

Outils mathématiques — TD 8 : Primitives et intégrales #1

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Partie 1

1. On considère la figure 1. Calculer la surface teintée en rouge sachant que $f(x) = \frac{1}{5x}$ et $g(x) = -x^2 + 0,2x + 1$.

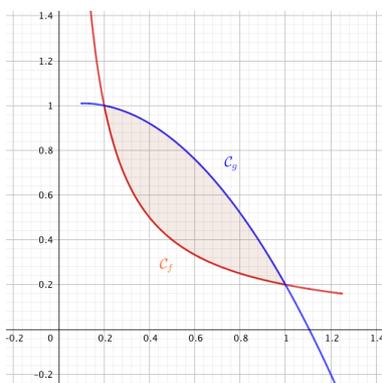


FIGURE 1 : Aire à calculer

2. Déterminer la primitive F de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - \frac{4}{x^2}$ telle que $F(1) = -1$.
3. Déterminer la primitive G de la fonction $g(t) = 3 \cdot \cos(3t)$ telle que $G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Partie 2

Rechercher les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ | 2) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | 3) $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ |
| 4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ | 5) $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$ | 6) $f(x) = \cos\left(\frac{x - \pi}{4}\right)$ |
| 7) $f(x) = (x - 9)^3$ | 8) $f(x) = \sin x \cos^2 x$ | 9) $f(x) = x(x^2 + 1)^2$ |
| 10) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ | 11) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$ | 12) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ |
| 13) $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 3)^3}$ | 14) $f(x) = \left(\frac{x}{x^4 + 1}\right)^3$ | 15) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$ |

Partie 3 : polynômes

1. Effectuer la division euclidienne des polynômes suivants et, lorsque le reste est nul, déterminer l'ensemble des racines de $P(x)$.
- (a) $P(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$ par $x - 2$
- (b) $P(x) = x^3 + 3x - 2j$ par $x - j$
- (c) $P(x) = 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x + 15$ par $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$
2. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ admet le nombre 1 comme racine double. En déduire une autre racine.
3. Trouver les racines de $P(x) = x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320$ sachant qu'il admet une **racine triple**.

Partie 4 : fractions rationnelles

1. **Éléments simples de 1ère espèce** — Décomposer en éléments simples dans \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes, et en donner les primitives.

$$(a) \frac{1}{(x-1)(x+2)} ; (b) \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)} ; (c) \frac{x^5 + 5x^2 + 3x + 4}{(x-1)(x+2)}$$

$$(d) \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 - 1)(x + 3)} ; (e) \frac{x}{(x + 1)^2(x - 1)}$$

2. **Éléments simples de 2ème espèce** — Décomposer en éléments simples¹ dans \mathbb{R} :

$$(a) \frac{x^2 + 1}{(x - 2)(x^2 + x + 1)} ; (b) \frac{1}{x^2(x^2 + 1)} ; (c) \frac{1}{x^3(x^2 + 1)}$$

3. Rechercher des primitives des fractions rationnelles suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{16)} f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} & \mathbf{17)} f(x) = \frac{2x^3 + 13x^2 + 24x + 2}{(x + 3)^2} & \mathbf{18)} f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{3x}{4} \\ \mathbf{19)} f(x) = \frac{1}{x(x + 1)} & \mathbf{20)} f(x) = \frac{1}{x^2(x + 1)^2} & \mathbf{21)} f(x) = \frac{1}{(x + 2)^5} \end{array}$$

1. Indication : Utiliser la parité pour simplifier l'étude de (b) et de (c).