Outils mathématiques 1 — DS de Novembre 2020 — NOM : **Groupe :** **Note :**

*20 points, 90 minutes. Les parties sont indépendantes. Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre **uniquement** sur ce sujet.*

Partie 1 : Nombres complexes — *5 points*

Dans cette partie, on appelle j le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4 \cdot (-\sqrt{3} + j)$

On pose $z = re^{j\theta}$ et l'on remarque que : $|4(-\sqrt{3}+j)| = 4.\sqrt{4} = 8$

et que $\arg(4(-\sqrt{3}+j)) = \arg(-\sqrt{3}+j) = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow$ On cherche r et θ / $r^3 e^{j3\theta} = 8e^{j5\pi/6} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \text{ avec } r>0 \\ 3\theta = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = \frac{5\pi}{18} \underbrace{\left[\frac{2\pi}{3}\right]}_{\frac{12\pi}{18}} \end{cases} \Rightarrow$ les 3 solutions sont : $\begin{cases} z_1 = 2e^{j5\pi/18} \\ z_2 = 2e^{j17\pi/18} \\ z_3 = 2e^{-j7\pi/18} \end{cases}$

2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - j$.

a. Exprimer le rapport z_1/z_2 sous forme **algébrique**.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+j\sqrt{3}}{1-j} = \frac{(1+j\sqrt{3})(1+j)}{2} = \frac{1+j+j\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

b. Déterminer le module et l'argument du rapport z_1/z_2.

$|z_1| = 2$ et $\arg(z_1) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 2e^{j\pi/3}$

$|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = -\pi/4$

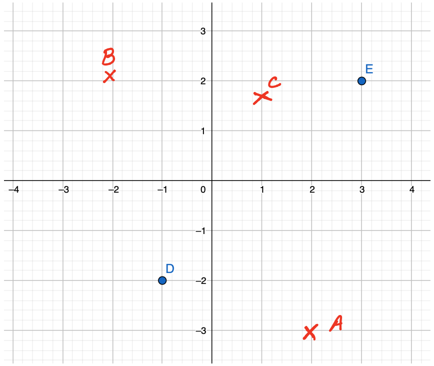
$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{j\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-j\pi/4}} = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{12}}$$

c. En déduire la valeur exacte de $\sin(7\pi/12)$.

Ainsi : $\sqrt{2}e^{j7\pi/12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} + j\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3. A partir des données du tableau et du plan muni du repère orthonormé ci-dessous, placer les points A, B, et C puis remplir avec au maximum trois chiffres significatifs les cases vides pour l'ensemble des points.



Point	Affixe		
	Forme algébrique	*Module*	*Argument en degrés*
A	$2 - 3j$	$\sqrt{13} \simeq 3{,}61$	$-56{,}3°$
B	$\frac{3}{2}(-\sqrt{2}+j\sqrt{2}) = -2{,}12 + j2{,}12$	3	135°
C	$1 + j\sqrt{3} = 1 + j1{,}73$	2	60°
D	$-1 - 2j$	$\sqrt{5} \simeq 2{,}24$	$-116° = 243°$
E	$3 + 2j$	$\sqrt{13} \simeq 3{,}61$	$33{,}7°$

Partie 2 : Géométrie dans le plan — *5 points*

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1\,;\,2)$, $B(3\,;\,1)$ et $C(2\,;\,5)$.

   a. Soit D_1 *la* droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AB), déterminer une équation cartésienne de D_1.

$D_1 = \{ M(x;y) / \vec{AM} \perp \vec{AB} \}$

$\vec{AM} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{AB} = 0$ avec $\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AM} = \begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x-2-y+2=0$

$\Leftrightarrow y=2x$ ou $2x-y=0$

$\Rightarrow D_1 = \{M(x;y) / y=2x\}$

   b. Soit D_2 la droite passant par le point C et parallèle à (AB), déterminer une équation cartésienne de D_2.

$D_2 = \{M(x;y) / \vec{CM} // \vec{AB}\}$ avec $\vec{CM} = \begin{pmatrix}x-2\\y-5\end{pmatrix}$

$\vec{CM} // \vec{AB} \Leftrightarrow \det(\vec{CM};\vec{AB})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & 2\\ y-5 & -1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -x+2-2y+10=0 \Leftrightarrow x+2y-12=0$

ou $y=-\frac{x}{2}+6$

$D_2=\{M(x;y)/x+2y-12=0\}$

   c. Calculer la surface du triangle ABC et préciser s'il est direct ou indirect.

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB};\vec{AC})\right|$ avec $\det(\vec{AB};\vec{AC}) = \begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} = +7$

$\Rightarrow \mathcal{A} = 3,5\,u^2$ et le triangle est direct.

   d. Déterminer les coordonnées **d'un** point D pour que le triangle ABD soit rectangle en A et isocèle.

D est nécessairement sur la droite D_1 pour que ABD soit rectangle en A donc $D\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}$

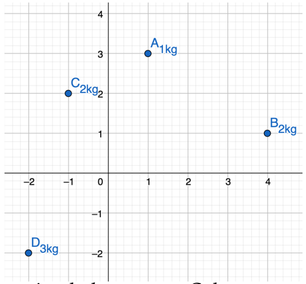
Pour que ABD soit isocèle il faut de plus que $\|\vec{AB}\|=\|\vec{AD}\|$

avec $\|\vec{AB}\|=\sqrt{5}$ et $\vec{AD} = \begin{vmatrix}x-1\\2x-2\end{vmatrix} \Rightarrow \|\vec{AD}\| = \sqrt{(x-1)^2+(2x-2)^2}$

$\Rightarrow$ On cherche x / $(x-1)^2+(2x-2)^2=5 \Leftrightarrow 5x^2-10x=0$

$\Leftrightarrow 5x(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \text{ou}\\ x=2\end{cases} \Rightarrow D\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ou $D\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

2. On dispose différentes masses sur quatre points, dans la configuration représentée ci-dessous.



   a. Quelles sont les coordonnées du barycentre G des quatre points A, B, C et D ?

$x_G = \frac{x_A+2x_B+2x_C+3x_D}{8} = \frac{1+8-2-6}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$

$y_G = \frac{y_A+2y_B+2y_C+3y_D}{8} = \frac{3+2+4-6}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$

$\Rightarrow G(1/8\,;\,3/8)$

   b. Où devrait-on positionner le point D pour que le barycentre soit à l'origine O du repère ?

On cherche x_D et y_D tels que : $x_A+2x_B+2x_C+3x_D=0$

$\Leftrightarrow 1+8-2+3x_D=0 \Leftrightarrow x_D=-7/3$

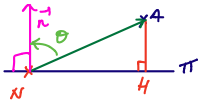
et $y_A+2y_B+2y_C+3y_D=0 \Leftrightarrow 3+2+4+3y_D=0 \Leftrightarrow y_D=-3$

$\Rightarrow D(-7/3\,;\,-3)$

Partie 3 : Géométrie dans l'espace — *5 points*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(3\,;2\,;4)$, $B(1\,;-3\,;7)$ et $C(2\,;-1\,;4)$, et le plan Π d'équation cartésienne $2x - y + 4z - 6 = 0$.

1. Déterminer la distance entre le point A et le plan Π.



$$d = AH = NA\,|\cos\theta| = \frac{|\vec{NA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{n}\| = \sqrt{21}$

Je prends $N \in \Pi$ avec $N(3;0;0) \Rightarrow \vec{NA} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{NA}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = 14$

$\Rightarrow d = \dfrac{14}{\sqrt{21}} \simeq 3{,}06\ u$

2. Déterminer au signe près l'angle formé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}$

avec $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38}$

et $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{10} \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2+15+0 = 17$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{17}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{10}} = 0{,}872 \Rightarrow \theta = \pm 0{,}511\,\text{rad} = \pm 29{,}3°$

3. Déterminer la surface du triangle ABC.

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}9\\-3\\1\end{pmatrix}\right\| = \dfrac{\sqrt{91}}{2}$

$\mathcal{A} \simeq 4{,}77\ u^2$

4. Déterminer le volume du parallélépipède engendré par le trièdre $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ et préciser si ce trièdre est direct ou indirect.

$V = |\det(\vec{OA};\vec{OB};\vec{OC})|$ avec $\det(\vec{OA};\vec{OB};\vec{OC}) = (\vec{OA}\wedge\vec{OB})\cdot\vec{OC}$

$\det(\vec{OA};\vec{OB};\vec{OC}) = \left[\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}26\\-17\\-11\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

$= 52 + 17 - 44 = 25$

$\Rightarrow V = 25\ u^3$

De plus puisque $\det(\vec{OA};\vec{OB};\vec{OC}) > 0$ alors le trièdre $(\vec{OA};\vec{OB};\vec{OC})$ est direct.

5. Écrire les équations paramétriques de la droite (AB) et déterminer les coordonnées du point H d'intersection entre le plan Π et la droite (AB).

$(AB) = \{M(x;y;z)\ /\ \vec{AM} \,//\, \vec{AB}\}$ $\quad \vec{AM}\,//\,\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = t\cdot\vec{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}$

$\vec{AM} = \begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-4\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix} \Rightarrow$ Equations de (AB) :

$$\begin{cases} x = -2t+3 \\ y = -5t+2 \\ z = 3t+4 \end{cases}$$

$H(x;y;z) = (AB)\cap\Pi \Leftrightarrow 2(-2t+3) - (-5t+2) + 4(3t+4) - 6 = 0$

$13t + 14 = 0 \Rightarrow t = -14/13$

$\Rightarrow x = \dfrac{+28}{13} + \dfrac{39}{13} = \dfrac{67}{13} \simeq 5{,}15$

$y = \dfrac{+70}{13} + \dfrac{26}{13} = \dfrac{96}{13} \simeq 7{,}38 \quad \Rightarrow H\left(\dfrac{67}{13};\dfrac{96}{13};\dfrac{10}{13}\right)$

$z = -\dfrac{42}{13} + \dfrac{52}{13} = \dfrac{10}{13} \simeq 0{,}769$

Partie 4 : Fonctions numériques — *5 points*

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

Fonction	Ensemble de définition
$f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 9}$	$\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$
$f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$	$]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$	$[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\pi/4 [\pi]\}$

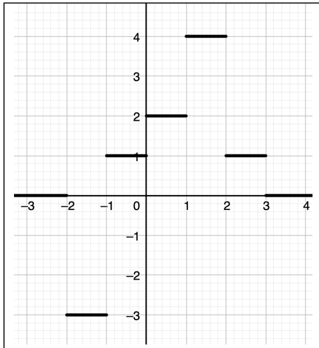
2. Répondre aux QCM ci-dessous sur la parité des fonctions en cochant la bonne réponse.

Fonction	paire	impaire	Pas de parité
x^5		X	
$\sin(x)$		X	
$\exp(2x)$			X
$\ln(x)$			X
$\dfrac{x^5 + x}{x^2 + 1}$		X	
$\dfrac{x^5 + 2}{x^2 + 1}$			X
$x^4 + \cos(x)$	X		
$\tan(x)$		X	
$\exp(x^2)$	X		

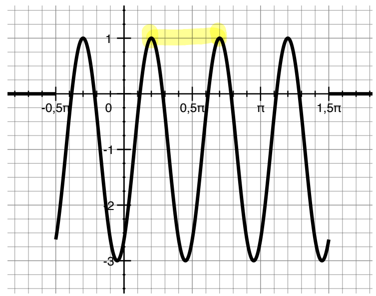
3. Déterminer les périodes des fonctions suivantes.

Fonction	Période
$\cos\left(\dfrac{5x}{2}\right)$	$4\pi/5$
$\cos^2(3x)$	$\pi/3$
$\tan(6x)$	$\pi/6$
$\tan^2(2x)$	$\pi/2$

4. On considère les deux courbes représentées sur les figures ci-dessous.



Courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f(x)$



Courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de $g(x)$

Déterminer les équations $f(x)$ et $g(x)$ en notant $\theta(x)$ la fonction de Heaviside.

$f(x) = -3\theta(x+2) + 4\theta(x+1) + \theta(x) + 2\theta(x-1) - 3\theta(x-2) - \theta(x-3)$

$g(x) = h(x) \times s(x)$ avec $s(x) = A_0 + A\cos(\omega x - \varphi)$

On lit : $A_0 = -1$, $A = 2$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ avec $T = \dfrac{5\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi . 2}{\pi} = 4.$

De plus $\cos(4x - \varphi) = 1 \iff x = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{4\pi}{5} - \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{4\pi}{5}.$

$\Rightarrow s(x) = -1 + 2\cos\left(4x - \dfrac{4\pi}{5}\right)$

Enfin, $h(x) = \theta\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \theta\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) = \left[\theta\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \theta\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)\right] \cdot \left[-1 + 2\cos\left(4x - \dfrac{4\pi}{5}\right)\right]$

$= \left[\theta\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \theta\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)\right] \cdot \left[-1 + 2\sin\left(4x - \dfrac{3\pi}{10}\right)\right]$