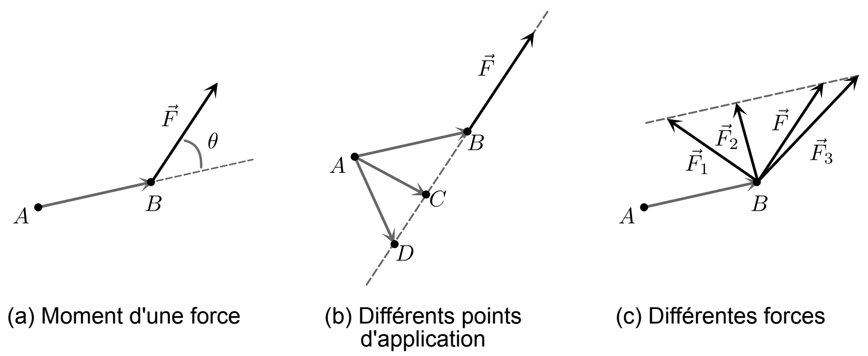
(b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

Application en physique

4.1 Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de la force $\vec{F}$ appliquée en B par rapport à un point A donné est une grandeur physique vectorielle qui quantifie l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour de ce point A. Celui-ci se calcule au travers de la relation

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

et le sens de $\vec{F}$ permet de déterminer le sens de rotation à l'aide de la règle du tournevis.



À l'aide de la figure ci-dessus :

(a) montrer que le moment est le même pour les points d'application B, C et D (volet (b)) et conclure ;

(b) montrer que le moment est le même quelle que soit la force reportée dans le volet (c) et conclure.