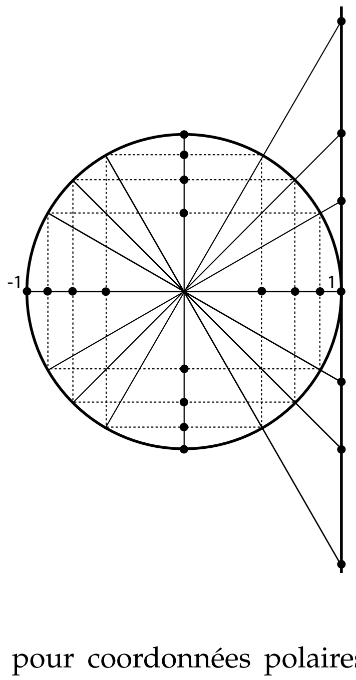
Outils mathématiques 1 — TD de rentrée

Remarque : certains de ces énoncés seront à traiter en autonomie.

1. Simplifiez les expressions suivantes
   (a) $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}$, $y = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$, $y = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{1}$, $y = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$
   (b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1}$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x-1}}{x-1}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$,
   (c) $f(x) = -\frac{3x+1}{-x^2-1}$, $f(x) = \frac{-3x-1}{x^2+1}$, $f(x) = -\frac{-3x+1}{x^2+1}$, $f(x) = \frac{\frac{1}{(1-x^2)} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1 + \frac{1+x}{1-x}}$
2. Géométrie
   (a) Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3;7)$, $B(5;7)$ et $C(-1;2)$. Le point I est le milieu de $[BC]$:
      i. calculer les coordonnées de I ;
      ii. calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$;
      iii. donner une équation de la droite (AC).
   (b) Dans l'espace, déterminer les coordonnées du plan de vecteur normal $\vec{n} = (2;1;3)$ et passant par $A(3;2;-1)$.
3. Étude de fonctions trigonométriques
   (a) Indiquer, dans le cercle trigonométrique ci-dessous, les valeurs particulières de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$. On donne comme valeurs caractéristiques $x = \pi/6$, $\pi/4$ et $\pi/3$ pour les angles et $1/2$, $\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{3}/2$ pour les coordonnées.



   (b) Si A est un point ayant pour coordonnées polaires $r = 2$ et $\theta = 30^o$, en déduire les coordonnées cartésiennes du point A.
4. Étude des fonctions usuelles.
   En utilisant la grille ci-dessous, et un repère orthonormé :
   (a) Tracer les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = \tan(x)$.
   (b) Lesquelles sont paires ? Impaires ?

(c) Relier la fonction f (respectivement g) à la projection orthogonale sur l'axe des abscisses (resp. des ordonnées)

5. En utilisant la grille ci-dessous, et un repère orthonormé :
   (a) Tracer dans $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \exp(x)$ puis, sur le même graphe, representer $g(x) = \exp(-x)$
   (b) Tracer pour tout x $\in]0; +\infty[$, la fonction $f(x) = \ln(x)$.

6. Simplifiez les expressions suivantes :
   (a) $f_1(x) = \exp(-\ln(x))$, $f_2(x) = \frac{\exp(2x)}{\exp(x)}$, $f_3(x) = \ln(\exp(x^2))$,
   (b) $f_4(x) = e^{2x} \cdot e^3$, $f_5(x) = (e^{2x})^3$, $x = 10^3 \cdot 10^5$, $x = (10^3)^5$,
   (c) $f_8(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, $f_9(x) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$, $f_{10}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$
7. Calculer la dérivée de $f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$.
8. Soient $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sin(2x)$. Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_{-\pi/8}^{\pi/6} g(x)dx$.