

Outils mathématiques 1 — TD 7 : Continuité, dérivabilité et fonctions réciproques

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Donner une approximation à 10^{-2} près des solutions de l'équation $x^2 = -\ln(x)$.
2. Prolonger par continuité chacune des fonctions $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier la dérivabilité sur \mathbb{R} de leurs prolongements par continuité.
3. Lorsque c'est possible, prolonger par continuité les fonctions suivantes :

$$(a) f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad (b) g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

4. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par morceaux par

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

5. À l'aide des formules de dérivées usuelles, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad 2) f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} \quad 3) f(x) = \exp\left[\tan(x^2 + 1)\right]$$

$$4) f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) \quad 5) f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) \quad 6) f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

$$7) f(x) = \arctan(3x) \quad 8) f(x) = \arctan(3x) \quad 9) f(x) = \arccos(2x + 1)$$

$$10) f(x) = \arcsin(x^2) \quad 11) f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

6. Remplir le tableau ci-dessous :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}$
$\arccos(x)$											
$\arcsin(x)$											
$\arctan(x)$											