Outils mathématiques 2 – DS de janvier 2021 – NOM : **Groupe :** **Note :**

*20 points, 90 minutes. Les parties sont indépendantes. Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre **uniquement** sur ce sujet.*

Partie 1 : continuité et dérivabilité – *2 points*

On considère la fonction $h(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

1. déterminer $\tilde{h}$, le prolongement par continuité de h.

$D_h = \mathbb{R}^*$ → On cherche à prolonger h en $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ ⇒ On applique la règle de l'Hospital

$x \to 0$, $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \to 1$, $\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1} \times \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim\limits_{0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 0$

$e^x-e^{-x} \to 0$, $e^x+e^{-x} \to 2$

$$\Rightarrow \tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. étudier la dérivabilité de $\tilde{h}$ en 0.

$\lim\limits_{0} \tilde{h}'(x) = \lim\limits_{0} \frac{h(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

→ On applique la règle de l'Hospital

$\Rightarrow \lim\limits_{0} \frac{1}{2x} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ → On ré-applique la règle de l'Hospital

$\Rightarrow \lim\limits_{0} \frac{1}{2} \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{2} \frac{2-0}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tilde{h}$ est dérivable en 0 et $\tilde{h}'(0) = \frac{1}{2}$.

Partie 2 : décomposer en éléments simples pour intégrer – *5,5 points*

Décomposer en éléments simples et donner les primitives des trois fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{5x-2}{(x-4)(x+2)}$

$\boxed{1}$ $\deg N < \deg D$ ②

$\boxed{2}$ Pôles : $4(1) \in \mathbb{R}$, $-2(1) \in \mathbb{R}$ → 2 ES 1

$\boxed{3}$ Ecriture : $f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$

$\boxed{4}$ $A = \lim\limits_{4} (x-4)f(x) = \lim\limits_{4} \frac{5x-2}{x+2} = \frac{18}{6} = 3 = A$

$B = \lim\limits_{-2} (x+2) f(x) = \lim\limits_{-2} \frac{5x-2}{x-4} = \frac{-12}{-6} = 2 = B$

$\Rightarrow f(x) = 3 \times \frac{1}{x-4} + 2 \times \frac{1}{x+2}$

$\Rightarrow F(x) = 3 \ln|x-4| + 2 \ln|x+2| + k.$

2. $g(x) = \dfrac{2x^4+5x^3+6x^2+6x+5}{(x+1)^2}$

$\boxed{1}$ deg N < deg D ? Non → Division Euclidienne

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4+5x^3+6x^2+6x+5 & x^2+2x+1 \\ \hline
- & (2x^4+4x^3+2x^2) & 2x^2+x+2 \\ \hline
 & 0+x^3+4x^2+6x+5 & \\
- & (x^3+2x^2+x) & \\ \hline
 & 0+2x^2+5x+5 & \\
- & (2x^2+4x+2) & \\ \hline
 & 0+x+3 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2+x+2+\underbrace{\frac{x+3}{(x+1)^2}}_{g_0(x)}$$

On décompose $g_0(x)$ en éléments simples :

$\boxed{2}$ Pôles : $-1\ (2) \in \mathbb{R} \to 2$ ES1

$\boxed{3}$ Écriture : $g_0(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$

$\boxed{4}$ $B = \lim\limits_{-1} (x+1)^2 g_0(x) = \lim\limits_{-1} (x+3) = 2$

$\lim\limits_{+\infty} x g_0(x) = 1 = A$

$\Big\}\ g_0(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Enfin $G(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| - \dfrac{2}{x+1} + K$

3. $h(x) = \dfrac{2}{x^2(x^2+1)}$

On décompose $h(x)$ en éléments simples : $\boxed{1}$ deg N < deg D = 4

$\boxed{2}$ Pôles : $0\ (2) \in \mathbb{R} \to 2$ ES1

1 couple simple de $\mathbb{C} \to 1$ ES2

$\boxed{3}$ Écriture : $h(x) = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{B_1 x + B_2}{x^2+1}$

$\boxed{4}$ Identification : h est paire donc $A_1 = B_1 = 0$.

$A_2 = \lim\limits_{0} x^2 h(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{2}{x^2+1} = 2 = A_2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 h(x) = 0 = A_2 + B_2 \Rightarrow B_2 = -A_2 = -2$

$\Rightarrow h(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x^2+1}$

$\Rightarrow H(x) = -\dfrac{2}{x} - 2\arctan(x) + K$

Partie 3 : branches infinies – *4,5 points*

1. Étudier les branches infinies de la fonction $f(x) = \dfrac{x-\ln(x)}{x^2-2}$

$D_f = [\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}] \cap \mathbb{R}^{+*} = \underbrace{]0;\sqrt{2}[}_{\boxed{1}\ \boxed{2}} \cup \underbrace{]\sqrt{2};+\infty[}_{\boxed{3}}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{x - \ln(x)}{x^2-2} = -\infty$ ($x \to 0$, $-\ln(x) \to +\infty$, $x^2-2 \to -2$)

C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{\sqrt{2}} f(x) = \lim\limits_{\sqrt{2}} \dfrac{x-\ln(x)}{x^2-2}$ ($x-\ln(x) \to >0$, $x^2-2 \to 0$) On différencie l'étude à gauche et à droite

$\lim\limits_{\sqrt{2}^+} \dfrac{x-\ln(x)}{x^2-2} = +\infty$ ($x^2-2 \to 0^+$) et $\lim\limits_{\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$.

C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = \sqrt{2}$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(x - \frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1 - \frac{\ln x}{x}}{x - 2/x} = 0^+$

C_f admet la droite D d'équation $y=0$ comme asymptote horizontale

De plus C_f est au-dessus de D.

2. Étudier les branches infinies de la fonction $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

$\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{-1} g(x) = \lim\limits_{-1} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \rightarrow$ Règle de L'Hospital

$\rightarrow 0$, $\rightarrow 0$

$= \lim\limits_{-1} \dfrac{3x^2 - 6x - 2}{2x} = -\dfrac{7}{2}$

$\rightarrow 7$, $\rightarrow -2$

$\Rightarrow$ Pas de branche infinie mais un point de coordonnées $(-1; -7/2)$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{1} g(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$ <0, $\rightarrow 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{1^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{1^-} g(x) = -\infty$

$\rightarrow$ C_g admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3 + \dots}{x^2 + \dots} = +\infty \rightarrow$ peut-être une A.O ?

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$ et $p = \lim\limits_{+\infty} g(x) - x$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^3} - 3x^2 - 2x + 2 - \cancel{x^3} + 1}{x^2 - 1} = -3$

$\Rightarrow$ C_f admet $D : y = x - 3$ comme asymptote oblique en $+\infty$

De plus $\lim\limits_{+\infty} g(x) - y = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^3} - 3\cancel{x^2} - 2x + 2 - \cancel{x^3} + x - 3\cancel{x^2} + 3}{x^2 - 1} = 0^-$

$\Rightarrow$ D est au dessus de C_f.

$\boxed{4}$ Mêmes calculs mais en $-\infty$: D est A.O à C_f en $-\infty$.

En revanche $\lim\limits_{-\infty} g(x) - y = 0^+$ donc C_f est au-dessus de D en $-\infty$.

Partie 4 : polynôme – *2,5 points*

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$. Déterminer l'ensemble des racines de P sachant qu'il admet une racine double.

r racine double $\Leftrightarrow$ $P(r) = 0$, $P'(r) = 0$

$P'(r) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$ $\quad \Delta = 4 - 32 = 36 = 6^2$

$r_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2$ $\quad r_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4.$

$P(-2) = 0$ et $P(4) \neq 0$ donc la racine double est $r = -2$

Pour déterminer la racine manquante : $Q(x) = \dfrac{P(x)}{(x+2)^2}$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - 24x - 28 & x^2 + 4x + 4 \\ \hline
-(x^3 + 4x^2 + 4x) & x - 7 \\
-7x^2 - 28x - 28 & \\
-(-7x^2 - 28x - 28) & \\
0 &
\end{array}$$

La troisième racine est $r = 7$

Partie 5 : intégration – *5,5 points*

1. Déterminer $F(x)$, la primitive de $f(x) = \arctan(x)$ s'annulant en $x = 0$.

$F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(X)\, dX$

IPP : $u'(X) = 1 \longrightarrow u(X) = X$

$v'(X) = \dfrac{1}{1+X^2} \longleftarrow v(X) = \arctan(X)$

$F(x) = [X\arctan(X)]_0^x - \displaystyle\int_0^x \dfrac{X}{1+X^2}\, dX =$

$= x\arctan x - \left[\dfrac{1}{2}\ln(X^2+1)\right]_0^x$

$= x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = F(x)$

2. Intégrer $I = \int_1^e (x+1)\cdot \ln(x)\cdot dx$

On fait une IPP $\quad u'(x) = x+1 \longrightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}+x$

$\quad v'(x) = \frac{1}{x} \longleftarrow v(x) = \ln(x)$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2}+1\right)dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln(x)\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}+x\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} + \cancel{e} - \frac{e^2}{4} - \cancel{e} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}$$

3. Calculer $K = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}dx = \int_1^e \frac{[\ln(x)]^n}{x}dx$ où $n \neq -1$.

On fait un changement de variable $u(x) = \ln(x)$

[1] $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

[2] $(\ln(x))^n = u^n$

[3] Bornes : x va de 1 à e donc u va de $\ln(1)$ à $\ln(e)$

$\rightarrow u$ va de 0 à 1

[4] $K = \int_0^1 u^n\, du \quad \Rightarrow \quad K = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} = K$

4. (a) Intégrer $J = \int_a^1 \frac{x\cdot\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$ avec $a > 0$.

On fait une IPP avec $\quad u'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow u(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

$\quad v'(x) = \frac{1}{x} \longleftarrow v(x) = \ln(x)$

$$J = \underbrace{-\left[\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_a^1}_{J_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^1 \frac{1}{x(x^2+1)}dx}_{J_2}$$

$J_1 = \frac{\ln(a)}{2(a^2+1)} \qquad J_2 = \frac{1}{2}\int_a^1 j(x)dx$ avec $j(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$ que l'on décompose en éléments simples.

$\Rightarrow j(x) = \frac{A}{x} + \frac{B_1x+B}{x^2+1}$ avec $B=0$ car j est impaire.

$A = \lim_{0} x\, j(x) = \lim_{0} \frac{1}{x^2+1} = 1$ et $\lim_{+\infty} x\, j(x) = 0 = A + B_1 \Rightarrow B_1 = -1$

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\int_a^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(2) - \frac{\ln(a)}{2} + \frac{1}{4}\ln(a^2+1)$$

$$J = \frac{\ln(a)}{2(a^2+1)} - \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(a) + \frac{1}{4}\ln(a^2+1)$$

(b) Que vaut J quand $a \to 0$?

On a une F. I. quand $a \to 0$

$$\Rightarrow J = \frac{\ln(a)}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{a^2+1} - 1}_{= \frac{1-a^2-1}{a^2+1} = -\frac{a^2}{a^2+1}}\right] \underbrace{- \frac{1}{4}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln(a^2+1)}_{\text{ne pose pas problème}}$$

$\to 0$ par croissance comparée

$$= \frac{-a^2\ln(a)}{2(a^2+1)} - \frac{1}{4}\ln(2) - \left(\frac{1}{4}\ln(a^2+1)\right) = \frac{-\ln(2)}{4} \simeq -0{,}173 = J$$

$\to 2 \qquad \to 0$