

Outils mathématiques — Test 4 — Janvier 2021

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 15 min.

NOM :

GROUPE :

NOTE :

/3

Chaque question vaut 1 point.

1. Décomposer en éléments simples la fonction $f(x) = \frac{2x+6}{(x-3)(x+1)}$

deg N < deg D → je décompose

*Pôles: $3(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \in \mathbb{1}$
 $-1(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \in \mathbb{1}$* $\Rightarrow f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$

On identifie: $A = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6}{x+1} = \frac{12}{4} = 3 = A$

$B = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+6}{x-3} = \frac{4}{-4} = -1 = B$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{x-3} - \frac{1}{x+1}$

2. Décomposer en éléments simples la fonction $g(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2(x-1)}$

deg N < deg D → on décompose

Pôles: $2(2) \in \mathbb{R} \rightarrow 2 \in \mathbb{1}$

$1(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \in \mathbb{1}$

$g(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-1}$

avec $B = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-5}{(x-2)^2} = \frac{-3}{1} = -3$

$A_2 = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{x-1} = -\frac{1}{1} = -1$

Enfin $\lim_{x \rightarrow \infty} xg(x) = 0 = A_1 + B \Rightarrow A_1 = 3$

$\Rightarrow g(x) = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-1}$

3. Décomposer en éléments simples la fonction $h(x) = \frac{3x^2 + 3x + 2}{x \cdot (x^2 + 2)}$

$\deg N < \deg D \rightarrow$ On décompose

Pôles: $0(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1 \in S_1$

1 couple (1) de $\mathbb{C} \rightarrow 1 \in S_2$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + B_2}{x^2 + 2}$$

$$\text{onc } A = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2} = 1$$

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 3 = A + B_1 \Rightarrow B_1 = 2$$

$$\text{Finalement, } h(x) = A + \frac{B_1}{3} + \frac{B_2}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{B_2}{3} = \frac{8}{3} - A - \frac{B_1}{3} = \frac{8}{3} - 1 - \frac{2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow B_2 = 3$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x + 3}{x^2 + 2}$$

4. Question bonus de la nouvelle année : décomposer en éléments simples la fonction $j(x) = \frac{x - 1}{x(x^2 - 1)}$

$$j(x) = \frac{x - 1}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x(x + 1)} = \frac{1 + x - x}{x(x + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}$$