Outils mathématiques — Test 2 — Octobre 2021

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 10 min.

NOM :

GROUPE : **NOTE :** **/2**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(3;1;0)$, $B(1;3;2)$, $C(4;-3;-7)$ et $D(-1;2;4)$.

1. Déterminer l'équation du plan Π auquel appartiennent les points A, B et C.

Soit $\vec{n_\pi} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4-3 \\ -3-1 \\ -7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 0.50

$\Rightarrow \pi : x + 2y - z + d = 0$ et $A \in \pi \Rightarrow 3 + 2 - 0 + d = 0 \Rightarrow d = -5$ et $\pi : x + 2y - z - 5 = 0$.

2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan Π et unitaire.

$\vec{n} = \dfrac{\vec{n_\pi}}{\|\vec{n_\pi}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 0.25

3. Calculer la surface $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \dfrac{1}{2}\, 6 \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6} \simeq 7{,}35\ u_L^2$ 0.25

4. Déterminer si le point D appartient à Π.

On injecte les coordonnées de D dans l'équation de π

$\Rightarrow -1 + 2 \times 2 - 4 - 5 = -6 \neq 0$ donc D n'appartient pas à π. 0.25

5. Déterminer le volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

$\mathcal{V} = |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{OD}| = \left| -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = |-6 [-1 + 4 - 4]| = 6$ 0.25

$\Rightarrow \mathcal{V} = 6$.

6. Déterminer les coordonnées du plan Π' contenant D et de vecteur normal $\overrightarrow{OD}$.

π' a pour équation $-x + 2y + 4z + d' = 0$ ($\vec{OD}$ normal à π') 0.50

$D \in \pi' \Rightarrow -(-1) + 2(2) + 4(4) + d' = 0 \Rightarrow d' = -21$

$\Rightarrow \pi' : -x + 2y + 4z - 21 = 0$.

Outils mathématiques — Test 2 — Octobre 2021
Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 10 min.

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(3;1;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(4;3;-7)$ et $D(1;2;-4)$.

1. Déterminer l'équation du plan Π auquel appartiennent les points A, B et C.

Soit $\vec{n_\pi} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4-3 \\ 3-1 \\ -7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 0.5

$\Rightarrow \pi : x-4y-z+d=0$ et $A \in \pi \Rightarrow 3-4-0+d=0 \Rightarrow d=1$ et $\pi : x-4y-z+1=0$

2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan Π et unitaire.

$\vec{n} = \frac{\vec{n_\pi}}{\|\vec{n_\pi}\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{18}}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 0.25

3. Calculer la surface $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24\, u_a^2$ 0.25

4. Déterminer si le point D appartient à Π.

On injecte les coordonnées de D dans l'équation de π

$\Rightarrow 1-4\times 2+4+1 = -2 \neq 0 \Rightarrow D$ n'appartient pas à π 0.25

5. Déterminer le volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède engendré par $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{OD}$.

$\mathcal{V} = \left|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{OD}\right| = \left| 2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = |-6| = 6.$ 0.25

6. Déterminer les coordonnées du plan Π' contenant D et de vecteur normal $\vec{OD}$.

$\vec{OD}$ normal à $\pi' \Rightarrow \pi' : x+2y-4z+d'=0.$

$1+2\times(2)-4\times(-4)+d'=0 \Rightarrow d'=-21$

$\Rightarrow \pi' : x+2y-4z-21=0.$ 0.5