Outils mathématiques 1 — Test 6 — Décembre 2024

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 8 min.

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /4

1. Prolonger par continuité la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en une nouvelle fonction $\tilde{f}$.

$D_f =]-1;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim_{-1} f(x) = -\infty \rightarrow$ pas de prolongement en -1

$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \dfrac{\underbrace{\ln(1+x)}_{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \lim_{0} \dfrac{1/1+x}{1} = 1$

(L'Hospital)

$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

0.5

2. Ce prolongement $\tilde{f}$ est-il dérivable en $x = 0$?

$\lim_{0} \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{0} \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$

$= \lim_{0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \rightarrow$ L'Hospital

$= \lim_{0} \dfrac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \rightarrow$ L'Hopital

$= \lim_{0} \dfrac{-\frac{1}{2(1+x)^2}}{1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = -\frac{1}{2}$

0.5

3. Déterminer les primitives de $g(x) = 4x\cos(x^2+2)$.

$$\left.\begin{array}{l} v(x) = x^2+2 \\ u'(x) = \cos x \end{array}\right\} \Rightarrow v'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow g(x) = 2 \cdot v'(x) \times u' \circ v(x)$$

0,5

$$\Rightarrow G(x) = 2 u \circ v(x) + K \quad \text{avec } u(x) = \sin(x)$$

$$= 2\sin(x^2+2) + K$$

4. Déterminer les primitives de $h(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)^2}$.

$$h(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^2} = x^2(x^3+1)^{-2}$$

0,5

$$\left.\begin{array}{l} n = -2 \\ u = x^3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow u' = 3x^2$$

$$u'u^n = 3x^2(x^3+1)^{-2} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{3}\, 3x^2(x^3+1)^{-2}$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{1}{3}\frac{u^{n+1}}{n+1} + K \Rightarrow H(x) = \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^{-1}}{-1} + K$$

$$= -\frac{1}{3(x^3+1)} + K$$