Outils mathématiques S1 – DS de janvier 2024 – NOM : C. PALERMO **Groupe :** **Note :**

20 points, 90 minutes. Les parties sont indépendantes. Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre ***uniquement*** *sur ce sujet.*

Partie 1 : Intégration – *6,5 points*

1. Intégrer par parties $I = \int_0^{1/2} \arcsin(x)dx$ *(2 pt)*

$u' = 1 \longrightarrow u = x$

$v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longleftarrow v = \arcsin(x)$

$$I = [x\arcsin(x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}}_{=\pi/12} - \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{J}$$ (1)

$$J = \int_0^{1/2}(1-x^2)^{-1/2}dx = \left[-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\cancel{1/2}}\right]_0^{1/2} = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$$ (1)

2. Intégrer par parties $I = \int_0^1 (x+1)\exp(2x)dx$ *(1,5 pt)*

$u'(x) = e^{2x} \longrightarrow u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$v'(x) = 1 \longleftarrow v(x) = x+1$

$$I = \left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx}_{J} = e^2 - \frac{1}{2} - J$$ (1)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow I = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} = I}$$ 0,50

3. Intégrer $I = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ en posant $u = \sqrt{x-1}$ *(2 pt)*

(1) $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2u} \Rightarrow dx = 2u\,du$

(2) $x = u^2+1 \Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = \frac{1}{u(u^2+1)}$

(3) x va de 1 à 2 $\Rightarrow$ u va de 0 à 1 (1)

(4) $$I = \int_0^1 \frac{2u\,du}{u(u^2+1)} = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= 2\left[\arctan(u)\right]_0^1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} = I}$$ (1)

4. Intégrer $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ (~~1 pt~~) 1,50

On pose $u = e^x$ ① $\frac{du}{dx} = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

② $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{u^2}{1+u}$

③ x va de 0 à 1 donc u va de 1 à e

④ $I = \int_1^e \frac{du \cdot u^2}{u(1+u)} = \int_1^e \frac{u}{1+u}du = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du$ 1

$= [u]_1^e - [\ln|1+u|]_1^e = \boxed{e-1-\ln(1+e)+\ln(2)}$ 0,50

$\simeq 1,10$ u_A.

Partie 2 : Polynômes – *3 points*

1. Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{3x^2-6x+7}{(x-2)(x^2+x+1)}$ (~~1,5 pt~~) 2 pt

① deg N < deg D ? oui M = 3

② pôles : 2(1) ∈ ℝ → 1 ES1

couple complexe (1) → 1 ES2

③ $f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ 0,50

④ $A = \lim_{2} (x-2)f(x) = \lim_{2} \frac{3x^2-6x+7}{x^2+x+1} = \frac{12-12+7}{7} = 1 = A$ 0,50

$\lim_{+\infty} x f(x) = A+B = \lim_{+\infty} \frac{3x^3+\dots}{x^3} = 3$

$\Rightarrow B = 3-A = 2 = B$ 0,50

$f(0) = -\frac{A}{2} + C = \frac{7}{-2}$

$\Rightarrow C = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = \boxed{-3 = C}$ 0,50

$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2x-3}{x^2+x+1}$

2. Déterminer toutes les racines de $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 64x + 192$ sachant qu'il admet une racine double. (~~1,5 pt~~) 2 pt

Soit $a(2) \in \mathbb{R}$ alors $P(a)=0$

$P'(a)=0$

$P'(x) = 6x^2-8x-64 = 2(3x^2-4x-32)$

$\Delta = 4^2 + 4\times4\times32 = 400 = 20^2$

$x_1 = \frac{4-20}{6} = -\frac{16}{6}$

$x_2 = \frac{4+20}{6} = 4$ avec $P(4)=0$

$\Rightarrow$ $a = 4$ est la racine double 1

Recherche de b :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 - 64x + 192 & x^2 - 8x + 16 \\ \hline -(2x^3 - 16x^2 + 32x) & 2x + 12 \\ 12x^2 - 96x + 192 & \\ -(12x^2 - 96x + 192) & \\ 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x-4)^2(x+6)\cdot 2$ $\Rightarrow$ $b = -6$ est la racine simple. 1

Partie 3 : Fonctions – *7 points*

1. Déterminer l'équation de la fonction $f(x)$, ~~causale~~ et sinusoïdale, dont la courbe est reportée sur la figure 3 ci-dessous. (~~2~~ *pt*) 2^{50}

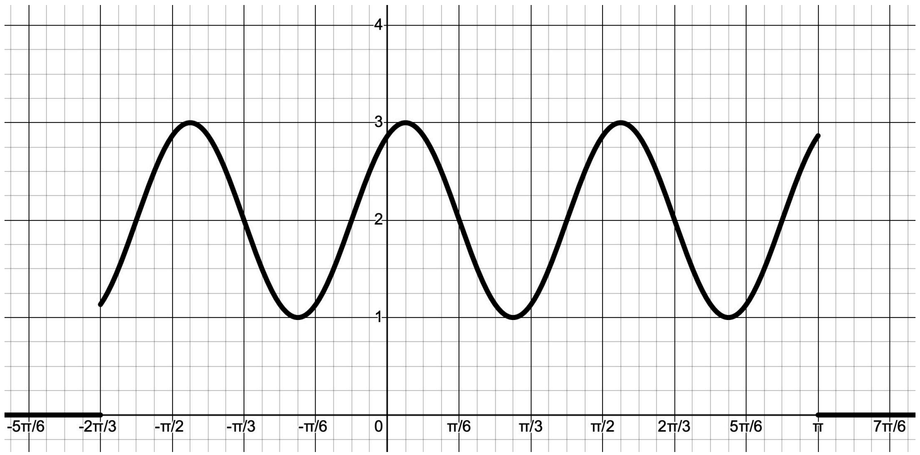

Figure 3

$f(x) = s(x) \times g(x)$ avec $s(x) = \theta\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \theta(x - \pi)$ 0^{50}

$g(x) = 2 + 1\cos(\omega x + \varphi)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\omega = 4$. 1

$\cos(4x + \varphi) = 1$ en $x = \pi/24$

$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \cos(0)$ $\Rightarrow$ $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 0^{50}

$f(x) = \left[\theta\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \theta(x - \pi)\right] \times \left[2 + \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ 0^{50}

NB : si sinus alors $g(x) = 2 + \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$

2. Étudier les branches infinies de la fonction $f(x) = \dfrac{xe^x + 1}{e^x - 1}$ (~~3~~ *pt*) 3^{25}

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ 0^{25}

$= \,]-\infty ; 0[\,\cup\,]0 ; +\infty[$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{xe^x - 1}{e^x - 1}$ ($xe^x - 1 \to -1$, $e^x - 1 \to 0$) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{0^-} f(x) = +\infty$.

$\Rightarrow$ C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ 0^{50}

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{e^x}(x+1)}{\cancel{e^x}(1 - 1/e^x)} = +\infty.$ 0^{25}

Recherche d'A.O : $m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{xe^x + 1}{xe^x - x}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{e^x}(x + 1/e^x)}{\cancel{e^x}(x - x/e^x)} = 1 = m$ 0^{25}

$p = \lim\limits_{+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{xe^x + 1 - xe^x + x}{e^x - 1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x + 1}{e^x - 1} = 0^+$ 0^{50}

$\Rightarrow$ C_f admet $D : y = x$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et C_f est au-dessus de D. 0^{50}

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{xe^x + 1}{e^x - 1} = -1$ ($xe^x \to 0$, $e^x \to 0$) $D' : y = -1$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$. 0^{50}

$\lim\limits_{-\infty} f(x) + 1 = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{xe^x + \cancel{1} + e^x - \cancel{1}}{e^x - 1} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^x(x+1)}{e^x - 1} = 0^+$

$\Rightarrow$ C_f est au-dessus de D'. 0^{50}

3. On considère la fonction $g(x)$ définie par $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} \text{ si } x < 0 \\ mx + p \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Pour quelles valeurs de m et p la fonction g est-elle continue et dérivable en $x = 0$? *(2 pt)*

$* \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{0^-} \sqrt{x+1} = 1 \qquad \lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} mx+p = p.$

et $g(0) = p \Rightarrow g$ continue en $0 \Leftrightarrow p = 1.$ 1

$* \; g$ dérivable en $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{0^+} \dfrac{mx+p-p}{x} = \lim\limits_{0^-} \dfrac{\sqrt{x+1}-p}{x} \Leftrightarrow m = \lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$\Leftrightarrow m = \lim\limits_{0} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = \dfrac{1}{2}$ (L'Hospital). 1

Partie 4 : Géométrie – *3,5 points* On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé les points $A(1;2;0)$, $B(5;2;-2)$ et $C(-2;3;2)$ formant le plan Π.

1. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$. *(1 pt)*

$V = |[\vec{OA};\vec{OB};\vec{AC}]| = |(\vec{OA}\wedge\vec{OB})\cdot\vec{AC}| = \left| \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} \right|$

$= \left| \begin{pmatrix}-4\\2\\-8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} \right| = |-2| = 2$

$\Rightarrow V = 2uv$ 1

2. Déterminer les coordonnés que du point D défini de sorte que : *(1,5 pt)*
— $\overrightarrow{AD}$ soit perpendiculaire au plan Π, et de norme $\sqrt{6}$;
— le trièdre $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ soit indirect.

$\vec{AD} = k.(\vec{AB}\wedge\vec{AC})$ avec $k<0$

$= k\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ 0,5

De plus $\|\vec{AD}\| = \sqrt{6} \Leftrightarrow |k|.\sqrt{24} = \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow |k| = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow k = -1/2$ 0,5

$\Rightarrow \vec{AD} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_D - x_A\\y_D-y_A\\z_D-z_A\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_D = -1+1 = 0 \\ y_D = 1+2 = 3 \\ z_D = -2+0 = -2 \end{array} \Rightarrow D\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$ 0,5

3. Donner une mesure au signe près de l'angle $(\widehat{BAC})$. *(1 pt)*

Soit $\theta = (\widehat{BAC})$ alors $\cos\theta = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|}$

$\cos\theta = \dfrac{\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{-16}{\sqrt{20}.\sqrt{14}} = -0,956$

$\Rightarrow \theta = \pm \arccos(-0,956) = \pm 163°$ 1