Outils mathématiques 1 — TD 3 : Systèmes de coordonnées

1. Coordonnées du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants, repérés soit en coordonnées cartésiennes $(x\ ;y)$, soit en coordonnées polaires $(r\ ;\theta)$:

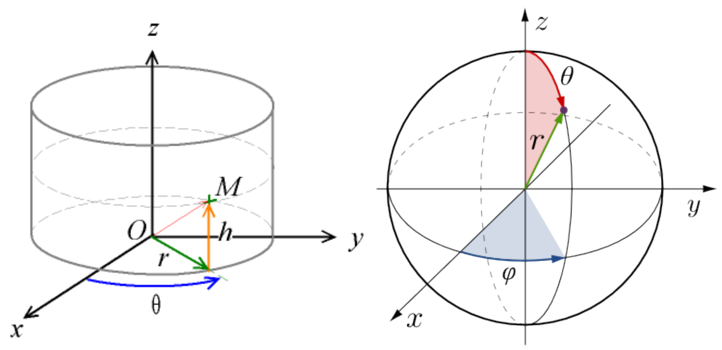
$$A(r=3{,}5\ ;\theta=40^o)\ ;\ B(x=2;y=2{,}5)\ ;\ C(r=4;\theta=35^o)\ ;\ D(r=5;\theta=\pi/12)\ ;\ E(x=-1;x=3)\ ;$$
$$F(r=3;\theta=125^o)\ ;\ G(r=1{,}5;\theta=-20^o)\ ;\ H(x=2;y=-1)\ ;\ I(r=3{,}5\ ;\theta=-2\pi/3)$$

En calculant les coordonnées des points dans les deux systèmes de coordonnées, déterminer

- quel point est le plus éloigné de l'origine, et quel le point en est le plus proche ;
- quels points sont plus proches de l'origine que le point B ;
- le point le plus haut, le plus bas, le plus à droite et le plus à gauche du plan ;
- le point le plus proche de l'axe des abscisses, et le point le plus proche de l'axe des ordonnées.

2. Coordonnées de l'espace

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. La figure ci-dessous rappelle les variables utilisées pour repérer un point en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.



À gauche : Coordonnées cylindriques À droite : Coordonnées sphériques

Fig. 1 : Systèmes de coordonnées dans l'espace

2.1 Calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.

2.2 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points A, B, C, D dont les coordonnées **cartésiennes** sont : $A(1\ ;0\ ;2)$, $B(2\ ;2\ ;2)$, $C(-1\ ;5\ ;0)$ et $D(0\ ;3\ ;-1)$.

2.3 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **cartésiennes** :

(a) du point A dont les coordonnées **sphériques** sont : $r=3$, $\theta=\pi/3$, $\varphi=\pi/6$;

(b) du point B dont les coordonnées **cylindriques** sont : $r=2$, $\theta=5\pi/4$, $z=1$.

2.4 En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que r =constante est :
(A) un cercle ; (B) un cylindre ; (C) une sphère

2.5 En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que θ =constante est :
(A) un cercle passant par les pôles ; (B) un disque horizontal ; (C) un cône d'axe (Oz)