Outils mathématiques 2 – DS de janvier 2021 – NOM : **Groupe :** **Note :**

*20 points, 90 minutes. Les parties sont indépendantes. Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre **uniquement** sur ce sujet.*

Partie 1 : continuité et dérivabilité – *2 points*

On considère la fonction $h(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

1. déterminer $\tilde{h}$, le prolongement par continuité de h.

2. étudier la dérivabilité de h en 0.

Partie 2 : décomposer en éléments simples pour intégrer – *5,5 points*

Décomposer en éléments simples et donner les primitives des trois fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{5x - 2}{(x-4)(x+2)}$

2. $g(x) = \dfrac{2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 6x + 5}{(x+1)^2}$

3. $h(x) = \dfrac{2}{x^2(x^2+1)}$

Partie 3 : branches infinies – *4,5 points*

1. Étudier les branches infinies de la fonction $f(x) = \dfrac{x - \ln(x)}{x^2 - 2}$

2. Étudier les branches infinies de la fonction $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

Partie 4 : polynôme – *2,5 points*

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$. Déterminer l'ensemble des racines de P sachant qu'il admet une racine double.

Partie 5 : intégration – *5,5 points*

1. Déterminer $F(x)$, la primitive de $f(x) = \arctan(x)$ s'annulant en $x = 0$.

2. Intégrer $I = \int_1^e (x+1) \cdot \ln(x) \cdot dx$

3. Calculer $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{[\ln(x)]^n}{x} dx$ où $n \neq -1$.

4. (a) Intégrer $J = \displaystyle\int_a^1 \frac{x \cdot \ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$ avec $a > 0$.

   (b) Que vaut J quand $a \to 0$?