

CM math 2024-2025

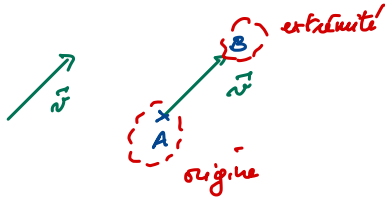
CHAPITRE 1:

Géométrie dans le plan

1.1 Vecteurs

- * Un vecteur caractérise :
 - * Une direction
 - * Un sens
 - * Une norme ≥ 0 (intensité)

* Soit $\vec{v}$ un vecteur : $\vec{v} = \vec{AB}$



$\vec{AB}$ est un représentant de $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{AB}$$

direction : (AB)

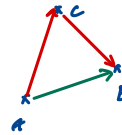
sens : de A vers B

norme $\|\vec{v}\| = \|\vec{AB}\| = AB$

- $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow$ ils ont la même direction
 $\Leftrightarrow \exists k \neq 0 / \vec{u} = k\vec{v}$
 $\exists k \in \mathbb{R}^*$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

• CHASLES: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$



$$\|\vec{AB}\| \leq \|\vec{AC}\| + \|\vec{CB}\|$$

$$AB \leq AC + CB$$

• $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{BA} = -\vec{AB}$$

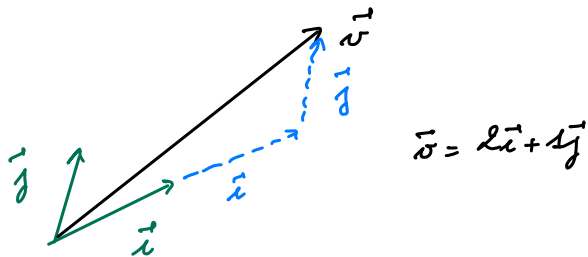
- Linéarité :
- * Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs
 - * $m \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$

$$* m(k\vec{u}) = k(m\vec{u}) = mk \cdot \vec{u}$$

$$* k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

1.2. Coordonnées

- * Base du plan : définie par un couple de vecteurs $(\vec{i}; \vec{j})$ non-colinéaires



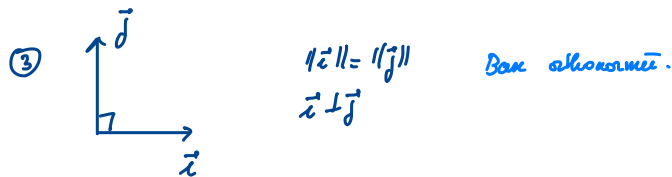
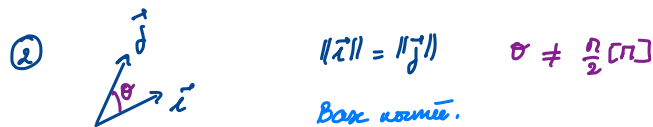
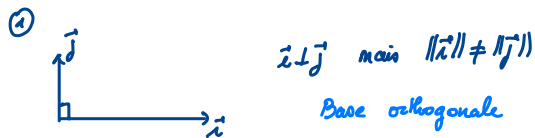
$(\vec{i}; \vec{j})$ décrit de façon **unique** $\vec{u}$ et donc tout vecteur du plan.

$$\forall \vec{u} \quad \exists! x \exists! y / \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

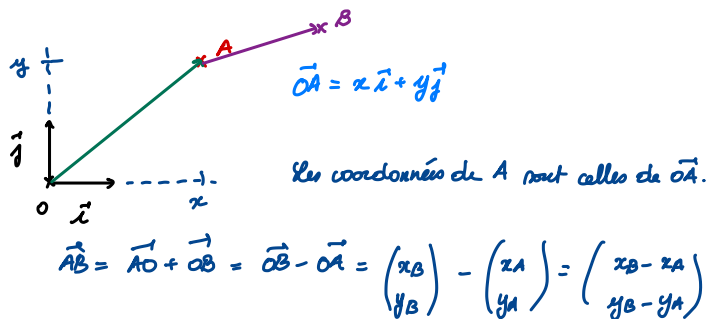
$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x; y)$$

coordonnées
 * dépendent de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
 * Autre nom: **composantes**.

• Types particuliers :



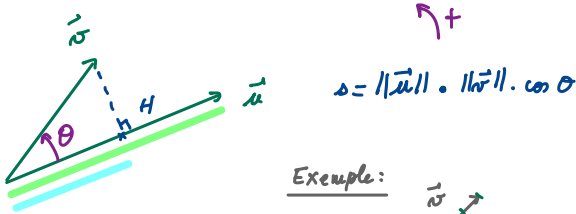
• Repère: permet de localiser les points
 base $(\vec{i}; \vec{j})$ + origine O.



Repères orthonormés par défaut.

1.3 PRODUIT SCALAIRE

$$\begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{matrix} \rightarrow \text{opération} \rightarrow \Delta \in \mathbb{R}.$$



Exemple:

$\Delta = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 6\sqrt{2} \approx 8,49 \text{ u.l.}$

Propriétés:

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(-\theta) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$
Commutatif.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ Détection de l'orthogonalité.
 $\vec{u} \neq \vec{0}$
 $\vec{v} \neq \vec{0}$
- $k \in \mathbb{R}^* \quad \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Lien avec les coordonnées

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'.$$

Ex: $A(2;3) \quad B(3;4) \quad C(4;7)$

$\theta = \angle \vec{AB}, \vec{AC}$ Que vaut θ ? au signe près.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos \theta = \Delta = 6$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\Delta}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20}} = 0,949$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \arccos(0,949) \approx \pm 18,4^\circ$$

$$\approx \pm 0,322 \text{ rad}$$

Preuve:

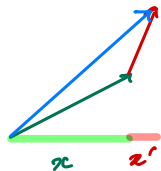
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right]$$

$(a+b)^2$ identité remarquable.

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$$



$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= x^2 + y^2 \\ \|\vec{v}\|^2 &= x'^2 + y'^2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= x^2 + y^2 \\ \|\vec{v}\|^2 &= x'^2 + y'^2 \end{aligned}} \right\} \text{pythagore}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left[(x+x')^2 + (y+y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cancel{x^2} + \cancel{2xx'} + \cancel{x'^2} + \cancel{y^2} + \cancel{2yy'} + \cancel{y'^2} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - \cancel{x'^2} - \cancel{y'^2} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Question: Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ y \end{pmatrix}$

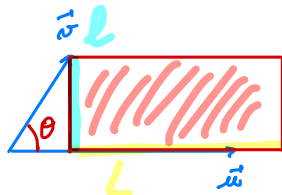
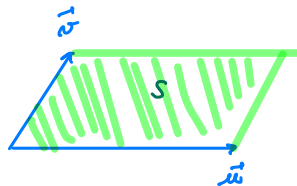
Quelle y pour $\vec{u} \perp \vec{v}$?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = 1 \times (-6) + 3y = 0 \Rightarrow y = 2.$$

1.4 Déterminant 2D

Soient $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ non-colinéaires qui engendrent un parallélogramme

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dét.}} S \text{ surface}$$



$$S = L \times \ell = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta \rightarrow \text{valeur absolue} = S$$

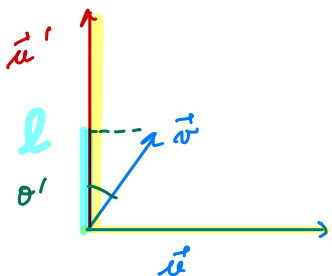
$\rightarrow$ mesure de θ .

Propriétés: • $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}.$$

• $\det(\vec{v}; \vec{u}) = -\det(\vec{u}; \vec{v})$
anticommutativité

Exprimer $\det(\vec{u}; \vec{v})$ avec les coordonnées.



$$\text{Soit } \vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} -y_u \\ x_u \end{pmatrix}$$

$$L \times L = \vec{v} \cdot \vec{u}' = \vec{u}' \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v$$

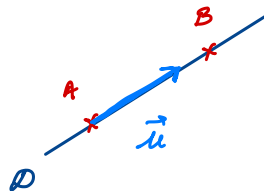
Exemple: $A(1; 2)$ $B(3; 5)$ $C(2; -4)$

Question: Aire Δ du triangle ABC ?

$$A = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}; \vec{AC}) \right| \quad \text{avec} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| -12 - 3 \right| = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ uA} = 7,5 \text{ uL}^2$$

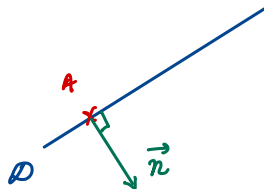
1.5. Droites du plan



Une droite est définie par :

* un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$

$\forall k \neq 0 \quad \vec{u}' = k\vec{u}$ est directeur de D.



* un point A et un vecteur normal $\vec{n}$

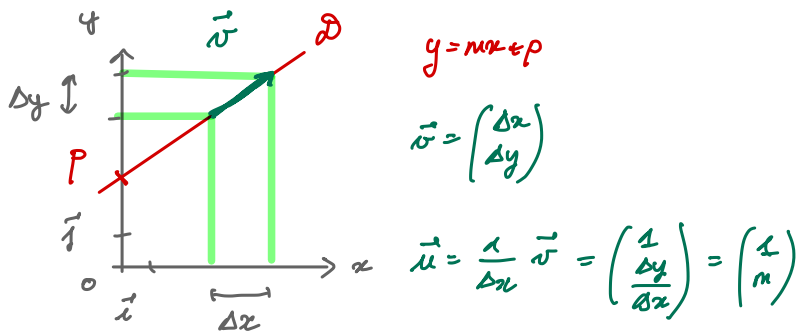
$\forall k \neq 0 \quad \vec{n}' = k\vec{n}$ est normal à D.

Equations de droite:

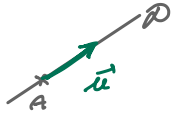
Règles sur x et y que doivent respecter les points $M(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})$ pour appartenir à la droite.

3 types: ① Forme nouvelle dite réduite.

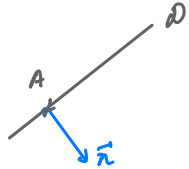
$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coefficient directeur}}}{m}x + p \leftarrow \begin{matrix} \text{ordonnée} \\ \text{à l'origine} \end{matrix}$$



$\vec{u}$ est directeur de D : $y = mx + p$.



$$D = \{ \pi(x, y) \mid \det(\overrightarrow{AP}, \vec{u}) = 0 \}$$



$$D = \{ \pi(x, y) \mid \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \}$$

Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\vec{n}$ est normal à $D: y = mx + p$.

② Forme canonique: $ax + by + c = 0$

$$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ex: Donner un $\vec{n}$ et un $\vec{u}$ pour $D: 3x - 2y + 7 = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ou } \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

permutation - opposition.

③ Forme paramétrique

Je découple x et y en introduisant le paramètre t

$$\text{Ex: } y = mx + p \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = mt + p \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = -mt + p \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

→ Réduction d'ensemble: $\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = mt + p \end{array} \right. \quad t \in [0; 2].$
(segment)

Ex: Equations paramétriques pour (AB)

avec $A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$(AB) = \left\{ M(x; y) / \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} \right\}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad (AB) = \left\{ M(x; y) / \overrightarrow{AM} = t \vec{u} \right\}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y-4 = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Soit D passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ alors

D admet pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t x_u + x_A \\ y = t y_u + y_A \end{cases}$$

$\uparrow$ coordonnées d'un vecteur directeur

Ex: Soient $\begin{cases} x = 3t+4 \\ y = 2t-5 \end{cases}$ donner un point et un vecteur de la droite.

$$\Rightarrow A(4; -5) \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.6. Cercles du plan

$\mathcal{C}$, c'est un ensemble de points situés à une distance R d'un point C .

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \left\{ M(x; y) / CM = R \right\} \quad CM = R \Rightarrow CM^2 = R^2 \\ \Rightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} = R^2$$

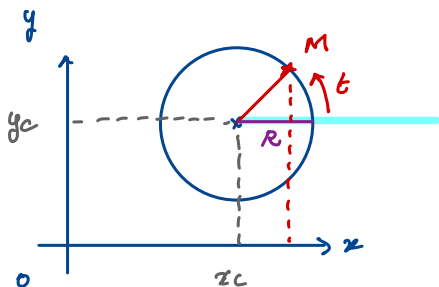
$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x-x_c \\ y-y_c \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x-x_c \\ y-y_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_c \\ y-y_c \end{pmatrix} \\ = (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2$$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \left\{ M(x; y) / (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2 \right\}$ est la forme canonique du cercle de centre $C \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$ et de rayon R .

Ex: Soit $\mathcal{C}: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$

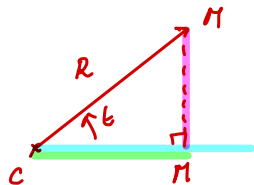
$\mathcal{C}$ c'est le cercle de centre $C \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de rayon 4.

Forme paramétrique:



$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_c + R \cos t \\ y = y_c + R \sin t \end{cases}$$

Ex: $\begin{cases} x = 4 + 2 \cos t \\ y = 1 + 2 \sin t \end{cases}$

décrit le cercle de centre $C(4;1)$ et de rayon 2

$\begin{cases} x = 4 + 2 \cos t \\ y = 1 + 6 \sin t \end{cases}$

décrit l'ellipse de centre $C(4;1)$ de demi-grand axe (oy) 6 et de demi-petit axe (ox) 2.

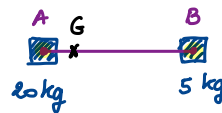
1.7 Barycentre

On appelle barycentre G de n points $M_i(x_i; y_i)$ chacun associé à un poide p_i le point vérifiant

$$p_1 \vec{GM}_1 + p_2 \vec{GM}_2 + \dots + p_n \vec{GM}_n = \vec{0}$$

ou encore
$$\sum_{i=1}^n p_i \vec{GM}_i = \vec{0}$$

Exemple:



G vérifie $20 \vec{GA} + 5 \vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4 \vec{GA} + 16 \vec{GB} = \vec{0}$

Comment lier la définition ● aux coordonnées?

$$\sum_{i=1}^n p_i \vec{GM}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_i p_i (\vec{GO} + \vec{OM}_i) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_i p_i \vec{GO} + \sum_i p_i \vec{OM}_i = \vec{0} \Rightarrow -\sum_i p_i \vec{GO} = \sum_i p_i \vec{OM}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i p_i \vec{OG} = \sum_i p_i \vec{OM}_i \Rightarrow \left(\sum_i p_i \right) \vec{OG} = \sum_i p_i \vec{OM}_i$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{\sum_i p_i \vec{OM_i}}{\sum_i p_i}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} \Rightarrow x_G = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

$$y_G = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Les coordonnées du barycentre sont les moyennes pondérées des coordonnées des points dont il est barycentre.

Rq: Il existe aussi l'isobarycentre. C'est un barycentre considérant le même poids pour tous les points.

Ex:

A(2;1)	1 kg	A(1)
B(3;5)	2 kg	B(2)
C(-2;7)	1 kg	C(4)
D(-3;2)	3 kg	D(3)

Quelles sont les coordonnées du barycentre G et de l'isobarycentre I?

$$x_G = \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times (-2) + 3 \times (-3)}{7} = -\frac{3}{7}$$

$$y_G = \frac{1 \times 1 + 2 \times 5 + 1 \times 7 + 3 \times 2}{7} = \frac{24}{7}$$

$$G\left(-\frac{3}{7}; \frac{24}{7}\right)$$

$$I \Rightarrow x_I = \frac{2+3-2-3}{4} = 0$$

$$y_I = \frac{1+5+7+2}{4} = \frac{15}{4}$$

$$I\left(0; \frac{15}{4}\right)$$

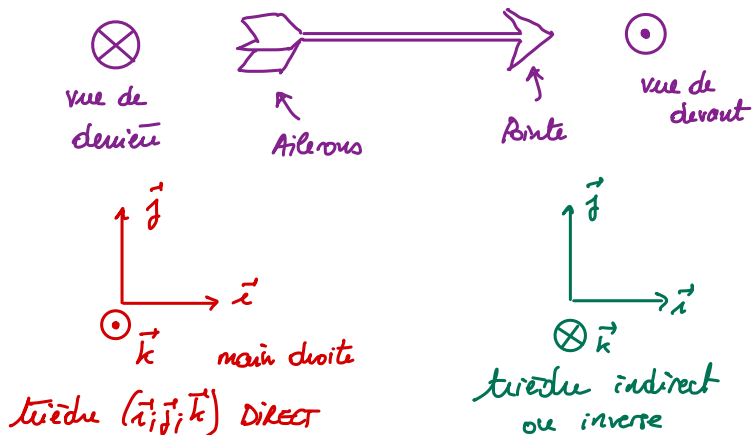
CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

2.1. Bases, repères et orientations

On généralise : les bases $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
 les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la cote
la hauteur

⇒ Orientation



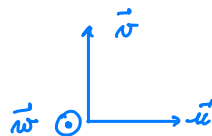
Règle 1: Soient $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ non-coplanaires.

Si je peux mettre $\begin{matrix} \vec{u} \rightarrow \text{pouce} \\ \vec{v} \rightarrow \text{index} \\ \vec{w} \rightarrow \text{ majeur} \end{matrix}$ de la main droite

alors le trièdre $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est direct.

Si non il est indirect ou inverse.

⇒ Conséquences:



Règle 2: Le trièdre reste direct par permutation circulaire

$$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \rightarrow (\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}) \rightarrow (\vec{w}; \vec{u}; \vec{v})$$

La permutation circulaire conserve l'orientation

Règle 3: La permutation simple modifie l'orientation.

Ex: $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ direct $\rightarrow (\vec{v}; \vec{u}; \vec{w})$ inverse

$\rightarrow (\vec{v}; \vec{w}; \vec{u})$ direct

Règle du tire-bouchon ou du tournevis



2.2. PRODUIT SCALAIRE

Même définition qu'à 2D.

Ex: Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle.$$

Wanted: θ au signe près.

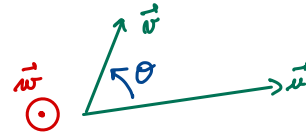
$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$
$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{5}{7}\right) = \pm 44,4^\circ.$$

2.3. PRODUIT VECTORIEL

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \end{array} \longrightarrow \text{Produit vectoriel} \longrightarrow \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Définition: On appelle produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$ ayant:

* la direction perpendiculaire au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



* par un sens tel que $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est direct.

* par une norme $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| |\sin \theta|$ de sorte que $\|\vec{w}\|$ est la surface du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

MAIS $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'est PAS le déterminant 3D !!!

Propriétés :

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
anti-commutativité

- $k \in \mathbb{R}^* \quad \vec{u} \wedge (k\vec{u}) = \vec{0}$

- $\vec{u} \wedge (a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{u} \wedge \vec{v} + b\vec{u} \wedge \vec{w}$

- $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ est ambiguë

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (pas associatif).

Coordonnées : Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ORDRE !!

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

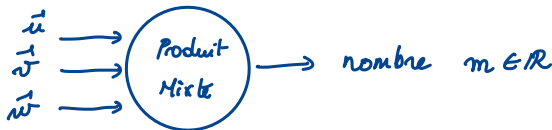
Autre méthode :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -[xz' - zx'] \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Ex : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Wanted: } \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

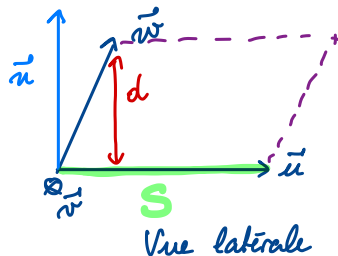
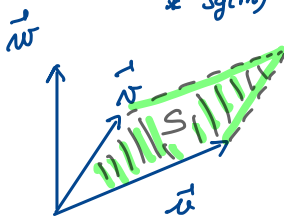
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.4. Déterminant 3D : produit mixte



* $|m|$ est le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

* $\text{sg}(m)$ me donne l'orientation du trièdre $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$



$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{n}$ avec $\|\vec{n}\| = S$. $V = S \times d = \vec{n} \cdot \vec{w}$ (voir 1.4)

$$\Rightarrow m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$\Rightarrow |m| = V$$

$$\Rightarrow m > 0 \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ direct}$$

Propriétés:

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w}$

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$

- $[\vec{u}; \vec{v}; k\vec{w}] = k[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] \quad k \in \mathbb{R}$

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

$$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

- Ex: $[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ou $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = \det(N) = \det(M).$$

→ lien avec le produit matriciel (S2).

Exemple: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

① Orientation de $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$?

② Volume V du parallélépipède engendré par $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$?

$$\Rightarrow [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$\text{avec } \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ +1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 + 8 = 13 > 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ est direct}$$

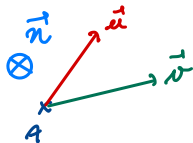
$$\textcircled{2} V = 13 \text{ u.v.}$$

2.5 Droites et plans de l'espace

2.5.1 Plan de l'espace

Pour définir un plan, j'ai besoin :

- 1 point A et 2 vecteurs non-colinéaires



- 1 point A et un vecteur normal $\vec{n}$.

Soit A $(x_A; y_A; z_A)$ et soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Donnons l'éq. de Π contenant A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$\Pi = \{ \pi(x; y; z) / \overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \}$$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \stackrel{\text{eq.}}{=} 0$$

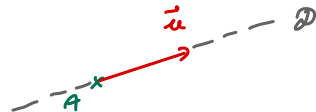
$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$$

$\Rightarrow \Pi: ax + by + cz + d = 0$

2.5.2 Droites de l'espace

Par d'éq. cartésiennes $\Rightarrow \mathcal{D} = \Pi_1 \cap \Pi_2$

MAIS: je peux toujours définir une droite par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.



$$\mathcal{D} = \{ \pi(x; y; z) / \overrightarrow{AP} = t\vec{u} \quad t \in \mathbb{R} \}$$

$\Rightarrow$ On retrouve les éq. paramétriques vues dans le plan :

$$\begin{cases} x = tx_u + x_A \\ y = ty_u + y_A \\ z = tz_u + z_A \end{cases}$$

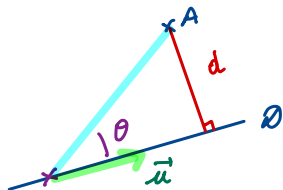
Ex: Qu'est ce que l'ensemble S défini par $\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 6t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases} ?$

$\rightarrow$ C'est la droite dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par A $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.5.3. Calcul de distances

L'outil dépend du vecteur descripteur.

① Distance point-droite



M n'importe quel point de D.

Wanted: d

$$d = MA \cdot |\sin \theta| = \|\vec{MA}\| \cdot |\sin \theta| = \frac{\|\vec{MA}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\sin \theta|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Ex: $D: \begin{cases} x=1+t \\ y=4 \\ z=-t+2 \end{cases}$ $A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Wanted: $d(A; D)$

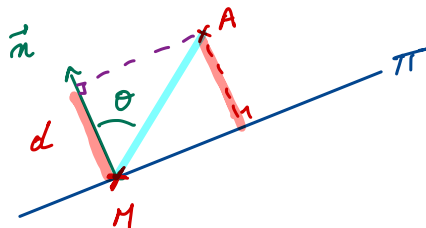
$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{MA} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MA} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{MA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{41}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \approx \underline{4,53 \text{ uL}}$$

② Distance point-plan $d(A; \pi)$



$$d = MA |\cos \theta| = \frac{\|\vec{MA}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot |\cos \theta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$d(A; \pi) = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Question: Soit $\pi: 3x - 2y + z + 2 = 0$
Soit $M \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculer $d(M; \pi)$ avec 3 chiffres significatifs.

Soit N un point de π : $N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{NM} = \begin{pmatrix} 8 - 0 \\ 3 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{|\vec{NM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \frac{21}{\sqrt{14}} \approx 5,61 \text{ u.l.}$$

2.6. SPHÈRES

$$\mathcal{S}(A; R) = \left\{ M(x; y; z) / AM = R \right\}$$

$$\Rightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$$

Ex: Sphère centre $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de rayon 5.

$$\Rightarrow \text{Eq. : } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 25$$

Ex 2: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 36$
est l'éq. de la sphère de centre $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de rayon 6.

$\Rightarrow$ Forme paramétrique?! 🤔 😞

CHAPITRE 3: SYSTÈMES DE COORDONNÉES

3.1. Coordonnées du plan

→ Coordonnées cartésiennes

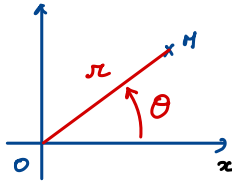
$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\rightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

→ Coordonnées polaires.

(i) Définition :

Soit M du plan : je le repère via le vecteur $\vec{OM}$.



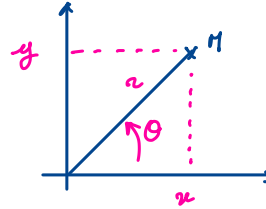
$$r = \|\vec{OM}\| > 0$$

$$\theta = \langle [Ox]; \vec{OM} \rangle$$

⇒ j'associe à M le couple

$(r; \theta)$
coordonnée radiale $r > 0$
coordonnée angulaire $\theta \in]-\pi; \pi]$

(ii) Relations $(r; \theta) \longleftrightarrow (x; y)$



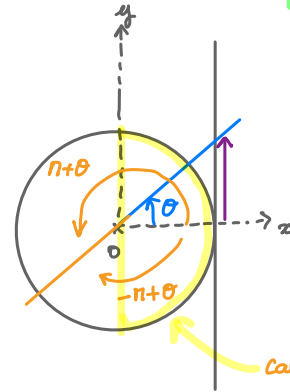
$$(r; \theta) \longrightarrow (x; y)$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$(x; y) \longrightarrow (r; \theta)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



$$\tan(\theta) = \tan(n+\theta)$$

calculatrice

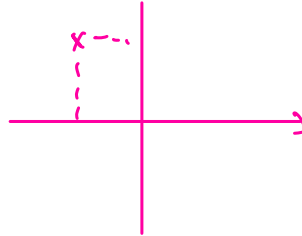
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \left[\pm \pi \text{ si } x < 0 \right]$$

Ex: $x=4 \rightarrow r \text{ et } \theta$
 $y=-7$

$$r = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{65} \quad (\approx 8,06 \text{ uL})$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-7}{4}\right) \approx -60,8^\circ$$

$x=-4 \rightarrow r \text{ et } \theta$
 $y=7$
 $r = \sqrt{65}$ θ



$$\theta = \arctan\left(\frac{7}{-4}\right) + 180^\circ \approx 120^\circ$$

$\rightarrow$ À RETENIR pour les nombres complexes (chapitre suivant).

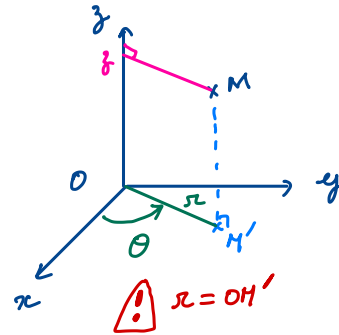
RAJOUTER VECTEURS !!

3.2 COORDONNÉES DE L'ESPACE

- Coordonnées cartésiennes.
- Coordonnées cylindriques.
- Coordonnées sphériques.

3.2.1 Coordonnées cylindriques

"Blaires à 3D"



① Je relie la cote z du point M

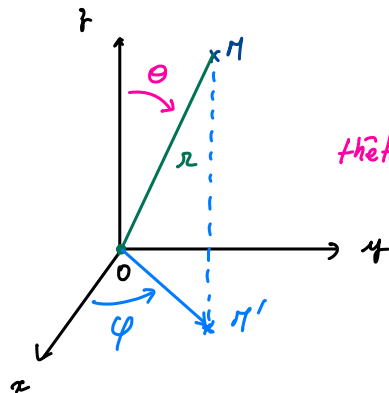
② Je projette M en M' sur le plan (xOy)

③ Je relie $(r; \theta)$ les coordonnées polaires de M'

NB: Mêmes relations de passage que pour les polaires.

$(r; \theta; z)$
 ↗ cote
 ↖ coordonnée radiale
 ↘ coordonnée angulaire

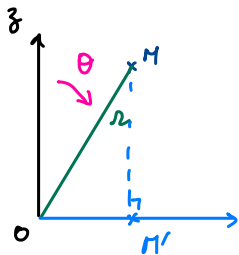
3.2.2. Coordonnées sphériques



- ① $x = OM$
- ② $\theta = \angle [Oz]; \vec{OM}$
colatitude
 $\rightarrow \theta \in [0; \pi]$
- ③ Je projette M en M'
sur (xoy)
 $\varphi = \angle [Ox]; \vec{OM'}$
 $\varphi \in]-\pi; \pi]$
- theta
phi → longitude

Relations de passage

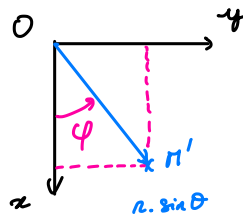
$$(r; \theta; \varphi) \longrightarrow (x; y; z)$$



$$z = r \cdot \cos \theta$$

$$OM' = r \cdot \sin \theta$$

$[OM']$



$$x = OM' \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi = x$$

$$y = OM' \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi = y$$

$$(x; y; z) \longrightarrow (r; \theta; \varphi)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \left[\pm \pi \text{ si } x < 0 \right]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{z}{r} = \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

CHAPITRE 4 : NOMBRES COMPLEXES

• XVI^e siècle :

$$x^2 = 9 \quad \text{😊}$$

$$x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{😊}$$

$$x^2 = -9 \quad \text{😞}$$

$$x^3 = -27 \quad \text{😞}$$

Nombre "impossible" i / $i^2 = -1$.

↳ imaginaire.

• Nombres complexes $z \in \mathbb{C}$

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = a + ib$$

avec $a \in \mathbb{R}$
 $b \in \mathbb{R}$

2 informations

Comment représenter simplement ces deux informations ?

4.1. Formes complexes

→ Approche géométrique

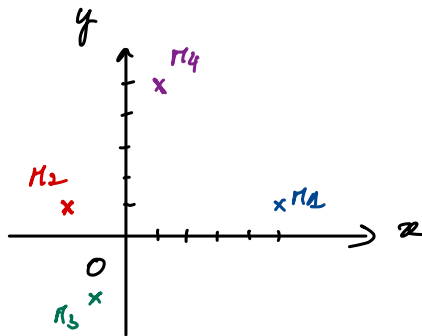
$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow M \in \text{plan} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{affixe (N.F.)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Re}(z) \end{array}$$

⇒ Je travaille dans les systèmes de coordonnées du plan.

4.1.1 Forme algébrique

$$\Leftrightarrow \text{Forme } z = a + ib \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{a partie réelle} \\ \text{Re}(z) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{b partie imaginaire.} \\ \text{Im}(z) \end{array}$$

$$\Rightarrow M(x; y) \quad / \quad \begin{array}{l} x = \text{Re}(z) \\ y = \text{Im}(z) \end{array} \quad \text{CARTÉSIENNES}$$



$$M_1: z_1 = 5 + i$$

$$M_3(z_3) \quad z_3 = -1 - 2i$$

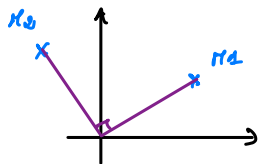
$$M_2(z_2) \quad z_2 = -2 + i$$

$$M_4(z_4) \quad z_4 = 1 + 5i$$

Question: Que représente la multiplication par i

$$z_1 = 3 + 2i$$

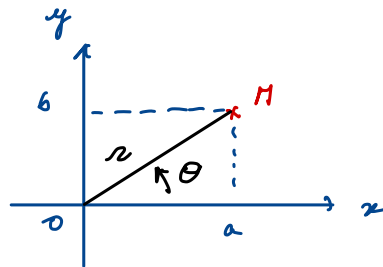
$$z_2 = i z_1 = i(3 + 2i) = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$$



$\Rightarrow$ Une rotation du vecteur $\vec{OM_1}$ de $+90^\circ$

4.1-2. Trigonométrie (exponentielle)

$$\text{Soit } M(z) \quad z = a + ib.$$



POLAIRES

$$\Rightarrow z = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$r \geq 0$ s'appelle le module de z : $r = |z|$

$\theta \in [-\pi; \pi]$ s'appelle l'argument de z : $\theta = \arg(z)$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} [r(\cos \theta + i \sin \theta)] = r(-\sin \theta + i \cos \theta)$$

$$iz = i r \cos \theta + i^2 r \sin \theta = r(-\sin \theta + i \cos \theta)$$

$$\text{Donc } \frac{dz}{d\theta} = iz.$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \underline{r e^{i\theta}}$$



On hérite de toutes les propriétés de l'exponentielle

Bilan: $z = a + ib = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta)$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

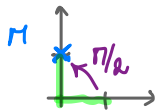
$$a = r \cos \theta$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi \text{ si } a < 0$$

$$b = r \sin \theta$$

Question: Forme exponentielle de $z = i$?

$$i = e^{i \frac{\pi}{2}}$$



4.2. Opérations sur les complexes

4.2.1 Égalité de deux complexes

Soient $z = a + ib = r e^{i\theta}$ et $z' = a' + ib' = r' e^{i\theta'}$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

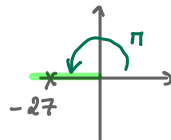
Résoudre: $z^3 = -27$ $z \in \mathbb{C}$.

$z = r e^{i\theta}$ je cherche r et θ tels que:

$$(r e^{i\theta})^3 = 27 e^{i\pi}$$

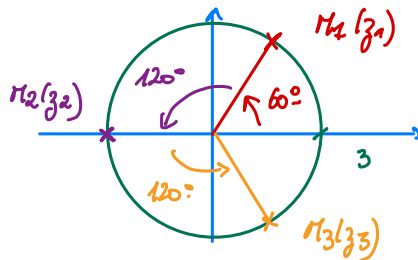
$$\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 27 e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 27 & \text{avec } r \geq 0 \text{ réel.} \\ 3\theta = \pi [2\pi] \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ \theta = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

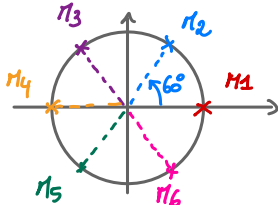
$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3 e^{i\pi/3} \\ z_2 = 3 e^{i\pi} = -3 \\ z_3 = 3 e^{i5\pi/3} = 3 e^{-i\pi/3} \end{cases}$$



Autre exemple, autre méthode :

Recherche $z^6 = 64$ dans $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ Dans $\mathbb{R}$ $\sqrt[6]{64} = 64^{1/6} = 2$



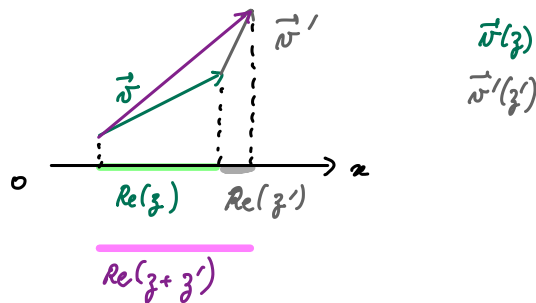
$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \\ z_2 &= 2e^{i\pi/3} \\ z_3 &= 2e^{i2\pi/3} \\ z_4 &= 2e^{i\pi} = -2 \\ z_5 &= 2e^{i4\pi/3} \\ z_6 &= 2e^{i5\pi/3} \end{aligned}$$

4.2.2 Opérations sur les formes

$\rightarrow$ Affixes de vecteurs : elles correspondent aux coordonnées des vecteurs.

Ex : $\vec{u}(1+2i) = \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

① $\operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$



② $\operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$

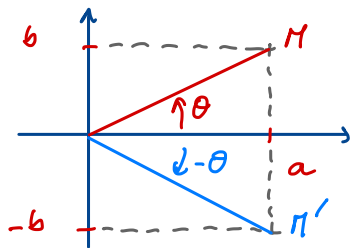
③ $z = re^{i\theta} \quad z' = r'e^{i\theta'}$
 $z \cdot z' = re^{i\theta} \cdot r'e^{i\theta'} = r \cdot r' e^{i(\theta+\theta')}$

$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$

④ $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

4.2.3 Conjugués complexes



Soit $z = a + ib = re^{i\theta}$. On appelle conjugué de z le nombre

$$z' = a - ib = re^{-i\theta}$$

M' et M sont symétriques par rapport à (Ox)

Opération: $z' = \bar{z}$

$$\textcircled{1} \quad z \cdot \bar{z} = re^{i\theta} \cdot re^{-i\theta} = r^2 e^{i(\theta-\theta)} \Rightarrow \underline{z \cdot \bar{z} = r^2 = |z|^2}$$

$$\textcircled{2} \quad z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a \quad \underline{z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)}$$

$$z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib \Rightarrow \underline{z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Soient } z = re^{i\theta} \text{ et } z' = r'e^{i\theta'}$$

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot z'} &= \overline{re^{i\theta} \cdot r'e^{i\theta'}} = \overline{rr' e^{i(\theta+\theta')}} \\ &= rr' e^{-i(\theta+\theta')} = re^{-i\theta} \cdot r'e^{-i\theta'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \end{aligned}$$

$$\text{De plus } \overline{\left(\frac{z}{z'} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

$$\textcircled{4} \quad \overline{z \cdot z} = \bar{z}^2 = (\bar{z})^2 \Rightarrow \underline{\bar{z}^n = (\bar{z})^n}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \overline{z + z'} &= \overline{a + ib + a' + ib'} = \overline{a + a' + i(b + b')} \\ &= a + a' - i(b + b') = \bar{z} + \bar{z'} \end{aligned}$$

Le conjugué conserve toutes les opérations.

4.2.4. Opérations particulières

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

→ Formules d'Euler :

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

→ Formule de Moivre :

$$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

CHAPITRE 5: FONCTIONS NUMÉRIQUES

5.1. DÉFINITIONS

* Soit f une relation de I dans J

$$f: I \longrightarrow J$$

$\uparrow$ ensemble de départ $\nwarrow$ ensemble d'arrivée

Soit $x \in I$ Soit $y \in J$ $y = f(x)$

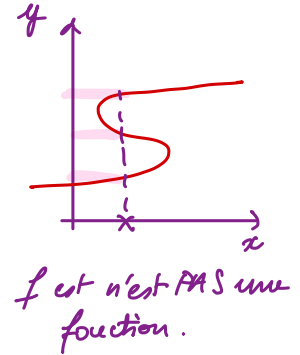
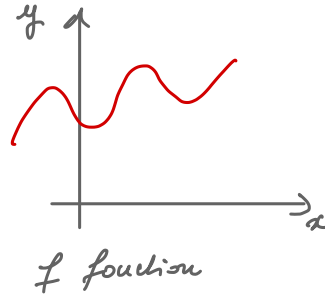
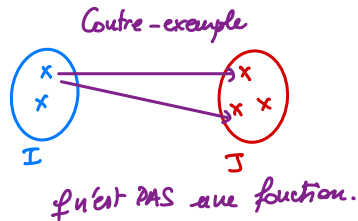
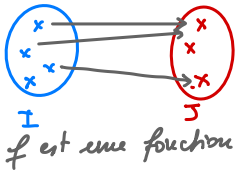
y est une image de x par f

x est un antécédent de y par f .

* $f: I \longrightarrow J$
 $x \longmapsto y = f(x)$ est une fonction $\Leftrightarrow \exists ! y \in J / f(x) = y$.

$\uparrow$ unique

$\Leftrightarrow x$ a au plus une image dans J



* D_f ensemble de définition de f .

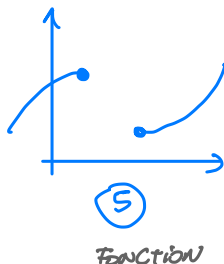
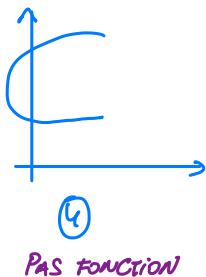
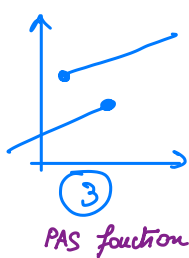
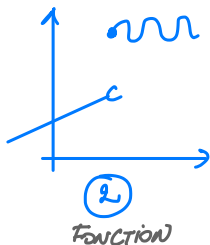
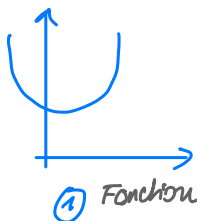
$$D_f = \{ x \in I / f(x) = y \text{ existe} \}$$

* Si $I \subset \mathbb{R}$ et si $J \subset \mathbb{R}$ alors f est une fonction numérique, et réciproquement.

$$* \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\text{si } y \rightarrow \pm\infty \quad x \notin D_f.$$

Ex:



* $E = \{ (x, y) / f(x) = y \}$ s'appelle la courbe représentative de f ou graphe de f .

* $y = f(x)$ est l'équation de E .

Notations: * $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ etc...

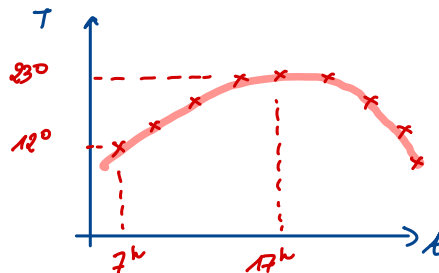
* $f(g(h(x))) = f \circ g \circ h(x)$
 (roule) $\nwarrow$ s'applique de la droite vers la gauche

⚠ $x = \ln(e^x) = \ln \circ \exp(x)$
 $x = e^{-\ln x} = \exp \circ \ln(x)$ 🤔

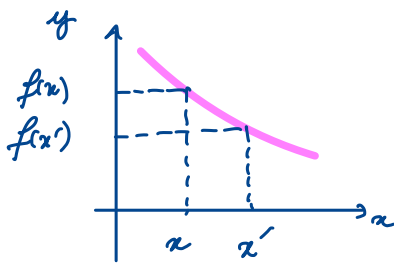
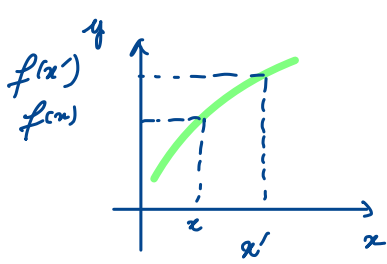
Le sens de la composition est important.

$f \circ g \circ h(x): x \xrightarrow{h} h(x) \xrightarrow{g} g(h(x)) \xrightarrow{f} f(g(h(x)))$

5.2. Caractéristiques des graphes des fonctions



Sens de variation: je dois restreindre l'intervalle d'étude.



Ces deux courbes sont monotones (un seul sens de variation)

f croissante $\Leftrightarrow x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$

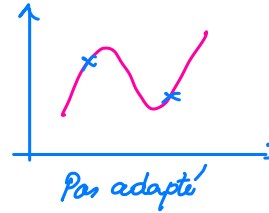
f décroissante $\Leftrightarrow x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$

ajouter "strictement" si ces inégalités sont strictes.

là où f est monotone je peux poser $A = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$

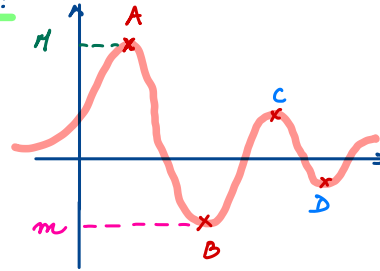
Taux d'accroissement $\begin{pmatrix} A \geq 0 \\ A \leq 0 \end{pmatrix}$

* A n'a de sens que là où f est monotone



* Plus $x' \rightarrow x$ plus le calcul de A a du sens.

Extrema :



A et B sont des extrema globaux

A maximum global

→ Toute valeur supérieure à M est un majorant de f .
 M est la borne supérieure.

→ Toute valeur inférieure à m est un minorant de f .
 m est la borne inférieure.

→ C, c'est un maximum local. D est un minimum local.

5.3. PARITÉ FONCTIONNELLE

- Def:
- $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}f \Leftrightarrow f$ est paire.
 - $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}f \Leftrightarrow f$ est impaire.

Rq: f admet une parité $\Leftrightarrow f$ est paire ou impaire.

Propriété: f admet une parité $\Rightarrow \mathcal{D}f$ est centré en 0
($\mathcal{D}f =]-\alpha; +\alpha[$)

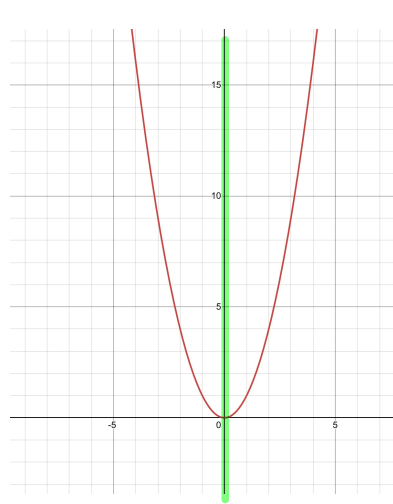
Contraposée: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$

$\mathcal{D}f$ n'est pas centré en 0 $\Rightarrow f$ n'admet pas de parité.

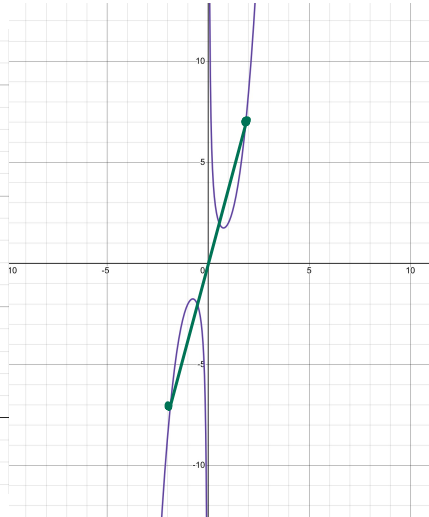
Ex: Soit f telle que $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^+$ alors n'admet pas de parité

$$\rightarrow \sqrt{x}$$

$$\rightarrow \ln(x) \quad (\text{définie sur } \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[)$$



Paire
Axe (oy) de symétrie



Impaire
Centre O de symétrie.

Règles de parité: Soit P paire et I impaire.

$$I(-x) = -I(x) \quad \text{et} \quad P(-x) = P(x)$$

$$\Rightarrow P(-x) \times P(-x) = (P \times P)(-x) = P(x) \times P(x) = (P \times P)(x)$$

« Paire $\times$ Paire $\rightarrow$ Paire »

$$\Rightarrow (I \times P)(-x) = I(-x) \times P(-x) = -I(x) \times P(x) = -(I \times P)(x)$$

« Impaire $\times$ Paire $\rightarrow$ Impaire »

$$\Rightarrow (I \circ I)(-x) = -I(x) \times (-I(x)) = (I \circ I)(x)$$

« Impaire $\times$ Impaire $\rightarrow$ Paire »

De même pour les rapports $\frac{P}{P} \rightarrow P \quad \frac{I}{P} \rightarrow I \quad \frac{I}{I} \rightarrow P \quad \frac{P}{I} \rightarrow I$

Addition: $(P+P)(-x) = P(-x) + P(-x) = P(x) + P(x) = (P+P)(x)$

« Paire + Paire $\rightarrow$ Paire »

$$(I+I)(-x) = I(-x) + I(-x) = -I(x) - I(x) = -(I+I)(x)$$

« Impaire + Impaire $\rightarrow$ Impaire »

⚠ $(P+I)(-x) = P(-x) + I(-x) = P(x) - I(x) = (P-I)(x)$

« Paire + Impaire $\rightarrow$ Ni paire ni impaire »

Parité de quelques fonctions: $f(x) = \cos x$ est paire
 $f(x) = x^n$ a la parité de $|n|$

$f(x) = \cos(x)$ est paire
 $f(x) = \sin(x)$ est impaire $\Rightarrow f(x) = \tan x$ est impaire

Décomposition des fonctions sans parité:

Soit $f(x)$ sans parité. Alors:

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = P(x) + I(x)$$

Fonctions hyperboliques:

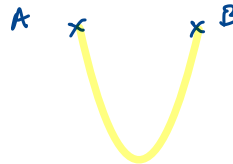
$$e^x = P(x) + I(x)$$

$$P(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

cosinus hyperbolique

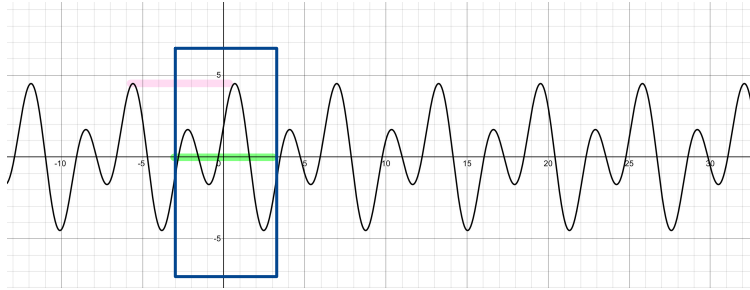
$$I(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

sinus hyperbolique.



5.4. Périodicité

- * f est T -périodique $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}_f / f(x+T) = f(x)$
- * T n'est pas unique, la plus petite valeur positive s'appelle la période de f



noté.

- * Je choisis un motif de largeur d'intervalle T et j'en fais des translations de $k \cdot T \cdot \vec{i}$ $k \in \mathbb{Z}$.

* $f(x) = \cos(\omega x)$ a pour période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$
a comme fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

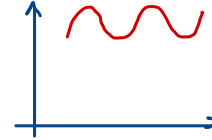
ω s'appelle la pulsation : $\omega = 2\pi \cdot f$.
↑ angle / unité de temps

- NB :
- $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques
 - $\tan$ est π -périodique
 - Si f est T -périodique alors $f(\omega x)$ est $\frac{T}{\omega}$ -périodique.

5.5. Fonctions particulières

5.5.1. Fonctions sinusoïdales

sinusoïde = "en forme de sinuso?"



Quelle équation pour $\mathcal{C}$?

① $f(x) = V_m + A \cos(\omega x + \varphi)$

Annotations :

- V_m : Valeur moyenne ou composante continue
- A : amplitude, $\frac{f_{\max} - f_{\min}}{2}$, $A = \sqrt{2} V_{\text{eff}}$
- ω : pulsation rad/s, %s etc...
- φ : phase (rad ou °) ou déphasage
- V_{eff} : valeur (mesurable) efficace.

② $f(x) = V_m + A \sin(\omega x + \varphi)$

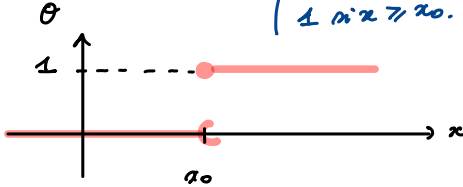
③ $f(x) = \underline{V_m} + \underline{C \cos(\omega x)} + \underline{S \sin(\omega x)}$

↳ Forme utilisée pour les équations différentielles.

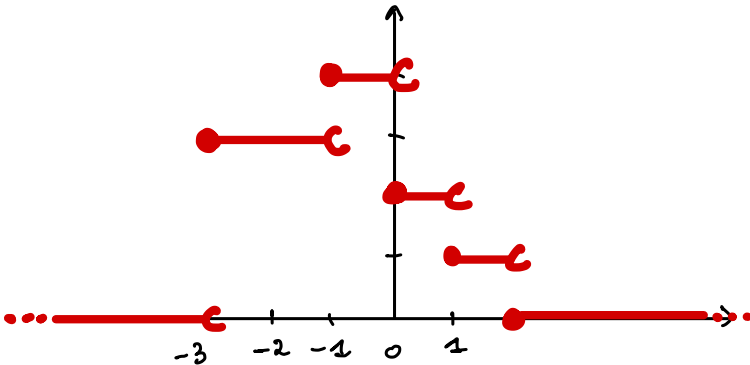
5.5.2 Fonction causale d'Heaviside

Wanted: "j'allume une grandeur"

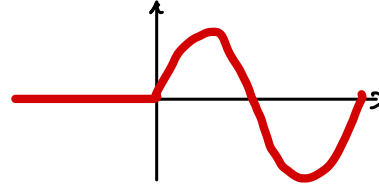
Def: $\Theta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$



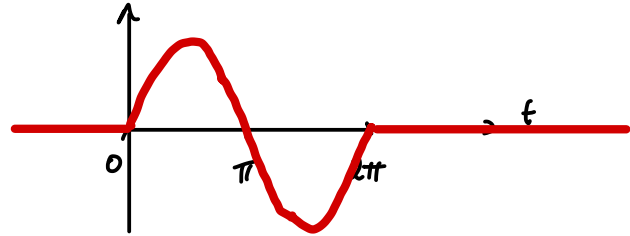
Exemple: Tracer $\underbrace{3\Theta(x+3)}_{x=-3} + \underbrace{\Theta(x+1)}_{x=-1} - \underbrace{2\Theta(x)}_{x=0} - \underbrace{\Theta(x-1)}_{x=1} - \underbrace{\Theta(x-2)}_{x=2}$



Exemples: $f(t) = \Theta(t) \sin(t)$



$f(t) = \underbrace{[\Theta(t) - \Theta(t-2\pi)]}_{\text{Support}} \sin(t)$



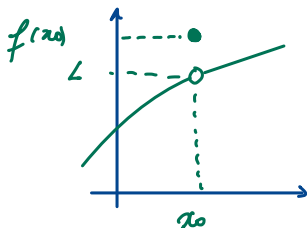
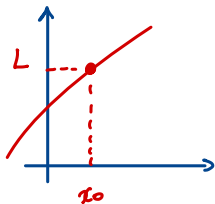
5.6. Limites

Chercher $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ c'est se demander comment se

comporte l'ordonnée de f_p quand x se rapproche de x_0 .

5.6.1. Limites en un point

① $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ avec $L \in \mathbb{R}$.



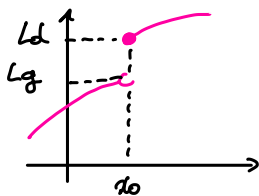
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = f(x_0)$
 f est continue en x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
 mais $L \neq f(x_0)$

Fonction discontinue
 en x_0 .

$\Rightarrow$ En parcourant $\mathbb{Q}$ je peux me rapprocher *autant que je veux* de $y=L$ (sans nécessairement l'atteindre) à condition de me rapprocher *suffisamment* de $x=x_0$.

Autre exemple:



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq L$
 Elle n'existe pas.

$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = Ld$ limite à droite de x_0 .

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = Ld$

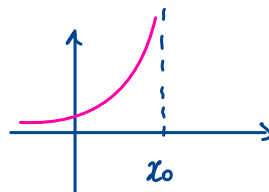
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = Lg \rightarrow$ limite à gauche.

②.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

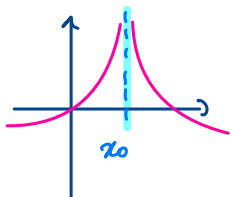
③ La notion de limite en un point se généralise à l'infini

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$

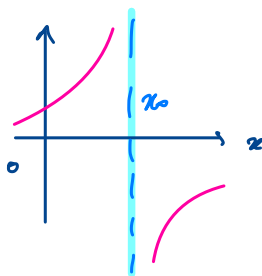


Je peux m'éloigner *autant que je veux* de l'axe (ou) à condition de m'approcher *suffisamment* de $x=x_0$.

La limite existe mais elle est infinie



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

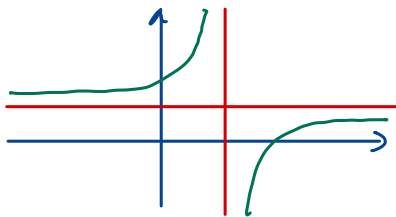
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

La limite n'existe pas.

Dans un des cas, $D: x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Rq: Quelle utilité des asymptotes?

$\hookrightarrow$ comportement asymptotique



$\rightarrow$ On cherche des A.V (asymptotes verticales) ?

$\rightarrow \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$

$\rightarrow f(x) = \frac{1}{x+2}$ définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

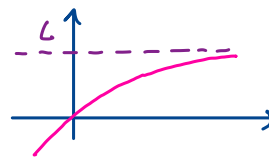
$\rightarrow f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$ définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$



$\Rightarrow$ le calcul de limite est nécessaire pour savoir si j'ai une A.V.

5.6.2. Limites à l'infini

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$



$\Leftrightarrow$

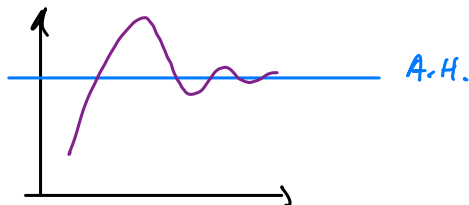
"Je peux me rapprocher autant que je veux de $y = L$ à condition de m'éloigner suffisamment de $(0, y)$."

$\Rightarrow D: y=L$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\pm\infty} f(x) = L$$

Rq:



L'A.H n'est pas infranchissable.

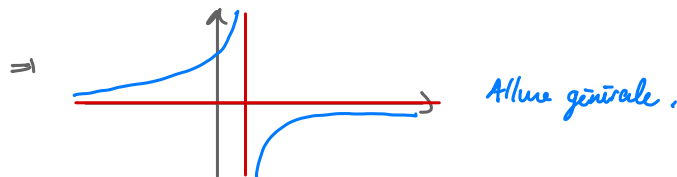
Ex: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $Df =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{1}{x-1} = 0^+$ position relative.

$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{1}{x-1} = 0^-$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = ?$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{array} \right.$



Allure générale.

2. Position relative

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - L = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - y) = 0$

- 0^+ $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D .
- 0^- $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de D .

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

- L^+
- L^-

(Évite de faire la soustraction).

③. Limite infinie à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

« Je peux m'éloigner autant que je veux de l'axe
à condition de m'éloigner suffisamment de l'axe. »

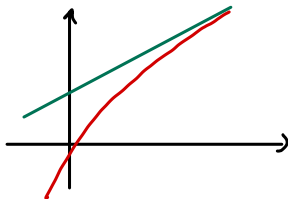
Question: À quelle vitesse je m'éloigne de l'axe?

→ Asymptote oblique (A.O.):

D: $y = mx + p$ est A.O. à ℓ_f en $+\infty$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x)}_{\ell_f} - \underbrace{(mx+p)}_D = 0$$

→ 0^+ ℓ_f au-dessus de D
→ 0^- ℓ_f en-dessous de D.



S.G.2. Recherche d'une A.O.

J'ai vérifié que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

→ Je pose $\underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (mx+p)}_{\text{ou } -\infty} = 0$ comme hypothèse.

1. Recherche de m

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{p}{x} = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{p}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{m}_m + \underbrace{\frac{p}{x}}_0$$

$$\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

1. Si m n'existe pas → pas d'A.O.

2. $m \rightarrow +\infty$. STOP.

Pas d'A.O. mais ℓ_f présente une branche parabolique de direction (Oy).

③ $m=0$ Stop pas d'A.O.

Ep présente une branche parallèle de direction (Ox)

④. $m \in \mathbb{R}^*$ $\rightarrow$ m est direction asymptotique
 $\rightarrow$ recherche de p.

[2.] Recherche de p

$$\lim_{+\infty} f(x) - mx - p = 0 \Rightarrow$$

$$p = \lim_{+\infty} f(x) - mx$$

2 cas : ① $p \in \mathbb{R} \Rightarrow D: y = mx + p$ est A.O à Ep en $+\infty$

② p n'existe pas ou $p \rightarrow \pm \infty \Rightarrow D$ n'est pas A.O.

$\hookrightarrow$ Je n'ai que la direction asymptotique m.

$$\text{Ex: } f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{2x - 1}$$

Etudier les branches infinies de Ep.

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{0,5\} =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\textcircled{1} \lim_{\frac{1}{2}^+} f(x) = \text{F.I.} \Rightarrow \lim_{\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{\frac{1}{2}^+} \frac{x^2 + x + 3}{2x - 1} = +\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty.$$

$\Rightarrow D_1: x = \frac{1}{2}$ est A.V. à Ep.

$$\textcircled{2} \lim_{+\infty} \frac{x^2 + x + 3}{2x - 1} = \lim_{+\infty} \frac{x^2 (1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})}{x (2 - \frac{1}{x})} = +\infty \rightarrow \text{Recherche d'une A.O.}$$

$$* m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 - x} = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} = m$$

$$* p = \lim_{+\infty} f(x) - mx = \lim_{+\infty} \frac{x^2 + x + 3}{2x - 1} - \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^2 + x + 3 - \frac{1}{2}x(2x - 1)}{2x - 1} = \lim_{+\infty} \frac{15x + 3}{2x - 1} = \lim_{+\infty} \frac{15x}{2x} = 0,75$$

$\Rightarrow D_2: y = 0,5x + 0,75$ est A.O à Ep en $+\infty$.

$$\text{De plus } \lim_{+\infty} f(x) - 0,5x - 0,75 = \lim_{+\infty} \frac{15x + 3 - 0,5x(2x - 1) - 0,75(2x - 1)}{2x - 1} = \lim_{+\infty} \frac{3,75}{2x - 1} = 0^+$$

Ep
 $- (0,5x + 0,75)$
 ordonnées de D_2 .

$\Rightarrow$ Ep est au-dessus de D_2 en $+\infty$.

ETC.

5.6.3. Branches infinies

Branche infinie: Cf présente une branche infinie là où l'une des deux coordonnées au moins tend vers $\pm\infty$.

L'étude des branches infinies consiste à étudier les limites et les éventuelles asymptotes.

Il faut aussi préciser les positions relatives courbe - asymptotes.

L'étude des branches infinies se fait dans les trous (crochets ouverts) de l'ensemble de définition.

C/L: ① Df $\rightarrow$ trous.

② Limites

③ Donner les asymptotes

④ Positions relatives.

5.7. Détermination de limites

On peut des limites usuelles $\rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
 $\Rightarrow$ Formulaire $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$
etc ...

Tout qu'il n'y a pas d'antagonisme on effectue les opérations de base

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = +\infty$.

$\swarrow \quad \searrow$
 $+\infty \quad +\infty$

Si on a une forme indéterminée (F.I.) qu'il faut lever au travers d'une investigation supplémentaire.

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^3$ $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ "0 $\times$ ∞ "

$\infty - \infty$ $\begin{matrix} 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \ln \\ \infty \end{matrix}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ "0/0"

$\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \text{ln } x \\ \hline x-1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ x-1 \end{matrix}$

① Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 \quad n \in \mathbb{R}^+$$

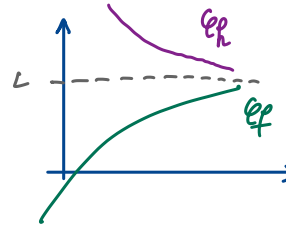
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

"exp l'emporte sur le polynôme qui l'emporte sur ln"

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 7}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 (1 + 1/x^2 + 7/x^3)}{x^2 (2 + 1/x^2)} \xrightarrow{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x} \xrightarrow{2}$

④ Théorème d'encadrement (gendarmes)



$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D_g$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ ou } x_0 \rightarrow \pm\infty.$$

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ Cordaire: $\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{f(x)}_0 \times \underbrace{g(x)}_{\text{bornée}} = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \times \underbrace{\cos x}_{\text{bornée}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{e^{-x}}_0 \times \underbrace{\cos x}_{\text{bornée}} = 0. \quad \rightarrow \text{Oscillations amorties.}$$

② Forme conjuguée "∞-∞"

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 1} \times \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow \text{TD.}$$

③ Factorisation: Faire des rapports entre les formes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty.$$

À l'infini et uniquement à l'infini, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

(5) Règle de l'Hospital

Objectif: lever les F.I. de type $\frac{0}{0}$.

Conditions: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

mais à l'infini

De plus $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

→ f et g doivent vérifier: $\left. \begin{array}{l} f'(x_0) \text{ existe} \\ g'(x_0) \text{ existe} \end{array} \right\}$ ou admettent des limites.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{l'Hospital}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1-x} = -1.$$

Autre exemple: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{l'Hospital}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{l'Hospital (bis)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x)}{2} = 1.$$

5.8. Continuité

5.8.1. Définitions

(1) f est continue partout où je peux tracer $\mathcal{C}_f$ sans lever la pointe.

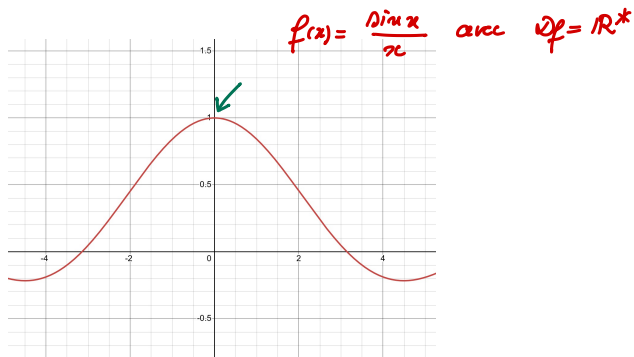
(2) f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \\ L = f(x_0) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(3) $\forall x \in I$ f est continue $\Leftrightarrow f$ est continue sur I .

→ Où f est-elle continue?

5.8.2 Prolongement par continuité



$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Soit une nouvelle fonction $\tilde{f} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \tilde{f}$ s'appelle le prolongement par continuité en 0 de f .

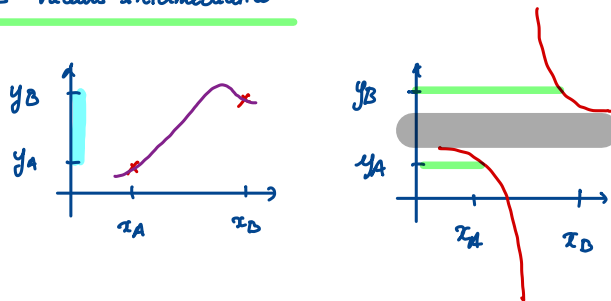
$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f} = \tilde{f}(0) \Leftrightarrow \tilde{f} \text{ est continue en } 0.$$

Règle: Soit f non-définie en x_0 mais telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ alors on peut prolonger f en x_0 au travers de $\tilde{f}$ telle que

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = L \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en x_0 .

5.8.3 Valeurs intermédiaires



Théorème: Si f est continue sur $I = [x_A; x_B]$

T.V.I. et si $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$

ALORS

$$\forall y \in]y_A; y_B[\quad \exists x \in I / f(x) = y.$$

Corollaire #1: Si f continue sur I change de signe sur I alors $\exists x / f(x) = 0$.

Ex: Wanted: $x_0 / x = \cos x$ à 10^{-2} près

$f(x) = x - \cos x$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ Je cherche $f(x_0) = 0$.

Dichotomie:

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 & f(1) &= 0,46 & x_0 &\in]0; 1[\\ f(0,5) &= -0,378 & \Rightarrow & & x_0 &\in]0,5; 1[\end{aligned}$$

$$\vdots$$

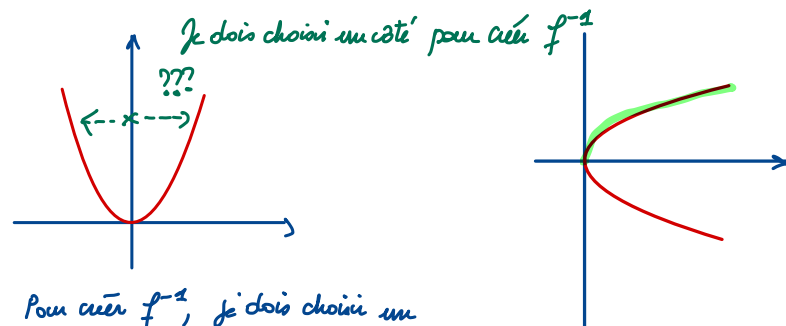
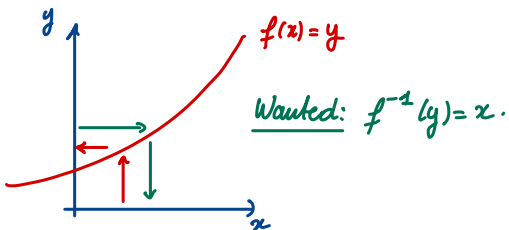
$$f(0,73) = -0,0152 \quad \text{et} \quad f(0,74) = 0,0015 \dots$$

$$\Rightarrow x_0 \in]0,73; 0,74[$$

Corollaire #2 : Si f continue sur I ne s'y annule pas, elle n'y change pas de signe.

Ex: $\text{sg}(x^2+x+1) \quad \Delta < 0 \quad x^2+x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

5.8.4 Bijection réciproque



Pour avoir f^{-1} , je dois choisir un intervalle où f est bijective.

f bijective de I sur J unique.

$\Leftrightarrow \forall y \in J \quad \exists ! x \in I / f(x) = y$

$\Leftrightarrow$ Chaque $y \in J$ n'a qu'un seul antécédent $x \in I.$

Théorème de bijection : f est bijective là où elle est continue et monotone et réciproquement.

Si f réalise une bijection de I dans $J \quad f: I \rightarrow J$
il existe f^{-1} bijection réciproque $f^{-1}: J \rightarrow I$

Propriétés de f^{-1} :

* $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x.$

⚠ Intervalles de bijection

* f^{-1} continue et monotone sur J et de même sens de variation que $f.$

* $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $\Delta: y=x.$

* $f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow (f \circ f^{-1})'(x) = 1$

$(f^{-1})'(x) \times f' \circ f^{-1}(x) = 1$

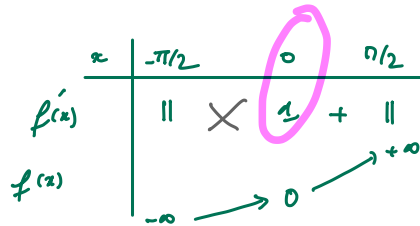
$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$

Ex: $f(x) = \tan(x)$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + [n] \right\}$$

$$\pi\text{-périodique} \Rightarrow I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad f \text{ impaire} \Rightarrow I^* = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad \forall x \in I^*$$



$\Rightarrow f$ réalise une bijection $f: I \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \exists f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow I$ bijective

$$f^{-1}(x) = \arctan(x)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + [f \circ \arctan x]^2}$$

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

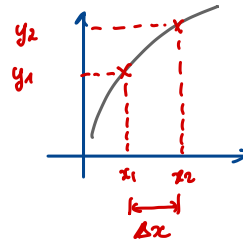
NB: $\bullet \arcsin(x): [-1; 1] \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\bullet \arccos(x): [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5.9. Dérivabilité'



$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{taux d'accroissement}$$

$$= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

A a d'autant plus de sens que $\Delta x \rightarrow 0$.

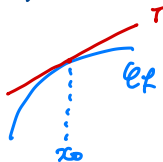
5.9.1 Nombre dérivé

* f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = N \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

* f dérivable sur $I \Leftrightarrow f$ dérivable en tout $x \in I$.

* Si le nombre N existe, il constitue la pente de T :



* Si N existe je peux l'associer à x_0 .

Je pose $N = f'(x_0)$ et je l'appelle nombre dérivé de f en x_0 .

f de x_0 prime.

* On définit des notions de limites à gauche et à droite.

$\Leftrightarrow f$ dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0+) = f'(x_0-) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

5.9.2 Fonction dérivable

$$x \xrightarrow{f'} f(x)' = f'(x)$$

Je me suis une fonction qui associe à chaque x la valeur du nombre dérivé correspondant.

Ex: $f(x) = x^2$

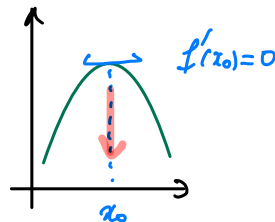
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = f'(x)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x$$

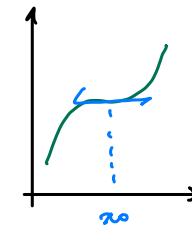
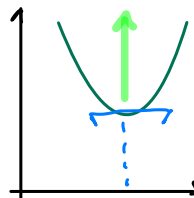
Que veut dire $\varepsilon \rightarrow 0$?

Je considère que $\varepsilon \rightarrow 0$ dès que la portion de courbe est assimilable à une droite.

5.9.3. Dérivées successives



$$f''(x_0) < 0$$



$f''(x_0) = 0$
Point d'inflexion

$$\Rightarrow f \text{ est maximale en } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

5.9.4. Dualité de la notation

Notation: $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f$ dérivé par rapport à x de f .

$= df/dx$ variation de f dirigée par variation de x

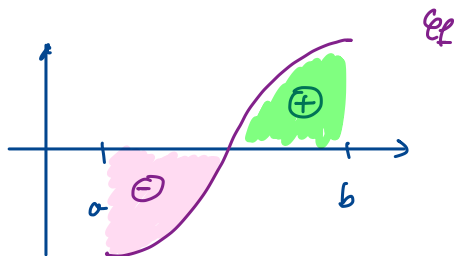
$$\frac{d}{dx} f = 4x = \frac{df}{dx} \Rightarrow df = 4x \cdot dx$$

↑
suffisamment petit

CHAPITRE 6 : INTÉGRALES

$$Q: \int_0^2 4x^3(2x^4+7)^8 dx = ?$$

6.1 Du calcul systématique à la primitive

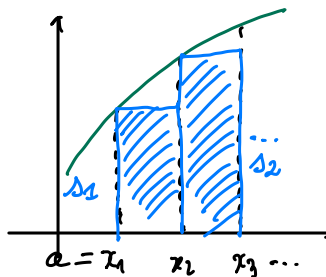
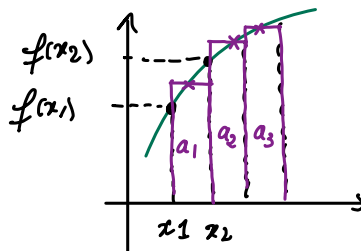


Je veux A (aire, surface) orientée et délimitée par :

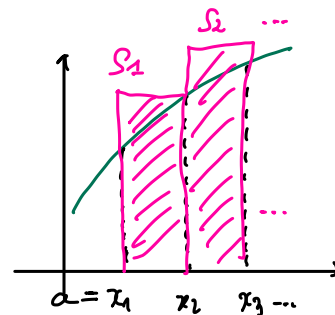
$$\begin{cases} D_1: x=a \\ D_2: x=b \\ (Ox) \\ \text{et } Q \end{cases}$$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

6.1.1 Sommes de Riemann - Darboux



$$s = \sum_i s_i$$



$$S = \sum_i S_i$$

$$\Rightarrow s \leq A \leq S$$

* Entre chaque x_i , on a un écart Δx

* $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S = A.$

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

$f(x)$



$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow dx \rightarrow 0$ (notation).

NB: On passe d'un calcul discret à un calcul continu.

6.1.2 Propriétés

① Hérite de toutes les propriétés de la somme.

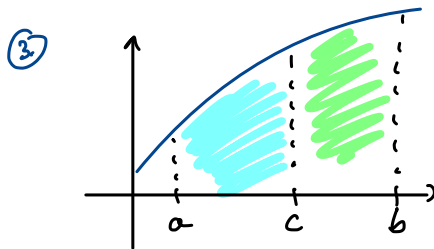
⚠ $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \times \int_a^b g(x) dx.$

$(1 \times 3) + (2 \times 4) \neq (1+2) \times (3+4)$

② $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

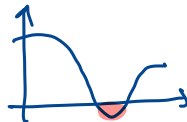
$dx < 0$
 $dx > 0$





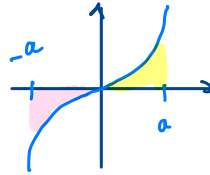
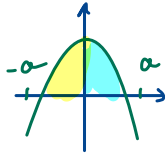
Chasles: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \forall c \in]a, b[.$

④ $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$



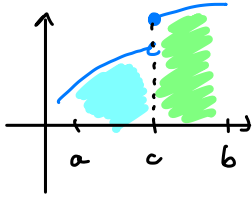
La réciproque est fautive

⑤ f est paire $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$



f impaire $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Question: Si f est discontinue?



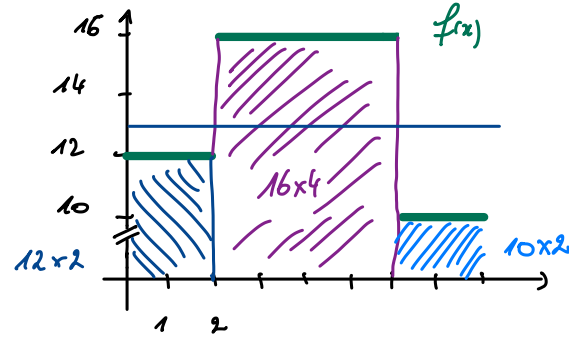
$\Rightarrow$ j'utilise la relation de Charles.

6.1.3. Moyenne d'une fonction

Illustration: $\langle N \rangle$ est la moyenne de mes notes

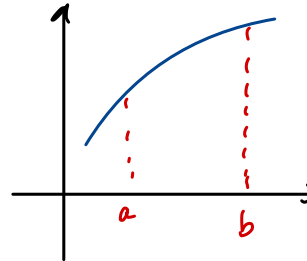
j'ai eu $\left\{ \begin{array}{l} 12 \text{ au coef } 2 \\ 16 \text{ au coef } 4 \\ 10 \text{ au coef } 2 \end{array} \right.$

$$\langle N \rangle = \frac{12 \times 2 + 16 \times 4 + 10 \times 2}{8} = 13,5$$



$$\langle N \rangle = \frac{\int_0^8 f(x) dx}{8-0}$$

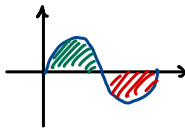
moyenne de f sur $[a; b]$



$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

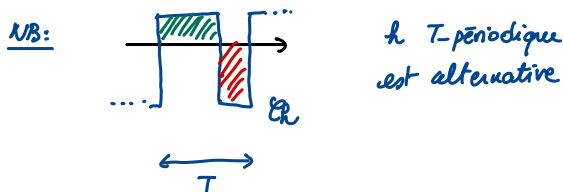
largeur d'intervalle

NB: $f(x) = \sin(x)$
 $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(x) dx$
 $= 0$



De même $g(x) = \cos(x) \Rightarrow \langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(x) dx = 0$.

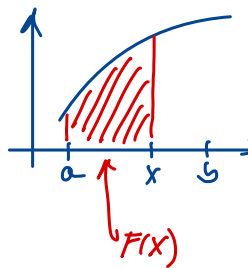
Définition: f périodique et de valeur moyenne nulle
 $\Leftrightarrow$
 f est alternative.



6.1.4 Primitives

Objectif: calcul d'aire $\rightarrow$ Opération sur la fonction systématique

① Définition: Soit f continue sur $[a; b]$ et soit $x \in [a; b]$.
 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ est la primitive de f qui s'annule en a .



$$\int_a^a f(x) dx = F(a) = 0.$$

② soit F primitive de f qui s'annule en $x_0 \in \text{adp.}$

$$F(a) = \int_{x_0}^a f(x) dx \quad F(b) = \int_{x_0}^b f(x) dx$$

(En effet, $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx \\ &= \int_a^{x_0} f(x) dx - \int_{x_0}^a f(x) dx \end{aligned}$$

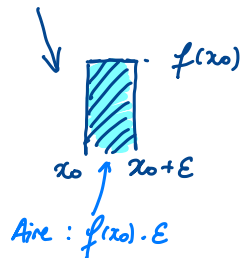
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

notation

③ Wanted: F

Soit F la primitive de f qui s'annule en x_0
(c'est-à-dire n'importe quelle primitive de f).

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f(x) dx = F(x_0+\varepsilon) - F(x_0)$$



$$\Rightarrow f(x_0) \cdot \varepsilon = F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0) \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$f(x_0) = \frac{F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)}{\varepsilon} \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow 0$$

→ je l'écris avec lim

$$\Rightarrow f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)}{\varepsilon}$$

⇒ f est donc la dérivée de F.

⇒ l'intégration utilise l'opération réciproque de la dérivée.

⚠ f admet une infinité de primitives (à la constante près).

⇒ notation: $\int f(x) dx$ intégrale indéfinie

designe l'ensemble des primitives de f

6.2. Méthodes d'intégration

Obj: trouver des primitives.

Ex: $f(x) = x^2 e^{x^3} = x^2 \exp(x^3)$ 😊

$g(x) = x \exp(x^3)$ 😞

Méthode: 4 questions

- ① Est-ce une forme immédiate?
- ② Sinon, est-ce une fraction rationnelle?
- ③ Sinon, puis-je faire une IPP?
- ④ Sinon je change de variable.

6.2.1 Formes immédiates

Ce sont les formes élémentaires et les formes usuelles.

Formes usuelles: $(u^n)' = n u^{n-1} \rightarrow u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$$(uov)' = u'ov \rightarrow \boxed{u'xov \rightarrow uov}$$

Ex: $f(x) = 3x(x^2+7)^4$

Je cherche $u'u^n$ $n=4$ identifier
 $u = x^2+7$ identifier

CQSSI = ? $u' = 2x$

CQSSI = $2x(x^2+7)^4 = u'u^n$

CQSVI = $3x(x^2+7)^4 = \frac{3}{2} CQSSI$

$f(x) = \frac{3}{2} u'u^n \rightarrow F(x) = \frac{3}{2} \frac{u^{n+1}}{n+1} + k \quad k \in \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{3}{2} \frac{(x^2+7)^5}{5} + k = \frac{3}{10} (x^2+7)^5 + k$

Ex: $f(x) = x^2 \exp(x^3)$

$\rightarrow$ Je n'arrive pas à identifier $u'u^n$

$f(x) = x^2 \exp(x^3)$ 2 identifications: $u = x^3$
 $u' = 3x^2$
 $u' \times u'ov$

CQSSI = ? Je calcule $u' = 3x^2 \Rightarrow CQSSI: 3x^2 \exp(x^3)$

CQSVI : $x^2 \exp(x^3) = \frac{1}{3} CQSSI$

$f(x) = \frac{1}{3} u'xov \rightarrow F(x) = k + \frac{1}{3} uov \quad k \in \mathbb{R}$

$F(x) = k + \frac{1}{3} \exp(x^3)$

Contre-exemples: * $f(x) = 3x^2(x^2+7)^4$

$\begin{cases} n=4 \\ u = x^2+7 \end{cases} \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow u'u^n = 2x(x^2+7)^4$

$f(x) = \frac{3}{2} x u'u^n$ **STOP**

* $f(x) = x \exp(x^3) \quad u'xov = 3x^2 \exp(x^3)$

$f(x) = \frac{1}{3x} u'xov$ **STOP.**

Cela fonctionne si CQSVI = cote $\times$ CQSSI

(2.) $\rightarrow$ Fractions rationnelles = rapports de polynômes.

$\hookrightarrow$ Chapitre suivant.

6.2.2. Intégration par parties

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \underbrace{\int_a^b (uv)' dx}_{\left[u(x)v(x) \right]_a^b} - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b u'v dx = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b u v' dx$$

Objectif: calculer $\left[uv \right]_a^b$

Soit $\int_a^b f(x) dx$: je peux faire une IPP si $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = \underbrace{u'(x)}_{\text{à "primitive"}} \cdot \underbrace{v(x)}_{\text{à dériver ("à dérivé")}}$$

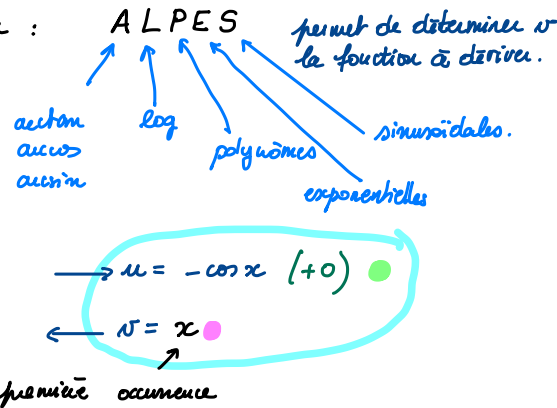
à "primitive" à dériver ("à dérivé").

Réaliser l'IPP demande à choisir la fonction v (à dérivé) adéquate

Ex: $\int_0^\pi x \cdot \sin(x) dx$

$$f(x) = x \cdot \sin(x)$$

Aide à la décision :



● $u' = \sin x$

● $v' = 1$

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \underbrace{\left[-x \cos x \right]_0^\pi}_{\text{première occurrence}} - \int_0^\pi \underbrace{-1 \cos x dx}_{\text{secondaire}}$$

$$-\pi \cos \pi + 0 \cos 0 = \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi x \sin x dx = \pi + \underbrace{\int_0^\pi \cos x dx}_{\text{secondaire}} \quad \boxed{\text{STOP}}$$

pour calculer ceci → 4 questions.

6.2.3 Changement de variable

→ Par l'exemple.

Ex: $I = \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$

→ Je pose $x = 2t$

Méthode en 4 étapes:

① Je change l'élément

② Je change l'intégrande

③ Je change les bornes

④ Je remonte les étapes pour écrire I .

① $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(2t) = 2.$

$\frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow \underline{dx = 2dt}$

② $\frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{(2t)^2 + 4} = \underline{\underline{\frac{1}{4t^2 + 4}}}$

③ $\left. \begin{array}{l} x \text{ va de } 0 \text{ à } 2 \\ 2t \text{ va de } 0 \text{ à } 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{t \text{ va de } 0 \text{ à } 1}$

④ $I = \int_0^1 \frac{1}{4t^2 + 4} \cdot 2 \cdot dt$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{4} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \left[\arctan(t) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\arctan(1) - \arctan(0) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \boxed{\frac{\pi}{8} = I} \end{aligned}$$

6.2.4. Méthodes ad'hoc

$I = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx \rightarrow$ 2 IPP successives permettent de calculer I

mais $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$ linéarisation du $\cos^2(x)$

$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx$ immédiate

Chapitre 7 : Intégration des Fractions rationnelles

f est une fraction rationnelle $\Leftrightarrow f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ où

A et B sont des polynômes.

NB: $A(x)$ peut-être une constante.

7.1. Polynômes

P est un polynôme $\Leftrightarrow P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
terme dominant terme constant

① $n = \deg(P)$ degré de P .
puissance la plus élevée

② a_k s'appellent les coefficients : $a_k \in \mathbb{R}$ $a_k \in \mathbb{C}$
etc...

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Rq:

$$\begin{cases} \deg(x^3 + 10x^2) = 3 \\ \deg(3x^2 + 18000) = 2 \\ \deg(4x + 7) = 1 \\ \deg(7) = 0 \\ \deg(0) = -\infty \text{ convention} \end{cases}$$

③ Soient deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$
avec $\deg(A) \geq \deg(B)$

alors il existe deux polynômes uniques (à une constante multiplicatrice près) $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$\begin{cases} A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \\ \deg(R(x)) < \deg(B(x)) \end{cases} \leftarrow \text{garantit l'unicité de } Q \text{ et } R.$$

A	B
R	Q

17	5
2	3

④ Dans ces conditions: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{Q(x)}{1} + \frac{R(x)}{B(x)}$

$\uparrow$ partie entière $\nwarrow$ partie fractionnaire

Illustration: $17 \over 5 \Rightarrow 3 + \frac{2}{5}$

entier fractionnaire

Illustration: $3x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = P(x)$

$P(10) = 3000 + 200 + 50 + 4 = 3254.$

④ Si $R(x) = 0$ $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) \Leftrightarrow$ A est divisible par B.

⑤ $I = \int_a^b \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int_a^b \left(Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \right) dx = \underbrace{\int_a^b Q(x) dx}_{\text{forme immédiate}} + \int_a^b \frac{R(x)}{B(x)} dx$

⑥ Division de polynômes:

Ex: $I = \int_0^1 \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1}{x^2 + x + 1} dx$

① Forme immédiate? Non

② Fraction rationnelle? Oui

$\deg(x^4, \dots) > \deg(x^2, \dots)$

$\deg N > \deg D$

$\uparrow$ numérateur $\nwarrow$ dénominateur

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1 \\ - (x^4 + x^3 + x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + x^3 + 2x^2 + 5x - 1 \\ - (x^3 + x^2 + x) \\ \hline \end{array}$$

$$0 + x^2 + 4x - 1$$

$$- (x^2 + x + 1)$$

$$0 + 3x - 2$$

$x^2 + x + 1$

$x^2 + x + 1$

STOP car $\deg(R) < \deg(D)$

reste dénominateur diviseur

$$\Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} + \frac{3x-2}{x^2+x+1}$$

La partie entière est une forme simple.

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} + \frac{3x-2}{x^2+x+1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{3x-2}{x^2+x+1} dx$$

La partie fractionnaire est à intégrer.

$$P(x) = (x+1) Q_1(x) \quad P(x) = (x-6) Q_2(x)$$

$$P(x) = (x+1)(x-6)$$

③ Si r est racine de P alors P est divisible par $(x-r)$

④ x est racine multiple d'ordre N

$\Leftrightarrow x$ annule P N fois

$$\Leftrightarrow \exists Q! / P(x) = (x-x)^N Q(x)$$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad x=1 \text{ (racine double)}$$

⑤ Soit $x(N)$ de P

$$P(x) = (x-r)^N (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)$$

$$= (x-r)^N Q(x)$$

$$P'(x) = N(x-r)^{N-1} Q(x) + (x-r)^N Q'(x)$$

$$= (x-r)^{N-1} [N Q(x) + (x-r) Q'(x)]$$

$$\Rightarrow P'(r) = 0.$$

7.2. Racines de polynômes

① x est racine de $P(x) \Leftrightarrow P(x)=0$.

② x est racine de $P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-r) Q(x)$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad P(x) = x^2 - 5x - 6$$

$$\Delta = 49 = 7^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5-7}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{5+7}{2} = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(n) \text{ de } P \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} P(n) = 0 \\ P'(n) = 0 \\ P^{(2)}(n) = 0 \\ P^{(3)}(n) = 0 \\ \vdots \\ P^{(n-1)}(n) = 0 \end{array} \right\} n \text{ annule } n \text{ polynômes}$$

$$P^{(n)}(n) \neq 0.$$

$$\text{Ex: } P(x) = (x-1)^2 \quad 1(2)$$

$$P'(x) = 2(x-1)$$

$$P''(x) = 2$$

⑥ Théorème d'Alembert:

Un polynôme de degré n admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$.

⑦ Soit P un polynôme à coefficients réels

$$\text{Si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ avec } P(z) = 0$$

$$\text{alors } P(\bar{z}) = 0.$$

Démo: $\overline{P(z)} = 0 \Rightarrow$ la conjugaison s'applique sur les x .

⑦ Tout polynôme à coeff. réels de degré impair s'annule au moins une fois.

6.4. Fractions rationnelles

Définition: f est une fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{où } N \text{ et } D \text{ sont des polynômes}$$

Pôles de f : a est un pôle de f de multiplicité N
 $\Leftrightarrow$
 a est racine de multiplicité N du dénominateur $D(x)$.

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$$\textcircled{1} \deg N \geq \deg D$$

$$J_e \text{ réduis } f(x) \quad \begin{array}{c} N \mid D \\ R \mid Q \end{array}$$

$$f(x) = Q + \frac{R(x)}{D(x)} \quad \leftarrow \text{partie fractionnaire}$$

② $\deg N < \deg D. \Rightarrow f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$
est décomposé en éléments simples.

6.4.1. Éléments simples (ES)

① ES de 1^{ère} espèce (ES1)

→ Formes immédiates.

$$es(x) = \frac{A}{(x-a)^N} \quad a \text{ et } A \in \mathbb{R} \text{ ni j'intègre dans } \mathbb{R}$$

Ex: $\frac{3}{(x-1)^2}$ $\frac{3x}{(x-1)^2}$ $\frac{3}{x^2-1}$ $\frac{3}{(x^2-1)^2}$ $\frac{3}{x-1}$

DÈS MAINTENANT: on intègre dans $\mathbb{R}$.

j'associe un ou plusieurs ES1 à un pôle réel.

② j'associe à chaque couple a et $\bar{a}$ un ES de seconde espèce

(ES2): $es(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^N}$ avec $A, B, p, q \in \mathbb{R}$

Ex: $\frac{2}{x^2+x+1}$ $\frac{3x-4}{x^2+x+1}$ $\frac{2x+9}{(x^2+x+1)^3}$ $\frac{2x+9}{x^3+x+1}$

6.4.2. Théorème de décomposition

Énoncé FR: Toute partie fractionnaire se décompose comme une somme d'éléments simples.

Lequel: $\forall a \in \mathbb{R}$ j'associe 1ES1

$\forall (a, \bar{a}) \in \mathbb{C}^2$ j'associe 1ES2

j'associe à $a(N)$ j'associe N ES.

Ex: $\frac{x+4}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$

$\uparrow$
 $1(1) \in \mathbb{R}$
 $-1(1) \in \mathbb{R}$

$\frac{x+4}{x^2-2x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$

$\uparrow$
 $1(2) \in \mathbb{R}$

$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B}{x+3}$

$\uparrow$ $\uparrow$ $-3(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \text{ ES1}$

$2(2) \in \mathbb{R} \rightarrow 2 \text{ ES1}$

$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+B_2}{x^2+x+1}$

$\uparrow$ $\Delta < 0$

$1(1) \in \mathbb{R}$
 $\downarrow$
 1 ES1

$\uparrow$ couple $(1) \in \mathbb{C}$
 $\rightarrow 1 \text{ ES2}$

M nombre magique.
 $M = \deg(D)$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{(x-1)(x+4)^3(x^2+x+2)^2}$$

$\Delta < 0$

$$\deg D = M = 8.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \text{ ES } 1 \\ -4(3) \in \mathbb{R} \rightarrow 3 \text{ ES } 1 \\ \text{couple } (2) \in \mathbb{C} \rightarrow 2 \text{ ES } 2 \end{array} \right\} 1 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 2 = 8 = M.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+4} + \frac{B_2}{(x+4)^2} + \frac{B_3}{(x+4)^3} + \frac{C_1x+C_2}{x^2+x+2} + \frac{C_3x+C_4}{(x^2+x+2)^2}$$

$M=8$ et j'ai 8 coefficients.

6.4.3. Identification

Ne pas ramener au même dénominateur.

Astuce #1:

Si $p(1) \in \mathbb{R}$ associé A alors $A = \lim_{x \rightarrow p} (x-p)f(x)$.

simple

$$\text{Ex: } f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$(x-2)f(x) = \frac{x+1}{x-3} = A \frac{x-2}{x-3} + B$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f(x) = -3 = \lim_{x \rightarrow 2} A \frac{x-2}{x-3} + B = B.$$

$\Rightarrow B = -3.$

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} A \frac{x-3}{x-3} + B \frac{x-3}{x-2} = A$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \frac{4}{1} = 4 = A$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} \Rightarrow F(x) = 4 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + K.$$

Que faire avec un pôle multiple?

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-4)^2(x-3)}$$

① $\deg N < \deg D$ oui $1 < 3$
 $M=3$

② $4(2) \in \mathbb{R} \rightarrow 2 \text{ ES } 1$
 $3(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \text{ ES } 1$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{(x-4)^2} + \frac{B}{x-3}$$

④ Identification :

$$\text{Astuce \#1} \Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-4)^2} = 4.$$

$$\begin{aligned} \otimes \lim_{x \rightarrow 4} (x-4) f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(x-4)}^2(x-3)} = \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{A_1 \cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} + \frac{A_2 \cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}^2} + B \frac{x-4}{x-3} = \infty. \end{aligned}$$

→ L'A#1 est inutilisable sur les pôles multiples.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^2 f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{A_1 (x-4)^2}{x-4} + \frac{A_2 \cancel{(x-4)}^2}{\cancel{(x-4)}^2} + \frac{B(x-4)^2}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \underbrace{A_1 (x-4)}_{\rightarrow 0} + A_2 + B \underbrace{\frac{(x-4)^2}{x-3}}_{\rightarrow 0} = A_2 \end{aligned}$$

Astuce #2: Si $p(N) \in \mathbb{R}$ associe à $\frac{A_1}{x-p} + \frac{A_2}{(x-p)^2} + \dots + \frac{A_N}{(x-p)^N}$

$$A_N = \lim_{x \rightarrow p} (x-p)^N f(x)$$

$$A_2 = \lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-3} = \frac{5}{1} = 5.$$

→ Je n'ai pas déterminé A_1 .

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-4)^2(x-3)}$$

$$f(x) = \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{(x-4)^2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x A_1}{x-4} + \frac{x A_2}{(x-4)^2} + \frac{x B}{x-3}$$

$$= A_1 + 0 + B$$

Astuce #3: J'identifie $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k f(x)$ avec $k=1, 2, 3, \dots$

$$A_1 + B = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{(x-4)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = 0.$$

$$A_1 + B = 0 \Rightarrow A_1 = -4.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-4}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2} + \frac{4}{x-3}$$

$$F(x) = -4 \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + 4 \ln|x-3| + K$$

Ex: $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2 (x+4) (x^2+x+1)}$

① $1 < 5$ $M=5$

② $1(2) \in \mathbb{R} \rightarrow 2 \in S_1$
 $-4(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \in S_1$

1 couple $(1) \in \mathbb{C} \rightarrow 1 \in S_2$

③ $f(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+4} + \frac{C_1x+C_2}{x^2+x+1}$

$M=5$ et j'ai 5 constantes 😊

$A \neq 1$

$A \neq 2$

$A \neq 3$: $A_1 + B + C_1 = \dots$

Astuce #4: Sous réserve de définition je calcule

$f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, etc.

Cas particulière: $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)x^5}$

① $2 < 7$ $M=7$

② 1 couple (1) de $\mathbb{C} \rightarrow 1 \in S_2$
 $0(5)$ de $\mathbb{R} \rightarrow 5 \in S_1$

③ $f(x) = \frac{A_1x}{x^2+1} + \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{x^2+1}} + \frac{B_1}{x} + \frac{\cancel{B_2}}{\cancel{x^2}} + \frac{B_3}{x^3} + \frac{\cancel{B_4}}{\cancel{x^4}} + \frac{B_5}{x^5}$

Astuce #5: Si f est paire (resp. impaire) je supprime les termes impairs (resp. pairs).

THE END

