

20 points, 90 minutes. Les parties sont indépendantes. Calculatrice collègue et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre **uniquement** sur ce sujet.

**Partie 1 : Nombres complexes** – 5 points

Dans cette partie, on appelle  $j$  le nombre imaginaire tel que  $j^2 = -1$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 4 \cdot (-\sqrt{3} + j)$

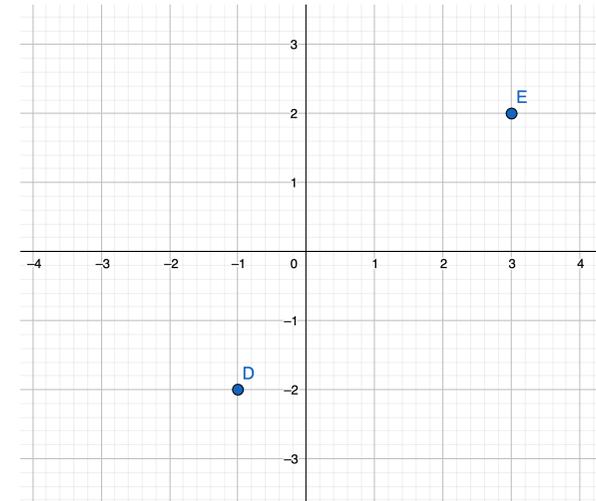
2. On considère les nombres complexes  $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$  et  $z_2 = 1 - j$ .

a. Exprimer le rapport  $z_1/z_2$  sous forme **algébrique**.

b. Déterminer le module et l'argument du rapport  $z_1/z_2$ .

c. En déduire la valeur exacte de  $\sin(7\pi/12)$ .

3. A partir des données du tableau et du plan muni du repère orthonormé ci-dessous, placer les points  $A, B,$  et  $C$  puis remplir avec au maximum trois chiffres significatifs les cases vides pour l'ensemble des points.



| Point | Affixe           |        |                    |
|-------|------------------|--------|--------------------|
|       | Forme algébrique | Module | Argument en degrés |
| A     | $2 - 3j$         |        |                    |
| B     |                  | 3      | $135^\circ$        |
| C     |                  | 2      | $60^\circ$         |
| D     |                  |        |                    |
| E     |                  |        |                    |

## Partie 2 : Géométrie dans le plan — 5 points

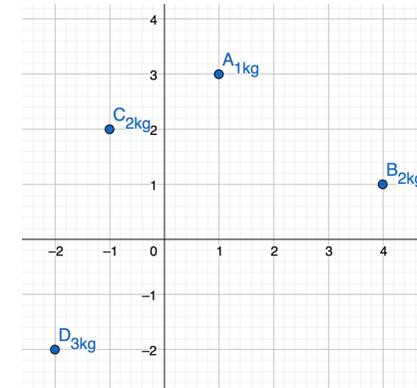
1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points  $A(1 ; 2)$ ,  $B(3 ; 1)$  et  $C(2 ; 5)$ .
  - a. Soit  $D_1$  la droite passant par le point  $A$  et perpendiculaire à la droite  $(AB)$ , déterminer une équation cartésienne de  $D_1$ .

- b. Soit  $D_2$  la droite passant par le point  $C$  et parallèle à  $(AB)$ , déterminer une équation cartésienne de  $D_2$ .

- c. Calculer la surface du triangle  $ABC$  et préciser s'il est direct ou indirect.

- d. Déterminer les coordonnées d'un point  $D$  pour que le triangle  $ABD$  soit rectangle en  $A$  et isocèle.

2. On dispose différentes masses sur quatre points, dans la configuration représentée ci-dessous.



- a. Quelles sont les coordonnées du barycentre  $G$  des quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ?

- b. Où devrait-on positionner le point  $D$  pour que le barycentre soit à l'origine  $O$  du repère ?

### Partie 3 : Géométrie dans l'espace – 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points  $A(3 ; 2 ; 4)$ ,  $B(1 ; -3 ; 7)$  et  $C(2 ; -1 ; 4)$ , et le plan  $\Pi$  d'équation cartésienne  $2x - y + 4z - 6 = 0$ .

1. Déterminer la distance entre le point  $A$  et le plan  $\Pi$ .

2. Déterminer au signe près l'angle formé par les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

3. Déterminer la surface du triangle  $ABC$ .

4. Déterminer le volume du parallélépipède engendré par le trièdre  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$  et préciser si ce trièdre est direct ou indirect.

5. Écrire les équations paramétriques de la droite  $(AB)$  et déterminer les coordonnées du point  $H$  d'intersection entre le plan  $\Pi$  et la droite  $(AB)$ .

**Partie 4 : Fonctions numériques** – 5 points

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

| Fonction                             | Ensemble de définition |
|--------------------------------------|------------------------|
| $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 9}$          |                        |
| $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$           |                        |
| $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$             |                        |
| $f(x) = \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$ |                        |

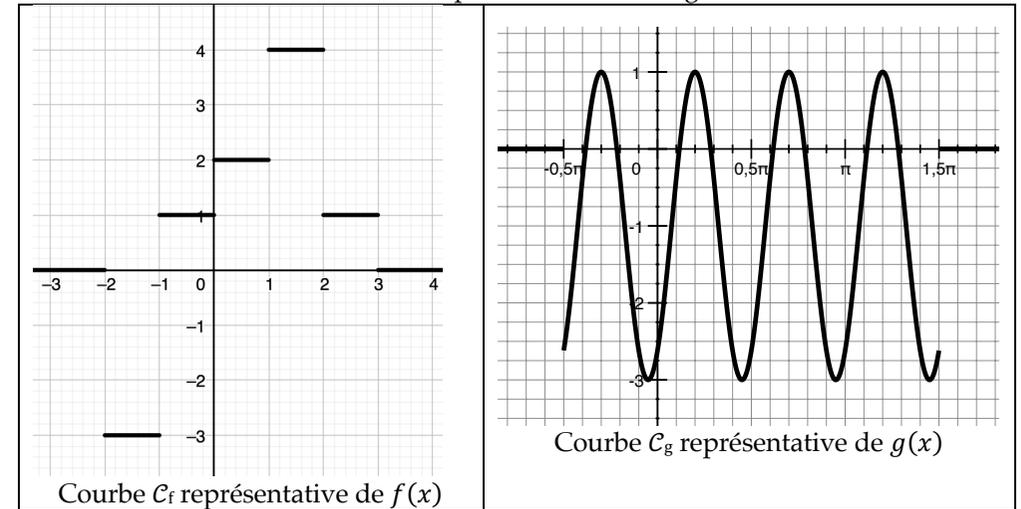
2. Répondre aux QCM ci-dessous sur la parité des fonctions en cochant la bonne réponse.

| Fonction                  | paire | impaire | Pas de parité |
|---------------------------|-------|---------|---------------|
| $x^5$                     |       |         |               |
| $\sin(x)$                 |       |         |               |
| $\exp(2x)$                |       |         |               |
| $\ln(x)$                  |       |         |               |
| $\frac{x^5 + x}{x^2 + 1}$ |       |         |               |
| $\frac{x^5 + 2}{x^2 + 1}$ |       |         |               |
| $x^4 + \cos(x)$           |       |         |               |
| $\tan(x)$                 |       |         |               |
| $\exp(x^2)$               |       |         |               |

3. Déterminer les périodes des fonctions suivantes.

| Fonction                        | Période |
|---------------------------------|---------|
| $\cos\left(\frac{5x}{2}\right)$ |         |
| $\cos^2(3x)$                    |         |
| $\tan(6x)$                      |         |
| $\tan^2(2x)$                    |         |

4. On considère les deux courbes représentées sur les figures ci-dessous.



Déterminer les équations  $f(x)$  et  $g(x)$  en notant  $\theta(x)$  la fonction de Heaviside.