Outils mathématiques 1 — TD 7 : Continuité, dérivabilité et fonctions réciproques

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. On considère la fonction $E(x)$, appelée partie entière de x, et telle que $E(x) = n$ pour $n \leq x < n+1$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Étudier la continuité de $E(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis celle de $g(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$.

2. Donner une approximation à 10^{-2} près des solutions de l'équation $x^2 = -\ln(x)$.

3. Prolonger par continuité chacune des fonctions $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de leurs prolongements par continuité.

4. Lorsque c'est possible, prolonger par continuité les fonctions suivantes :
$$\text{(a)}\ \ f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad \text{(b)}\ \ g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

5. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par morceaux par
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x < 1 \\ x^2 - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

6. Soit la fonction $f(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$ avec $\alpha > 0$.
   (a) Calculer la borne supérieure f_{max} de f.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f en $x = 0$.
   (c) Pour quelle valeur $x = x_0$ l'équation de la tangente prend-elle la valeur f_{max} ?
   (d) Que vaut f pour cette valeur $x = x_0$?
   (e) Donner une méthode permettant de déterminer **graphiquement** la valeur de α.

7. Remplir le tableau ci-dessous :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}$
$\arccos(x)$											
$\arcsin(x)$											
$\arctan(x)$											

8. Montrer que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1;\ 1]$

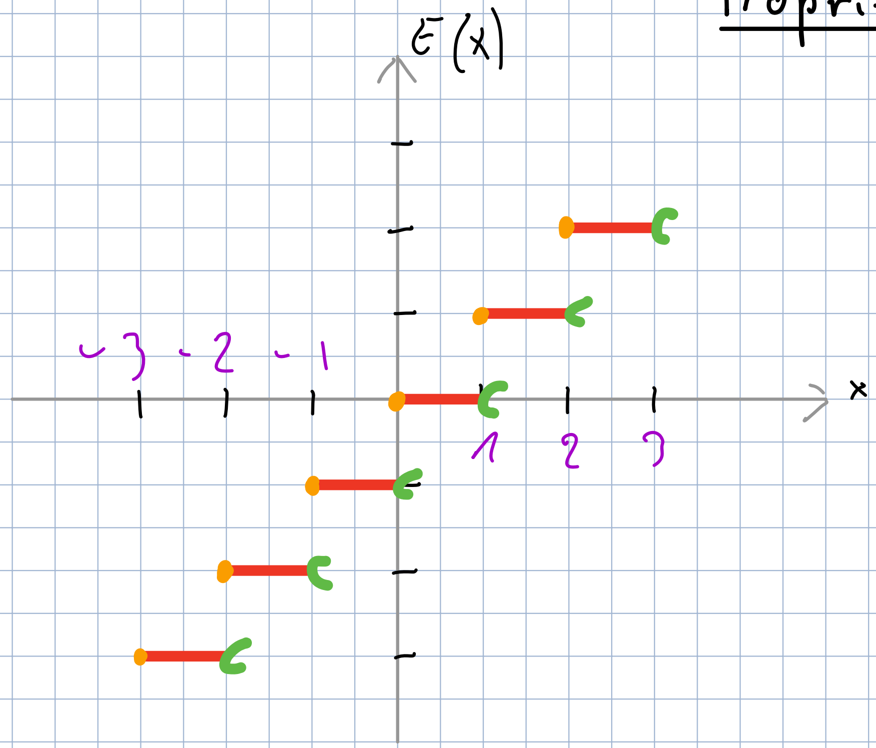
9. À l'aide des formules de dérivées usuelles, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ **2)** $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$ **3)** $f(x) = \exp\left[\tan\left(x^2 + 1\right)\right]$
4) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ **5)** $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos^3(x)$ **6)** $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$
7) $f(x) = \arctan(3x)$ **8)** $f(x) = \arctan(3x)$ **9)** $f(x) = \arccos(2x + 1)$
10) $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$ **11)** $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

10. **Application en électricité.** On considère un générateur de tension modélisé par une source de tension E en série avec une résistance r. Celui-ci débite un courant I dans une résistance R. En utilisant la dérivée et la dérivée seconde afin de déterminer un extremum puis un maximum, déterminer la valeur que doit prendre R pour que la puissance dissipée P y soit maximale [1].

1. On rappelle qu'il s'agit du modèle équivalent de Thévenin d'un dipôle et que $P = RI^2$ et $E = (R + r)I$.

1. On considère la fonction $E(x)$, appelée partie entière de x, et telle que $E(x) = n$ pour $n \leq x < n+1$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Étudier la continuité de $E(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis celle de $g(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$.



Propriétés

- $\forall x \notin \mathbb{Z} \quad \lim\limits_{x \to x_0} E(x) = E(x_0)$
- Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors :
  - $\lim\limits_{x \to n^-} E(x) = n-1$
  - $\lim\limits_{x \to n^+} E(x) = n$

Compte tenu des propriétés ci-dessus $E(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\}$. Ainsi $g(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ est continue, <u>à minima</u>, sur $\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\}$.

Que se passe-t-il si $x \to n \in \mathbb{Z}$:

- $\lim\limits_{x \to n^-} g(x) = \lim\limits_{x \to n^-} \left(E(x) + x^2 - 2x E(x) + E^2(x) \right) = n - 1 + n^2 - 2n(n-1) + \cdots$
  $\cdots + (n-1)^2 = n - \cancel{1} + \cancel{n^2} - \cancel{2n^2} + \cancel{2n} + \cancel{n^2} - \cancel{2n} + \cancel{1} = n$
- $\lim\limits_{x \to n^+} g(x) = n + \cancel{x^2} - \cancel{2x}n + \cancel{n^2} = n$

ainsi $\lim\limits_{x \to n^+} g(x) = \lim\limits_{x \to n^-} g(x) = n$ et g continue sur $\mathbb{Z}$,

donc g continue sur $\mathbb{R}$.

2. Donner une approximation à 10^{-2} près des solutions de l'équation $x^2 = -\ln(x)$.

Soit $f(x) = x^2 + \ln x$; alors $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ $\begin{cases} >0 & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ <0 & \forall x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

et $\begin{cases} f(1) = 1 > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln(2) = -0{,}44 < 0 \end{cases}$

De plus sur $I = \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$; $f'(x) > 0$ alors $\exists$ au moins un réel $c \in I$ tq $f(c) = 0$. Ainsi $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) = 0 < f(1)$

$-0{,}44 < \underline{\quad} < 1$! On veut la solution à 10^{-2} près ; donc on utilise la dichotomie en divisant par 2 successivement I.

$x \in [0{,}625 ; 0{,}875] \Rightarrow f(x) \in [-0{,}08 ; 0{,}63]$

$x \in [0{,}6875 ; 0{,}8125] \Rightarrow f(x) \in [\cancel{0{,}1}7 ; 0{,}45]$

$x \in [0{,}65 ; 0{,}66] \Rightarrow f(x) \in [-0{,}008 ; 0{,}02]$

3. Prolonger par continuité chacune des fonctions $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de leurs prolongements par continuité.

a) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $D_f = \mathbb{R}^*$ mais $\lim\limits_{x \to 0^\pm} -x \leq \lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 0^\pm} +x$

(car $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1$) donne que $\lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = 0$.

On définie alors un prolongement par continuité de $f(x)$:

$$\boxed{\tilde{f}_p(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Dérivabilité de $\tilde{f}_p(x)$: $\lim\limits_{x \to 0^\pm} \frac{\tilde{f}_p(x) - \overbrace{\tilde{f}_p(0)}^{=0}}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^\pm} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite. Ainsi $\tilde{f}_p(x)$ n'est pas dérivable en $x = 0$

b) $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ mais $\lim\limits_{x \to 0^\pm} g(x) = 0$

car $\lim\limits_{x \to 0^\pm} -x^2 \leq \lim\limits_{x \to 0^\pm} g(x) \leq \lim\limits_{x \to 0^\pm} +x^2$

On définie alors $\tilde{g}_p(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

<u>Dérivabilité de $\tilde{g}_p(x)$</u> : $\lim\limits_{x \to 0^\pm} \frac{\tilde{g}_p(x) - \hat{g}_p(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = 0$

donc $\tilde{g}_p(x)$ est dérivable en $x = 0$

4. Lorsque c'est possible, prolonger par continuité les fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$

a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ donc $\lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x \to 0^\pm} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \pm\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas prolongeable !

b) $g = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$; $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g(x) = -\frac{-x^3 + 3x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1}$ et $\lim\limits_{x \to 1^\pm} g(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x \to 1^\pm} \frac{-3x^2 + 3}{4x^3 - 3x^2 - 1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$= \lim\limits_{x \to 1^\pm} \frac{-6x}{12x^2 - 6x} = -1$. Ainsi $\tilde{g}_p(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

5. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par morceaux par

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x<1 \\ x^2-1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Continuité : $\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0 \\ \cdot \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1 = 0 \end{array}\right\}$ f est continue en $x=1$

b) Dérivabilité : $\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{x-1-0}{x-1}\right) = 1$

$\cdot \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2-1-0}{x-1}\right) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x}{1} = 2$

f n'est donc pas dérivable en $x=1$.

6. Soit la fonction $f(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$ avec $\alpha > 0$.
   (a) Calculer la borne supérieure f_{max} de f.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f en $x = 0$.
   (c) Pour quelle valeur $x = x_0$ l'équation de la tangente prend-elle la valeur f_{max} ?
   (d) Que vaut f pour cette valeur $x = x_0$?
   (e) Donner une méthode permettant de déterminer **graphiquement** la valeur de α.

a) Si $\alpha > 0$ alors $e^{-\alpha x} \geq 0 \Rightarrow -e^{-\alpha x} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-\alpha x} \leq 1$

$\Rightarrow f_{max} = 1$

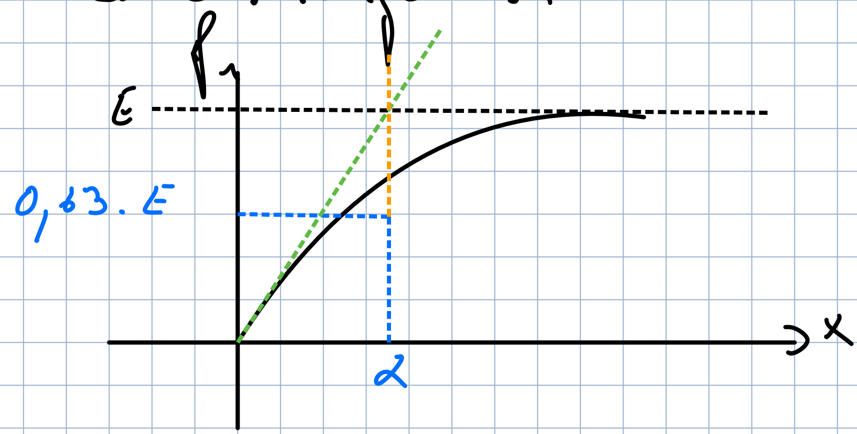
b) Équation de la tangente en $a \in \mathbb{R}$: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

ici $a = 0$; $\left\{\begin{array}{l} f'(x) = +\alpha e^{-\alpha x} \Rightarrow f'(0) = \alpha \\ f(0) = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow y = \alpha(x-0) = \alpha x = y$

c) $y = f_{max} \Leftrightarrow \alpha x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\alpha}$

d) $f(x_0) = f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1 - e^{-\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = 1 - e^{-1} = 0{,}63 \; (= 63\%)$.

e) Méthode des tangentes :



7. Remplir le tableau ci-dessous :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}$
arccos(x)	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	
arcsin(x)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$		$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	
arctan(x)	$-\frac{\pi}{4}$				0		$\pi/6$			$\pi/4$	$\frac{\pi}{3}$

Arccos x : $x \longrightarrow \text{Arccos}\, x$
$[-1;+1] \longrightarrow [0;\pi]$

Arcsin x : $x \longrightarrow \text{Arcsin}(x)$
$[-1;+1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$

Arctan x : $x \longrightarrow \text{Arctan}\, x$
$\mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$

8. Montrer que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1;\ 1]$

Soit $x = \cos(\theta) \Leftrightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Alors (1) $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ et $\frac{\pi}{2} - \theta = \mathrm{Arcsin}(x)$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \cancel{\theta} + \frac{\pi}{2} - \cancel{\theta} = \mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$

9. À l'aide des formules de dérivées usuelles, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ **2)** $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$ **3)** $f(x) = \exp\left[\tan\left(x^2 + 1\right)\right]$

4) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ **5)** $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos^3(x)$ **6)** $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

7) $f(x) = \arctan(3x)$ **8)** $f(x) = \arctan(3x)$ **9)** $f(x) = \arccos(2x + 1)$

10) $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$ **11)** $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

(1) $f'(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right)' = \dfrac{\cos x\,(1-\cos x) - \sin(x)(+\sin x)}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos(x)}{(1-\cos(x))^2} =$

$= -\dfrac{(1-\cos(x))}{(1-\cos(x))^2} = \dfrac{-1}{1-\cos(x)} = f'(x)$

(2) $f'(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 4x + 1}{(x^2+1)}\right)' = \dfrac{4(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2} = f'(x)$

(3) $f(x) = e^{\tan(x^2+1)}$; $f'(x) = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}\, e^{\tan(x^2+1)}$

(4) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$; $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) = f'(x)$

(5) $f(x) = \sin^2(x).\cos^3(x) = 2\sin(x)\cos^4(x) - 3\sin^3(x)\cos^2(x) = f'(x)$

(6) $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{2}}$; $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{4x-3}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

(7) $(\mathrm{Arctan}\, u(x))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$; $f'(x) = (\mathrm{Arctan}\, 3x)' = \dfrac{3}{1+9x^2} = f'(x)$

$$\left(\mathrm{Arcsin}(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}} \; ; \; \left(\mathrm{Arccos}(u(x))\right)' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2}} \; ;$$

9) $$f(x) = \mathrm{Arccos}(2x+1) \; ; \; f'(x) = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{-x(x+1)}} = -\frac{1}{\sqrt{-x(x+1)}} = f'(x)$$

$$\bullet \quad 1 - (2x+1)^2 = 1 - (4x^2+4x+1) = -4x(x+1)$$

10) $$f(x) = \mathrm{Arcsin}(x^2) ; \quad f'(x) = \frac{2x}{(1-x^4)^{1/2}}$$

11) $$f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \; ; \; u(x) = \frac{1+x}{1-x} \; ; \; u' = \frac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$u' = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{\frac{\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{2}}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{2}$$

← même dénominateur

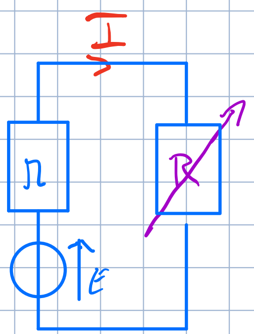
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{(1-x)^2(1+x)}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(1-x)(1+x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = f'(x)$$

10. **Application en électricité.** On considère un générateur de tension modélisé par une source de tension E en série avec une résistance r. Celui-ci débite un courant I dans une résistance R. En utilisant la dérivée et la dérivée seconde afin de déterminer un extremum puis un maximum, déterminer la valeur que doit prendre R pour que la puissance dissipée P y soit maximale [1].

1. On rappelle qu'il s'agit du modèle équivalent de Thévenin d'un dipôle et que $P = RI^2$ et $E = (R + r)I$.

ex 7 :



$P(R) = RI^2$ et $E = (r+R)I$

$\Rightarrow I = \dfrac{E}{(R+r)}$

① ②

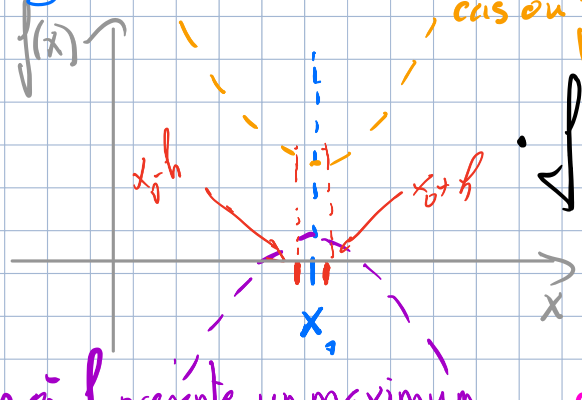
Donc $\boxed{P(R) = E^2 \dfrac{R}{(R+r)^2}}$

Pour déterminer le max (ou le min) on calcule $P'(R)$*. La dérivée seconde permettra de différencier un min d'un max.

* et $P'(R) = 0$

Démonstration :

cas où f présente un minimum



cas où f présente un maximum

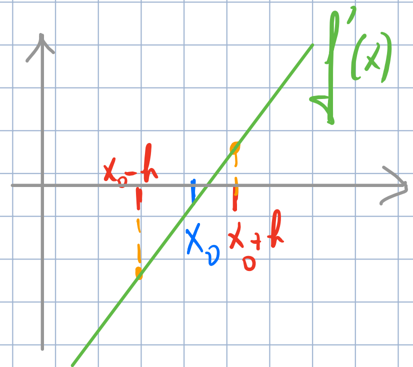
• $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

or $f(x_0+h) = f(x_0-h)$ ⊛

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

⊛ $h \to 0$: aussi petit que nécessaire

① Si f présente un minimum : alors f décroît puis croît. Sa dérivée est donc négative avant de devenir positive :



Alors : $f'(x_0+h) > f'(x_0-h)$

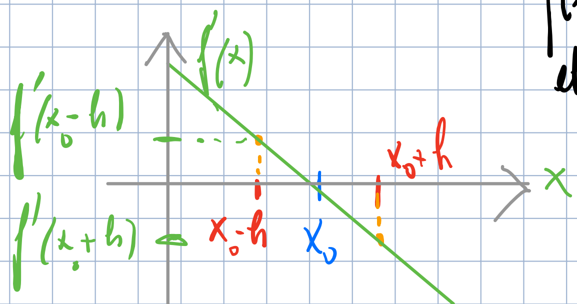
et $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} > 0$

$f''(x) > 0$

② Si f présente un maximum alors f croît avant de décroître donc :

$f'(x_0+h) < f'(x_0-h)$

et $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} < 0$



$f''(x) < 0$

$$P(R) = E^2 R (R+r)^{-2} \Rightarrow P'(R) = E^2\left((R+r)^{-2} - 2R(R+r)^{-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow P'(R) = E^2\left\{\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)^3}\right\} = E^2\left\{\frac{R+r-2R}{(R+r)^3}\right\}$$

$$\boxed{P'(R) = -E^2 \cdot \frac{(R-r)}{(R+r)^3}} \; ; \; P'(R) = 0 \Rightarrow \boxed{R = r}$$

Calcul de $P''(R)$: $P''(R) = -E^2\left\{(R+r)^{-3} - 3(R-r)(R+r)^{-4}\right\} = \dfrac{-E^2(4r-2R)}{(R+r)^2}$

• si $R = r \Rightarrow 4r - 2R = 2R$ et $(R+r) = (2R) \Rightarrow P'' = -\varepsilon^2 \dfrac{2R}{(2R)^4}$ $\Rightarrow \boxed{P''(R) = \dfrac{-\varepsilon^2}{8R^3} < 0}$

ok !

La puissance dissipée est MAX lorsque $R = r$ i.e. lorsque la resitance de charge est égale à la résistance interne du géné.

Autre méthode pour $P''(R)$.

$$P'(R) = \frac{-\varepsilon^2 (R-r)}{(r+R)^3}$$ du type $\frac{u}{v} \Rightarrow P''(R) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

• $u = R - r \Rightarrow u' = 1$

• $v = (r+R)^3 \Rightarrow v' = 3(r+R)^2 \cdot 1$

$$P''(R) = \frac{(r+R)^3 - (R-r) \cdot 3(r+R)^2}{(r+R)^6} \cdot (-\varepsilon^2)$$

$$= \frac{(r+R)^3 - 3(R-r)(r^2+2rR+R^2)}{(r+R)^6} \cdot (-\varepsilon^2)$$

Numérateur

$$r^3 + 3r^2R + 3rR^2 + R^3 - 3(Rr^2 + 2rR^2 + R^3 - r^3 - 2r^2R - rR^2)$$

$$P''(R) = \frac{4r^3 - 2R^3}{(r+R)^6} \cdot (-\varepsilon^2)$$

Si $R = r \Rightarrow P''(R) = \dfrac{-2R^3 \varepsilon^2}{(2R)^6} = \dfrac{-\varepsilon^2}{8R^3} < 0$