B.U.T Mesures Physiques — Université de Montpellier
Polynômes et décomposition en éléments simples

1 Racines

1. **Définitions :**
   Une racine r d'un polynôme P est un réel (ou un complexe) qui annule le polynôme, c'est à dire que : r racine de $P(x) \Longleftrightarrow P(r) = 0$

2. **Théorème : division euclidienne**
   Soient deux polynômes quelconques A et B. Il existe deux polynômes Q et R **uniques**, à une constante près, tels que :
$$\begin{cases} A = B \cdot Q + R \\ \text{et} \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

3. Définitions :
   - R s'appelle le reste, Q le quotient
   - Si le reste R est nul, on dit que B divise A ou que A est divisible par B. On a ainsi **décomposé** ou **factorisé** A.
   - Lorsque $R \neq 0$, A est dit **irréductible** par B.

4. **Théorème : racine simple**
   Un polynôme P à coefficients réels ou complexes admet une racine $r \Longleftrightarrow P$ est divisible par $(x - r)$.
   En d'autres termes : r racine de $P \Longleftrightarrow \exists! Q(x)\ /\ P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$

5. Théorème : **Racine multiple et divisibilité**
   Une racine r est dite multiple d'ordre $n \Longleftrightarrow P$ est divisible par $(x - r)^n$
   En d'autres termes : r racine multiple d'ordre n de $P \Longleftrightarrow \exists! Q(x)\ /\ P(x) = (x - r)^n Q(x)$
   Remarque : n est la multiplicité de la racine

6. Théorème : **Racine multiple et dérivées**
   Si r est racine de P d'ordre n alors r est aussi racine des dérivées P', P'', ... jusqu'à $P^{(n-1)}$. En revanche $P^{(n)}(r) \neq 0$ (sans quoi r serait racine d'ordre $n+1$).
   Remarque : r annule n polynômes obtenus par dérivations successives.
   Exemple : r racine d'ordre 3 de $P \Longleftrightarrow P(r) = P'(r) = P''(r) = 0$ et $P^{(3)}(r) \neq 0$.

7. Théorème **d'Alembert**
   Un polynôme de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$, chacune étant comptée avec sa multiplicité.
   Exemple : $P(x) = x^3 - x^2$ admet 3 racines dans $\mathbb{C}$ (et $\mathbb{R}$). $P(x) = x^2(x-1)$. Les racines sont 0(2) et 1.

2 Fractions rationnelles

1. Définitions :
   - Une **fraction rationnelle** est une fonction de la forme $F(x) = P(x)/Q(x)$, où P et Q sont des polynômes.
   - Un **pôle** de la fraction rationnelle F est une valeur qui annule le **dénominateur**, c'est à dire **une racine de** $Q(x)$.
     Exemple : $\dfrac{3x+2}{(x-1)(x+4)}$ a pour pôles 1 et -4.
   - Si $Q(x)$ a une racine a de multiplicité n, alors a est un pôle de F d'ordre n.
     Exemple : $\dfrac{3x+2}{(x-1)^2(x+4)}$ a pour pôle double 1 et pour pôle simple -4.
   - On appelle **élément simple de première espèce** toute fraction rationnelle de la forme $F(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$ où A et $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   - On appelle **élément simple de seconde espèce** toute fraction rationnelle de la forme $F(x) = \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ où A, B, p et $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Division Euclidienne :
   Soit $F(x) = A(x)/B(x)$. Si $\deg(A) > \deg(B)$ alors on peut effectuer la division euclidienne de A par B, de sorte que : $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ et

donc écrire F sous la forme : $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

- Q est appelé la **partie entière** de F
- $R(x)/B(x)$ est appelée la **partie fractionnaire** de F
- $\deg(R) < \deg(B)$

3. Éléments simples

(a) **Théorème de décomposition :**

Soit $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ une fraction rationnelle **irréductible** (c.à.d avec $\deg(A) < \deg(B)$), si $F(x) = \dfrac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}$ où les pôles a_i sont tous différents, alors $F(x)$ peut s'écrire dans $\mathbb{C}$ sous la forme :

$$F(x) = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{x-a_3} + \ldots. + \frac{A_n}{x-a_n}$$

c'est à dire comme la somme des éléments simples relatifs aux pôles de F.

Exemple : $\dfrac{3x+2}{(x-1)(x+4)} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{x+4}$
Le travail consiste à rechercher A_1 et A_2.

(b) Pôles **multiples** : Le théorème est vrai pour des pôles simples et dans $\mathbb{C}$. Pour un pôle multiple $\dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$, il y a n éléments simples correspondants dans $\mathbb{C}$, qui sont :

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Exemple : $\dfrac{3x+2}{(x-1)^2(x+4)} = \underbrace{\dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2}}_{1(2)} + \underbrace{\dfrac{A_3}{x+4}}_{-4}$

(c) Première ou deuxième espèce ?

- Si l'on décompose dans $\mathbb{C}$: on n'utilise que des éléments simples de **première** espèce
- Si l'on décompose dans $\mathbb{R}$: chaque couple de pôles complexes implique un élément simple de seconde espèce.
  Exemple :

$F(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2(x-2)}$: F a trois pôles simples : $j(2)$, $-j(2)$ et $2(1)$.

Dans $\mathbb{C}$: $F(x) = \underbrace{\dfrac{A_1}{(x+j)} + \dfrac{A_2}{(x+j)^2}}_{-j(2)} + \underbrace{\dfrac{A_3}{(x-j)} + \dfrac{A_4}{(x-j)^2}}_{j(2)} + \underbrace{\dfrac{A_3}{(x-2)}}_{2(1)}$

Dans $\mathbb{R}$: $F(x) = \underbrace{\dfrac{B_1x+B_2}{(x^2+1)}}_{j \text{ et } -j} + \underbrace{\dfrac{B_3x+B_4}{(x^2+1)^2}}_{j \text{ et } -j \text{ doubles}} + \underbrace{\dfrac{B_5}{(x-2)}}_{2(1)}$

(d) **Décomposition :**

- Dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{C}$ il y a **autant de constantes** à déterminer que de **pôles**, qu'ils soient réels ou complexes, en comptant leur **multiplicité**.
- Procédure à suivre pour décomposer