3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$; $I =]-\infty\,;\,1[$ (b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$; $I =]0\,;\,+\infty[$

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty\,;\,2[$ (d) $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ $\lim\limits_{1^-} \underset{\to 1}{x} + \overset{\to -\infty}{\dfrac{1}{\underset{\to 0^-}{x-1}}}$ $\Rightarrow$ A.V en $x = 1$.

$\lim\limits_{-\infty} \underset{\to -\infty}{x} + \underset{\to 0}{\dfrac{1}{1-x}} = -\infty$.

Hypothèse : $D : y = x$ est A.O à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{-\infty} f(x) - y = \lim\limits_{-\infty} \cancel{x} + \underset{\to 0}{\dfrac{1}{1-x}} - \cancel{x} = 0.$ $\Rightarrow$ Hypothèse validée : $\mathcal{C}_f$ admet $D : y = x$ comme A.O en $-\infty$.

(b) $I =]0; +\infty[$ $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \underset{\to 0}{\dfrac{1}{x}} \overset{\text{bornée}}{\cos x} = 0$ (corollaire du théorème d'encadrement)

$\Rightarrow$ (Ox) est A.H à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{\overset{\to 1^-}{\cos x}}{\underset{\to 0^+}{x}} = +\infty$ $\Rightarrow$ (Oy) est A.V à $\mathcal{C}_f$.

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$ $I =]-\infty; 2[$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} -2x^3 = +\infty.$ $\Rightarrow$ Branche parabolique (Oy)

$\lim\limits_{2} f(x) = f(2) = -19$ (fonction continue).

3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$; $I =]-\infty\,;\,1[$ (b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$; $I =]0\,;\,+\infty[$

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty\,;\,2[$ (d) $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(d) $I =]1;+\infty[$ $\quad \lim\limits_{1} f(x) = 1$ (continuité)

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}_{1} = +\infty.$$

Hypothèse : $D : y = x$ est A.O à C_f.

↳ $$\lim_{+\infty} \underbrace{f(x) - y}_{\text{différence d'ordonnées}} = \lim_{+\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) - x = \lim_{+\infty} \cancel{x} + \underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}_{0} - \cancel{x} = 0.$$

$\Rightarrow D : y = x$ est A.O. à C_f en $+\infty$.

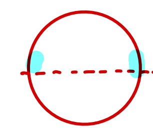
(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $I =]0\,;\,\pi[$ (f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ $\quad I =]0;\pi[$

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{\underbrace{\sin x}_{0^+}} = +\infty$ $\quad (Oy)$ est A.V

$\lim\limits_{\pi^-} \dfrac{1}{\underbrace{\sin(x)}_{0^+}} = +\infty$



$D : x = \pi$ est A.V à C_f.

(f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - x}$ $\quad I =]1;+\infty[$ $\quad D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{1} \frac{e^x - 2}{e^x - x} = f(1) = \frac{e-2}{e-1} \simeq 0{,}418$$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $I =]0\,;\,\pi[$ (f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

$$\lim_{+\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - x} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{e^x}(1 - 2/e^x)}{\cancel{e^x}(1 - x/e^x)} \to 1$$

$$\left(= \lim_{+\infty} \frac{e^x + \dots}{e^x + \dots} \right)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet $D : y = 1$ comme A.H en $+\infty$.

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$ $I =]4 ; +\infty[$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x} + \dots}{x^2 + \dots} = 0$$ $\Rightarrow$ (Ox) est A.H à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$$\lim_{4} f(x) = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \longmapsto \text{L'Hospital}$$

$$= \frac{1/2\sqrt{x}}{2x - 5} = \frac{1/4}{3} = 1/12$$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'A.V en $x = 4$

$\mathcal{C}_f \to (4 ; \frac{1}{12})$

(h) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$ $I =]1 ; +\infty[$

$$\lim_{1} \frac{1 - x^3}{1 - x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \longmapsto \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{1} \frac{-3x^2}{-1} = 3$$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f \to (1 ; 3)$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{-x^3 + \dots}{-x + \dots} = \lim_{+\infty} \underbrace{x^2}_{\text{Forme parabolique}} = +\infty$$ $\Rightarrow$ Branche parabolique de direction (Oy)