**Outils mathématiques — Test 3 — Décembre 2021**

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 12 min.

**NOM :** C. PALERMO **GROUPE :** C et D - **NOTE :** /**3**

1. Dériver les fonctions suivantes : *(1 pt)*

— $f(x) = \ln\left[\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$ $= u\circ v\circ w(x)$ $\Rightarrow f'(x) = w'(x) \times v'\circ w(x) \times u'\circ v\circ w(x)$

$u(x) = \ln(x) \longrightarrow u'(x) = 1/x$

$v(x) = \arctan(x) \rightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$w(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow w'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \times \frac{1}{\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

→ Simplification possible : $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

— $g(x) = \frac{(4x+1)^5}{(-2x+3)^3}$ $= \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$

$$g'(x) = \frac{5(4x+1)^4\times 4\times(-2x+3)^3 - (4x+1)^5\times 3\times(-2x+3)^2\times(-2)}{(-2x+3)^6}$$

$$= \frac{20(4x+1)^4(-2x+3)^3 + 6(4x+1)^5(-2x+3)^2}{(-2x+3)^6} = \frac{(4x+1)^4}{(-2x+3)^4}\left[(-2x+3)20 + 6(4x+1)\right]$$

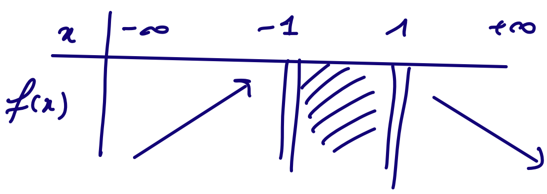
$$= \left(\frac{4x+1}{-2x+3}\right)^4\left[-40x+60+24x+6\right] = \left(\frac{4x+1}{-2x+3}\right)^4\left[-16x+66\right] = f'(x)$$

2. Sur quel(s) intervalle(s) peut-on définir une fonction réciproque à la fonction $h(x) = 2 - \sqrt{x^2-1}$ ? *(0,5 pt)*

$\mathcal{D}h = ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[$

Puisque h(x) est paire alors elle admet (Oy) comme axe de symétrie.

$h'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} < 0 \quad \forall x > 1 \Rightarrow$




⇒ On choisit l'un des deux intervalles où h est continue et strictement monotone : $]-\infty;-1[$ ou $]1;+\infty[$

3. Après avoir déterminé son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, prolonger par continuité la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$. On appellera $\tilde{f}$ ce prolongement. *(1,5 pt)*

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

0,50

$$\lim_{-1} f(x) = \lim_{-1} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\to 1/2} - \underbrace{\frac{2}{1-x^2}}_{\to \infty} \longrightarrow f \text{ ne peut pas être prolongée en } x=-1$$

$$\lim_{1} f(x) = \lim_{1} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\to \infty} - \underbrace{\frac{2}{1-x^2}}_{\to \infty} \longrightarrow \text{F.I. a priori}$$

$$= \lim_{1} \frac{1(1+x)}{(1-x)(1+x)} - \frac{2}{1-x^2} = \lim_{1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{1} \frac{\overset{\to 0}{x-1}}{\underset{\to 0}{1-x^2}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$\longrightarrow$ L'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{1} f(x) = \lim_{1} \frac{1}{-2x} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

1

4. Question bonus de Noël : pour quelle valeur de $x$ la fonction gaussienne $f(x) = 2\exp(-x^2)$ atteint-elle sa valeur maximale ? On vérifiera qu'il s'agit effectivement d'une valeur **maximale**. *(1 pt)*

$$f(x) = 2e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x(-2x) \times e^{-x^2} = -4xe^{-x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f$ admet un extremum (minimum ou maximum) en $x=0$

0,50

De plus $f''(x) = \underbrace{-4e^{-x^2}}_{=-4 \text{ si } x=0} + \underbrace{(-4x)\times\ldots}_{\text{s'annule en } x=0} \Rightarrow f''(0) < 0$ donc l'extremum est un MAXIMUM.

0,50