$A(3;4;6)$ $\quad B(5;7;-4)$ $\quad C(-3;1;2)$

1) Plan (ABC)

2) distance C et (AB).

1) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 7-4 \\ -4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3-3 \\ 1-4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ +68 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Soit $M \in (ABC)$ alors $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 = \begin{pmatrix} -42 \\ 68 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-6 \end{pmatrix} = 0$

$$-42x + 126 + 68y - 272 + 12z - 72 = 0$$

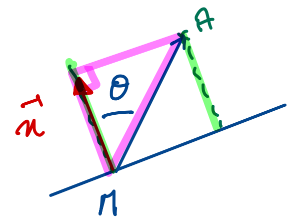
$$\Rightarrow \boxed{(ABC) : -42x + 68y + 12z - 218 = 0}$$

2) $d = \dfrac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} = \dfrac{\sqrt{6532}}{\sqrt{113}} \simeq \underline{7{,}60 \text{ uL}}$

$\pi : x + 2y - z + 4 = 0$ $\qquad A(1;2;3)$

$d(A;\pi)$

$M(0;-2;0) \in \pi$ $\qquad \vec{MA} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2+2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



$$\frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = d$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{MA} \cdot \vec{n} = 1 + 8 - 3 = 6$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{6}$

$$d = \frac{6}{\sqrt{6}} \simeq \underline{2{,}45 \text{ uL}}$$

Outils mathématiques 1 — TD 3 : Systèmes de coordonnées

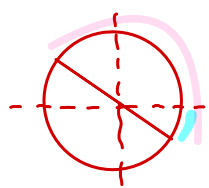
1. Coordonnées du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants, repérés soit en coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$, soit en coordonnées polaires $(r\,;\theta)$:

$A(r=3{,}5\,;\theta=40^o)$; $B(x=2;y=2{,}5)$; $C(r=4;\theta=35^o)$; $D(r=5;\theta=\pi/12)$; $E(x=-1;y=3)$;
$F(r=3;\theta=125^o)$; $G(r=1{,}5;\theta=-20^o)$; $H(x=2;y=-1)$; $I(r=3{,}5\,;\theta=-2\pi/3)$

En calculant les coordonnées des points dans les deux systèmes de coordonnées, déterminer
- (a) quel point est le plus éloigné de l'origine, et quel le point en est le plus proche ;
- (b) quels points sont plus proches de l'origine que le point B ;
- (c) le point le plus haut, le plus bas, le plus à droite et le plus à gauche du plan ;
- (d) le point le plus proche de l'axe des abscisses, et le point le plus proche de l'axe des ordonnées.

Point	Cartésiennes $(x;y)$	Polaires $(r;\theta)$
A	$(2{,}68\,;\,2{,}25)$	$(3{,}5\,;\,40°)$
B	$(2\,;\,2{,}5)$	$(3{,}20\,;\,51{,}3°)$
C	$(3{,}28\,;\,2{,}29)$	$(4\,;\,35°$
D	$(4{,}83\,;\,1{,}29)$	$(5\,;\,\pi/12) = (5\,;\,15°)$
E	$(-1\,;\,3)$	$(3{,}16\,;\,108°)$
F	$(-1{,}72\,;\,2{,}46)$	$(3\,;\,125°)$
G	$(1{,}41\,;\,-0{,}513)$	$(1{,}5\,;\,-20°)$
H	$(2\,;\,-1)$	$(2{,}24\,;\,-26{,}6°)$
I	$(-1{,}75\,;\,-3{,}03)$	$(3{,}5\,;\,-\frac{2\pi}{3}) = (3{,}5\,;\,-120°)$



(a) $r_{max} = 5$ le plus loin de O est D.
$r_{min} = 1{,}5$ le plus proche de O est G.

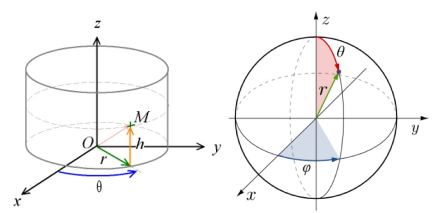
(b) Je cherche $r < 3{,}20$: E, F, G, H.

(c) y_{max} : le plus haut → E
y_{min} : le plus bas → I
x_{min} : le plus à gauche → I
x_{max} : le plus à droite → D.

(d) le plus proche de (Ox) a le $|y|_{min}$: c'est G
de (Oy) a le $|x|_{min}$: c'est E.

2. Coordonnées de l'espace

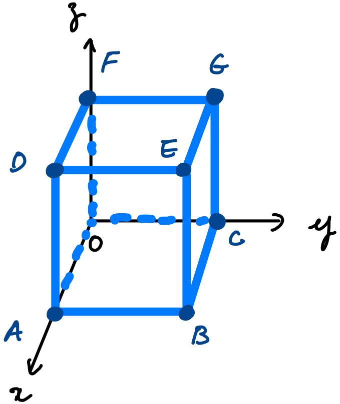
On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. La figure ci-dessous rappelle les variables utilisées pour repérer un point en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.



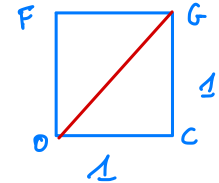
À gauche : Coordonnées cylindriques À droite : Coordonnées sphériques

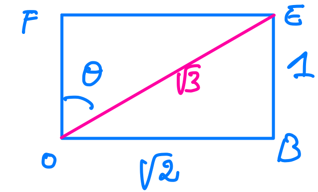
Fig. 1 : Systèmes de coordonnées dans l'espace

2.1 Calculer les coordonnées **sphériques**, puis **cylindriques**, des sommets du cube de côté 1 et dont les vecteurs du repère forment trois arêtes.



	Cartésiennes $(x;y;z)$	Cylindriques $(r;\theta;z)$	Sphériques $(r;\theta;\varphi)$
A	$(1;0;0)$	$(1;0;0)$	$(1;90°;0)$
B	$(1;1;0)$	$(\sqrt{2};45°;0)$	$(\sqrt{2};90°;45°)$
C	$(0;1;0)$	$(1;90°;0)$	$(1;90°;90°)$
D	$(1;0;1)$	$(1;0;1)$	$(\sqrt{2};45°;0)$
E	$(1;1;1)$	$(\sqrt{2};45°;1)$	$(\sqrt{3};54{,}7°;45°)$.
F	$(0;0;1)$	$(0;0;1)$	$(1;0;0)$
G	$(0;1;1)$	$(1;90°;1)$	$(\sqrt{2};45°;90°)$
O	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$	$(0;0;0)$





$\theta = \arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$

$\theta = \arcsin\left(\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)$

ou $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) = 54{,}7°$

θ : co-latitude.
φ : longitude.

2.2 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, donner les coordonnées **sphériques** et **cylindriques** des points A, B, C, D dont les coordonnées **cartésiennes** sont : $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;2\,;2)$, $C(-1\,;5\,;0)$ et $D(0\,;3\,;-1)$.

Cylindriques :

$$\begin{cases} z = z \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \ (!) \end{cases}$$

Sphériques :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi. \\ z = r\cos\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos(z/r) \\ \varphi = \arctan(y/x)\ (!) \end{cases}$$

$A(1;0;2)$

Sphériques:

$$\begin{cases} r = \sqrt{5} \\ \theta = \arccos\left(2/\sqrt{5}\right) = 26{,}6^\circ \\ \varphi = \arctan(0) = 0 \end{cases}$$

$(\sqrt{5};\ 26{,}6^\circ,\ 0)$

Cylindriques:

$$\begin{cases} r = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$(1;0;2)$

$C(-1;5;0)$

Sphériques:

$$\begin{cases} r = \sqrt{26} \\ \theta = \arccos(0) = 90^\circ \\ \varphi = \arctan\left(\frac{5}{-1}\right) + 180^\circ = 101^\circ \end{cases}$$

Cylindriques:

$$\begin{cases} r = \sqrt{26} \\ \theta = 101^\circ \\ z = 0 \end{cases}$$

$B(2;2;2)$

Sphériques:

$$\begin{cases} r = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \\ \theta = \arccos\left(2/\sqrt{12}\right) = 54{,}7^\circ \\ \varphi = \arctan\left(2/2\right) = 45^\circ \end{cases}$$

$(\sqrt{12};\ 54{,}7^\circ;\ 45^\circ)$

Cylindriques:

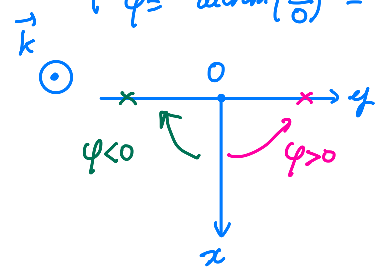
$$\begin{cases} r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \theta = 45^\circ \\ z = 2 \end{cases}$$

$(2\sqrt{2};\ 45^\circ;\ 2)$

$D(0;3;-1)$

Sphériques:

$$\begin{cases} r = \sqrt{10} \\ \theta = \arccos\left(-1/\sqrt{10}\right) = 108^\circ \\ \varphi = \text{“}\arctan\left(\frac{3}{0}\right)\text{”} = 90^\circ \end{cases}$$



Cylindriques:

$$\begin{cases} r = 3 \\ \theta = 90^\circ \\ z = -1 \end{cases}$$

$(\sqrt{10};\ 108^\circ;\ 90^\circ)$

$(3;\ 90^\circ;\ -1)$

2.3 Dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé, calculer les coordonnées **cartésiennes** :

(a) du point A dont les coordonnées **sphériques** sont : $r = 3$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$;

(b) du point B dont les coordonnées **cylindriques** sont : $r = 2$, $\theta = 5\pi/4$, $z = 1$.

(a) $x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi = 3\sin(\pi/3)\cos(\pi/6)$

$= 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9/4$

$y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi = 3\sin(\pi/3)\sin(\pi/6)$

$= 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

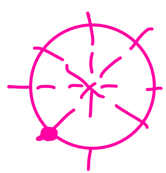
$z = r\cos\theta = 3\cos(\pi/3) = 3/2$

$A \left(9/4 \,;\, \frac{3\sqrt{3}}{4} \,;\, \frac{3}{2}\right)$

(b) $x = r\cos\theta = 2\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$y = r\sin\theta = 2\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$z = 1$



$(-\sqrt{2} ; -\sqrt{2} ; 1)$

2.4 En coordonnées **cylindriques**, l'ensemble des points tels que r =constante est :

(A) un cercle ; (B) un cylindre ; (C) une ~~sphère~~

2.5 En coordonnées **sphériques**, l'ensemble des points tels que θ =constante est :

(A) un cercle passant par les pôles ; (B) un ~~disque horizontal~~ ; (C) un cône d'axe (Oz)

2.4. Réponse B.

2.5. Réponse C.

Outils mathématiques 1 — TD 4 : Nombres complexes

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Géométrie dans le plan

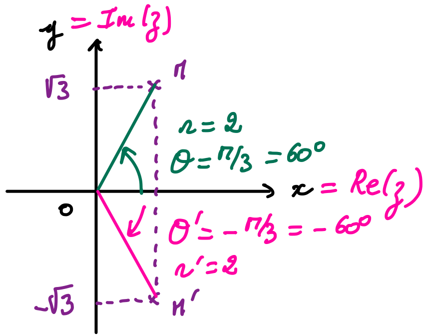
1.1 On considère les points M et M' de coordonnées respectives $\left(1\,;\,\sqrt{3}\right)$ et $\left(1\,;-\sqrt{3}\right)$:

(a) déterminer leurs affixes z et z' sous forme algébrique.

(b) donner les expressions exponentielles de z et z'.

(c) Que constituent z et z' l'un pour l'autre ?

Plaçons M et M' dans le plan.



(a) $\left.\begin{array}{l} z = 1 + i\sqrt{3} \\ z' = 1 - i\sqrt{3} \end{array}\right\}$ $z = x + iy$

(b) $z = re^{i\theta}$ Ce sont les mêmes r et θ que les polaires

r : module $r = |z|$

θ : argument $\theta = \arg(z)$

$z = 2e^{i\pi/3} = 2e^{i60°} = 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$

$z' = 2e^{-i\pi/3} = 2e^{-i60°}$

(c) Ce sont des conjugués : $\left\{\begin{array}{l} z' = \overline{z} \\ z = \overline{z'} \end{array}\right.$

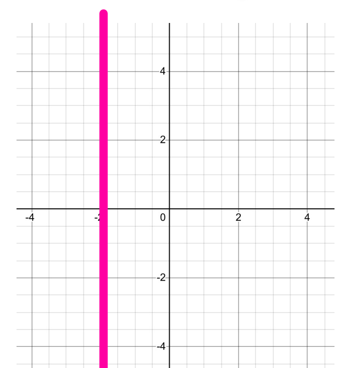
$\Rightarrow z\overline{z} = r^2$

$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

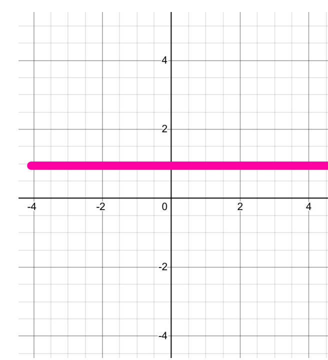
1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes z telles que :

(a) $\mathrm{Re}(z) = -2$; (b) $\mathrm{Im}(z) = 1$; (c) $|z| = 4$; (d) $|z| = -3$; (e) $\arg(z) = \pi/4$;

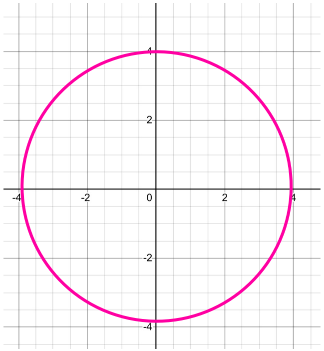
(f) $z \cdot \overline{z} = 4$; (g) $z + \overline{z} = -4$; (h) $z - \overline{z} = 8i$; (i) $z = \overline{z}$.



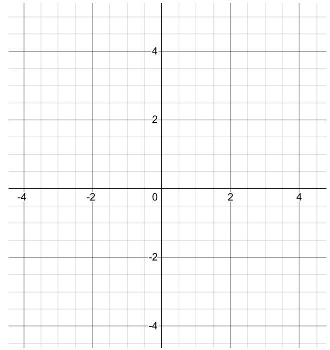
(a) $\mathrm{Re}(z) = -2$



(b) $\mathrm{Im}(z) = 1$

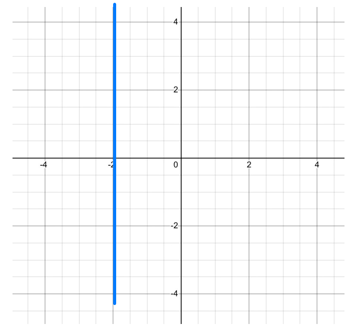


(c) $|z| = r = 4$



(d) $|z| = -3$

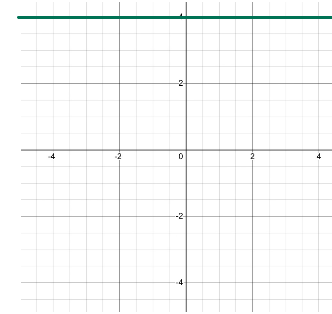
$|z| > 0$ toujours.



(g) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy$

$= 2x = -4$

$\iff x = -2$

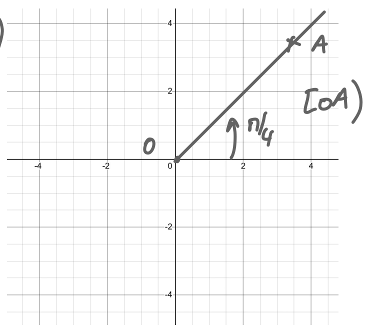


(h) $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy)$

$= 2iy = 8i$

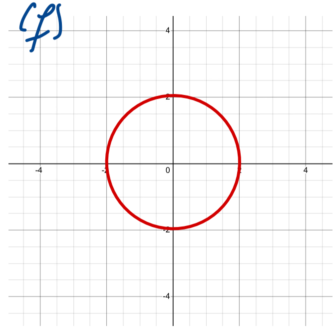
$\iff y = 4$

(e)



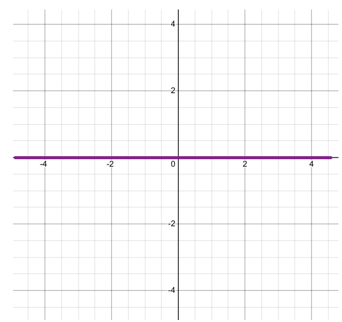
$\arg(z) = \frac{\pi}{4} = \theta$

(f)



$z \cdot \bar{z} = r^2 = 4 \quad r \geq 0$

$\iff r = 2$



(i) $z = \bar{z}$

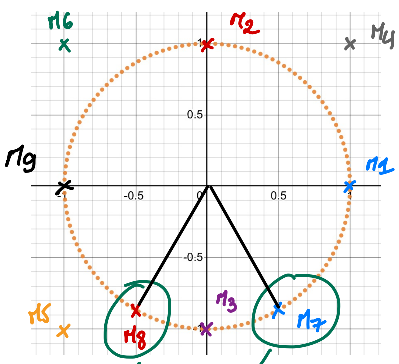
$x + iy = x - iy$

$\begin{cases} x = x \\ y = -y \iff y = 0 \end{cases}$

1.3 Déterminer graphiquement le module et l'argument des nombres suivants et donner leurs expressions exponentielles :

$$z_1 = 1\,;\; z_2 = i\,;\; z_3 = -i\,;\; z_4 = 1+i\,;\; z_5 = -1-i\,;\; z_6 = -1+i\,;$$

$$z_7 = \frac{+1 - i\sqrt{3}}{2}\,;\; z_8 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\;;\; z_9 = -1$$



$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$x + iy = r e^{i\theta}$$

$$z_1 = 1 e^{i0}$$

$$z_2 = 1 e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$$

$$z_3 = 1 e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2}$$

$$z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$z_5 = \sqrt{2}\, e^{-i\,3\pi/4}$$

$$z_6 = \sqrt{2}\, e^{i\,3\pi/4}$$

$$z_7 = 1 e^{-i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$$

$$z_8 = 1 e^{-i2\pi/3} = e^{-i2\pi/3} \quad \left(= e^{-i120°}\right)$$

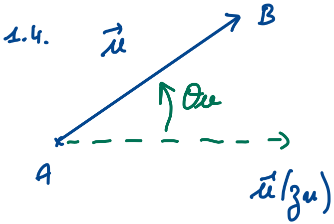
$$z_9 = e^{i\pi}$$

1.4 Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = 2+2i$, $z_B = -1+3i$, et $z_C = 4+6i$, et soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

(a) calculer les affixes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$;

(b) à partir de ces affixes, calculer la valeur de l'angle $\theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

1.4.



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow z_u = z_B - z_A.$$

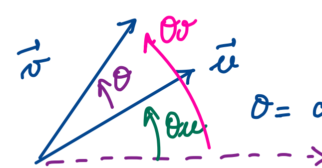
$$\theta_u = \arg(z_u)$$

$$|z_u| = \|\vec{u}\|$$

(a) $z_u = z_B - z_A = -1+3i - (2+2i) = -3+i$

$z_v = z_C - z_A = 4+6i - (2+2i) = 2+4i$

(b) On utilise les formes exponentielles.



$$\theta = \arg(z_v) - \arg(z_u) = \underbrace{\arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right)}_{\text{pas nécessaire ici}}$$

$$\arg(z_u) = \arctan\left(\frac{1}{-3}\right) + \pi = 2{,}82 \text{ rad} = 162°$$

$$\arg(z_v) = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) = 1{,}11 = 63{,}4°$$

$$\theta = \arg(z_v) - \arg(z_u) = \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) = -98{,}2°$$

1.5 Soient A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3+2i$, $z_B = 1-2i$ et $z_C = -1+6i$.

(a) Donner l'affixe de $\overrightarrow{AC}$ sous forme exponentielle et déterminer la distance AC.

(b) Déterminer l'affixe z du point M tel que $3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$.

(a) $z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = -1+6i-(-3+2i) = 2+4i$

$r_{\vec{AC}} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow AC \simeq 4{,}47\ u$

$\theta_{\vec{AC}} = \arctan\left(\frac{4}{2}\right) = 63{,}4° \Rightarrow z_{\vec{AC}} = 2\sqrt{5}\, e^{i63{,}4}$

(b) $3(z_B - z) - (z_A - z) = z_C - z_A$

$3z_B - 2z - \cancel{z_A} = z_C - \cancel{z_A}$

$z = \frac{1}{2}(3z_B - z_C) = \frac{1}{2}\left[3(1-2i)-(-1+6i)\right] = \frac{1}{2}\left[3-6i+1-6i\right]$

$\Rightarrow \boxed{z = 2-6i}$

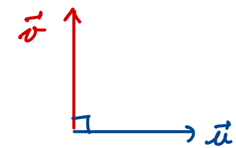
1.6 Soit $\vec{u}$ d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe iz :

(a) que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

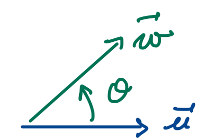
(b) Plus généralement, que dire de $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\theta}z$?

(a) $z' = iz \Rightarrow z' = e^{i\pi/2} z$.

$z = re^{i\varphi} \Rightarrow z' = re^{i(\varphi+\pi/2)}$



(b) $z = re^{i\varphi}$ $\quad z' = e^{i\theta}\cdot r\, e^{i\varphi} = r\, e^{i(\theta+\varphi)}$



$\Rightarrow$ Multiplier par $e^{i\theta}$ correspond à faire une rotation (vectorielle) de θ.

$\rightarrow$ Transformation géométriques.

2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants, et exprimer les résultats obtenus sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 \; ; \; z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} \; ; \; z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i)$$

$z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2 = 1-4i-4-(4+4i-1)$
$= -3-4i-(3+4i) = -6-8i$

$z_1 = re^{i\theta}$ $\quad r = \sqrt{100} = 10$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{-8}{-6}\right) - \pi$ (radians)
$= -2{,}21 = -127°$

$\Rightarrow z_1 = 10\, e^{-i127°} = 10\, e^{-i2{,}21}$

$z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} = \frac{(1+3i)(1-2i)}{5} = \frac{1-2i+3i+6}{5} = \frac{7}{5} + i\frac{1}{5}$

$(1+2i)(1-2i) = 1^2+2^2 = 5$ ou $z\cdot\bar{z} = |z|^2$

$z_2 = re^{i\theta}$ $\quad r = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{1/5}{7/5}\right) + 0 = 0{,}142 = 8{,}13°$

$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\, e^{i8{,}13°} = \sqrt{2}\, e^{i0{,}142}$

$z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i) = 3i - 4 - (\cancel{3} \underbrace{-i-9i}_{-10i} \cancel{-3}) = -4+13i$

$z_3 = re^{i\theta} \Rightarrow$ $\quad r = \sqrt{185}$

$\theta = \arctan\left(\frac{13}{-4}\right) + \pi$ (radians)

$= 1{,}87 = 107° \Rightarrow z = \sqrt{185}\; e^{i107°}$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(1)\; z^2 = -9 \; ; \; (2)\; z^2 + 3z + 4 = 0 \; ; \; (3)\; z^2 + 2\sqrt{3}\cdot z + 4 = 0$$
$$(4)\; z + 2i = iz - 1 \; ; \; (5)\; 2z + i = \bar{z} + 1 \; ;$$
$$(6)\; z^4 = 1 \; ; \; (7)\; z^3 = -1 \; ; \; (8)\; z^4 = -16 ; \; (9)\; z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$$

(1) $z = \pm 3i$ ou $\begin{cases} z_1 = -3i \\ z_2 = 3i \end{cases}$

(2) $az^2 + bz + c = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \delta \,/\, \delta^2 = \Delta$

$\Rightarrow z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$

$z^2 + 3z + 4 = 0$ Wanted: 2 solutions dans $\mathbb{C}$.

$\Delta = 9 - 4\times4\times1 = -7 = (i\sqrt{7})^2$

$z = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2\times1} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2} \\ \text{ou} \\ z_2 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

(3)
$z^2 + 2\sqrt{3}\, z + 4 = 0$ $\quad \Delta = (4\times3) - 4\times4\times1 = 12-16 = -4 = (2i)^2$

$\begin{cases} z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{2\times1} = -\sqrt{3} - i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

$z = \underbrace{-\sqrt{3} \pm i}_{\text{Conjugués.}}$

(4) $z + 2i = iz - 1$; (5) $2z + i = \bar{z} + 1$;

(6) $z^4 = 1$; (7) $z^3 = -1$; (8) $z^4 = -16$; (9) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

(4) $z + 2i = iz - 1$

$z - iz = -1 - 2i$

$z(1-i) = -1-2i$

$\Rightarrow z = \dfrac{-1-2i}{1-i} = \dfrac{(-1-2i)(1+i)}{2}$

$= \dfrac{-1-i-2i+2}{2}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$z = a + ib$

$a + ib + 2i = ia - b - 1$

$(a+1+b) + i(2-a+b) = 0$

$\begin{cases} a+b = -1 \\ -a+b = -2 \end{cases}$

$a = \frac{1}{2}$ $b = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow z = \frac{1}{2} + i\left(-\frac{3}{2}\right)$

(5) $2z + i = \bar{z} + 1$ $z = a + ib$

$2(a+ib) + i = a - ib + 1$

$2a + 2ib + i = a - ib + 1 \Rightarrow (a-1) + i(3b+1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ 3b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = 1 - \frac{i}{3}}$

(6) $z^4 = 1$ Wanted: 4 solutions.

J'écris $z = re^{i\theta}$

Je cherche $z^4 = 1$ ← module 1 argument 0

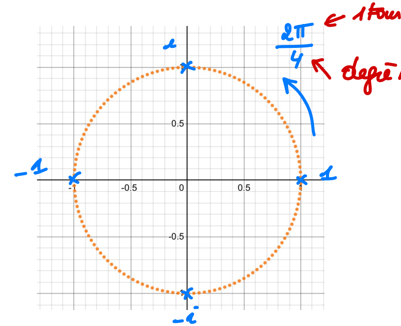
$\Leftrightarrow (re^{i\theta})^4 = 1e^{i0}$

$r^4 e^{i4\theta} = 1e^{i0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \text{ avec } r > 0 \\ 4\theta = 0\ [2\pi] \end{cases}$

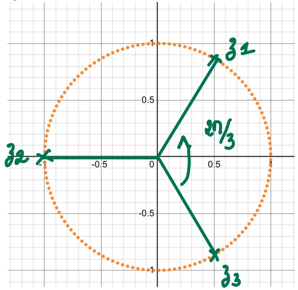
$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0\ [\frac{2\pi}{4}] = 0\ [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1e^{i0} = 1 \\ z_2 = 1e^{i\pi/2} = i \\ z_3 = 1e^{i\pi} = -1 \\ z_4 = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \end{cases}$



(7) $z^3=-1$

Wanted: 3 solutions dans $\mathbb{C}$.



$z^3=-1 \iff r^3e^{i3\theta}=1e^{i\pi}$

En effet $z=re^{i\theta} \iff z^3=(re^{i\theta})^3$

$\iff z^3=r^3e^{i3\theta}$

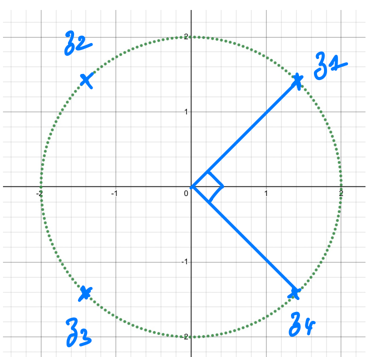
Maintenant, je cherche r et θ tels que

$$\begin{cases} r^3=1 \text{ avec } r>0. \iff r=1 \\ 3\theta=\pi\,[2\pi] \iff \theta=\frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1=1e^{i\pi/3} \\ z_2=1e^{i\frac{3\pi}{3}}=1e^{i\pi}=-1 \\ z_3=1e^{i\frac{5\pi}{3}}=1e^{-i\pi/3} \end{cases}$$

(8) $z^4=-16$ Je cherche 4 solutions dans $\mathbb{C}$.

$r^4e^{i4\theta}=16\,e^{i\pi}$



$$\iff \begin{cases} r^4=16 \text{ avec } r>0 \\ 4\theta=\pi\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2\pi}{4}\right] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_1=2e^{i\pi/4} \\ z_2=2e^{i3\pi/4} \\ z_3=2e^{i5\pi/4}=2e^{-i3\pi/4} \\ z_4=2e\,e^{i7\pi/4}=2e^{-i\pi/4} \end{cases}$$

(h) $z^3=2\sqrt{3}-2i \iff r^3e^{i3\theta}=\underbrace{4\,e^{-i\pi/6}}$

$|2\sqrt{3}-2i|=\sqrt{4\times3+4}=4$

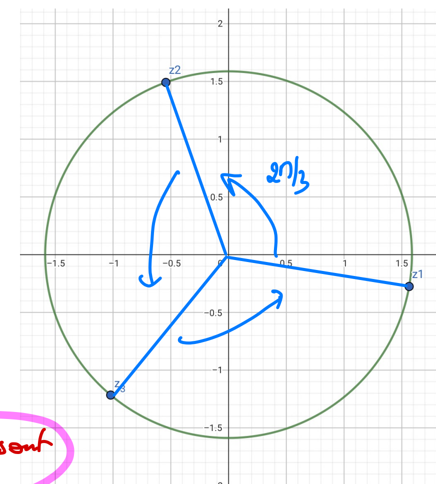
$\arg(2\sqrt{3}-2i)=\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}.$

$$r^3e^{i3\theta}=4e^{-i\pi/6} \iff \begin{cases} r^3=4 \text{ avec } r>0 \\ 3\theta=-\frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt[3]{4}\simeq 1{,}59 \\ \theta=-\frac{\pi}{18}\left[\frac{2\pi}{3}\right]=-10°\,[120°] \end{cases}$$

$=-\frac{\pi}{18}\left[\frac{12\pi}{18}\right]$

$$\begin{cases} z_1=4^{1/3}\,e^{-i\pi/18} \\ z_2=4^{1/3}\,e^{i11\pi/18} \\ z_3=4^{1/3}\,e^{i\frac{23\pi}{18}} \\ \quad=4^{1/3}e^{-i\frac{13\pi}{18}} \end{cases}$$



Les solutions ne sont pas conjuguées.

Exemple pour la suite :

$$(-1+i)^{32} = ? \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad ☺$$

$$|-1+i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(-1+i) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow (-1+i)^{32} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{32} = (\sqrt{2})^{32}\left(e^{i\frac{32\times 3\pi}{4}}\right)$$

$$= 65536\, \underbrace{e^{i24\pi}}_{=1} = 65536$$

2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

$(a)\ z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$; $(b)\ z_2 = (5+3i)^7$; $(c)\ z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; $(d)\ z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$; $(e)\ z_5 = \frac{4+6i}{1-5i}$

(a) $z_1 = \left[1\, e^{-i\pi/3}\right]^6 = 1^6\, e^{-i6\pi/3} = 1\, e^{-i2\pi} = 1 = z_1$

(b) $z_2 = (5+3i)^7 = \left[r\, e^{i\theta}\right]^7$ $\qquad r = \sqrt{34}$, $\theta = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}540$

$$= (\sqrt{34})^7\, e^{i7\times 0{,}540}$$

$$= \sqrt{34}^7\, e^{i\,3{,}78} = 34^{\frac{7}{2}}\, e^{i3{,}78} = 34^{7/2}\, e^{-i2{,}50}$$

$$\simeq 229180\, e^{i\,217°} \simeq 229180\, e^{-i143°}$$

(c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{2\, e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Ou bien

$$z_3 = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

(d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}\right)^2}{\left(2\, e^{i\pi/6}\right)^3} = \frac{2\, e^{-i2\pi/4}}{8\, e^{i3\pi/6}} = \frac{1}{4}\, e^{-i\pi} = -\frac{1}{4}$

(e) $z_5 = \frac{4+6i}{1-5i} = \frac{(4+6i)(1+5i)}{26} = \frac{4+20i+6i-30}{26} = \frac{-26+26i}{26} = -1+i$

(ou) $z_5 = \frac{\sqrt{52}\ e^{i\,56{,}3°}}{\sqrt{26}\ e^{-i\,78{,}7°}} = \sqrt{2}\ e^{i\,135°}$

3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3}+i$ et $z' = 1+i$, déterminer les valeurs **exactes** de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

Règle : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$

1. Formes expo
2. Faire apparaître des arguments de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$
3. Adapter les calculs des formes algébriques.
4. Identifier.

① $z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$

$z' = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

② $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{12}$ $\qquad \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{12}$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ $\qquad \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$

$30°$ $\qquad 45°$ $\qquad 15° = 45° - 30°$ $\qquad 75° = 45° + 30°$

Donc : $z \cdot z' = 2\sqrt{2}\, e^{i5\pi/12}$ et $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12}$

③ $z \cdot z' = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right) = (\sqrt{3} + i)(1 + i)$

$= \sqrt{3} + \sqrt{3}i + i - 1$

$= (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

④ Identification : $2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1$ et $2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 1.$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$