

Outils mathématiques 1 — TD 0 : remise à niveau

Remarque : certains de ces énoncés seront à traiter en autonomie.

1. Simplifiez les expressions suivantes

(a) $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}, y = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}, y = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{1}, y = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$

(b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1}, f(x) = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1}}, f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1},$

(c) $f(x) = -\frac{3x+1}{-x^2-1}, f(x) = \frac{-3x+1}{x^2+1}, f(x) = -\frac{-3x+1}{x^2+1}, f(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$

2. Géométrie

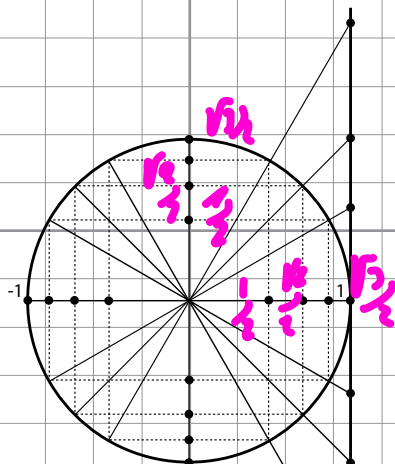
(a) Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3;7), B(5;7)$ et $C(-1;2)$. Le point I est le milieu de $[BC]$:

- calculer les coordonnées de I ;
- calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$;
- donner une équation de la droite (AC) .

(b) Dans l'espace, déterminer les coordonnées du plan de vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; 3)$ et passant par $A(3;2;-1)$.

3. Étude de fonctions trigonométriques

(a) Indiquer, dans le cercle trigonométrique ci-dessous, les valeurs particulières de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$. On donne comme valeurs caractéristiques $x = \pi/6, \pi/4$ et $\pi/3$ pour les angles et $1/2, \sqrt{2}/2$ et $\sqrt{3}/2$ pour les coordonnées.



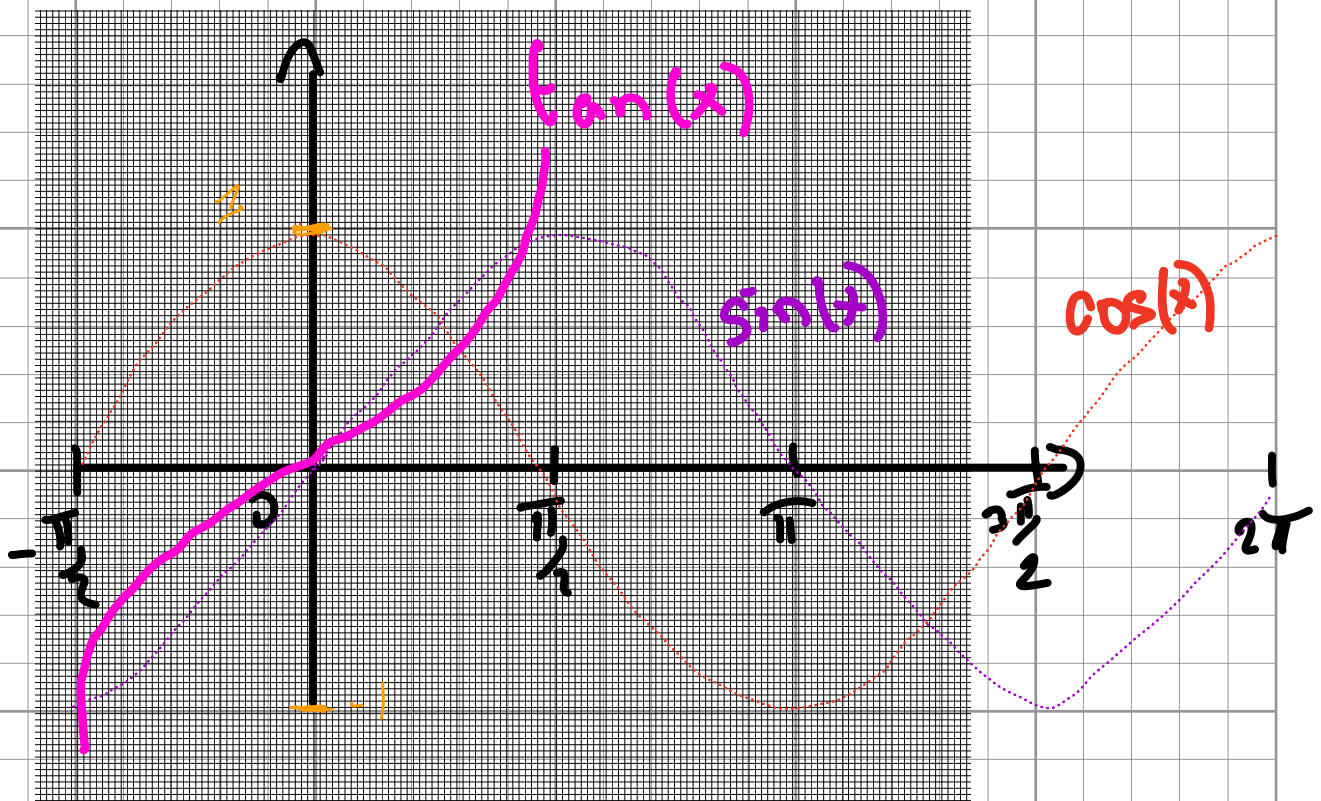
$$A\left(2; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ y_A = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \end{cases} ; \boxed{A(1; \sqrt{2})}$$

(b) Si A est un point ayant pour coordonnées polaires $r = 2$ et $\theta = 30^\circ$, en déduire les coordonnées cartésiennes du point A .

4. Étude des fonctions usuelles.

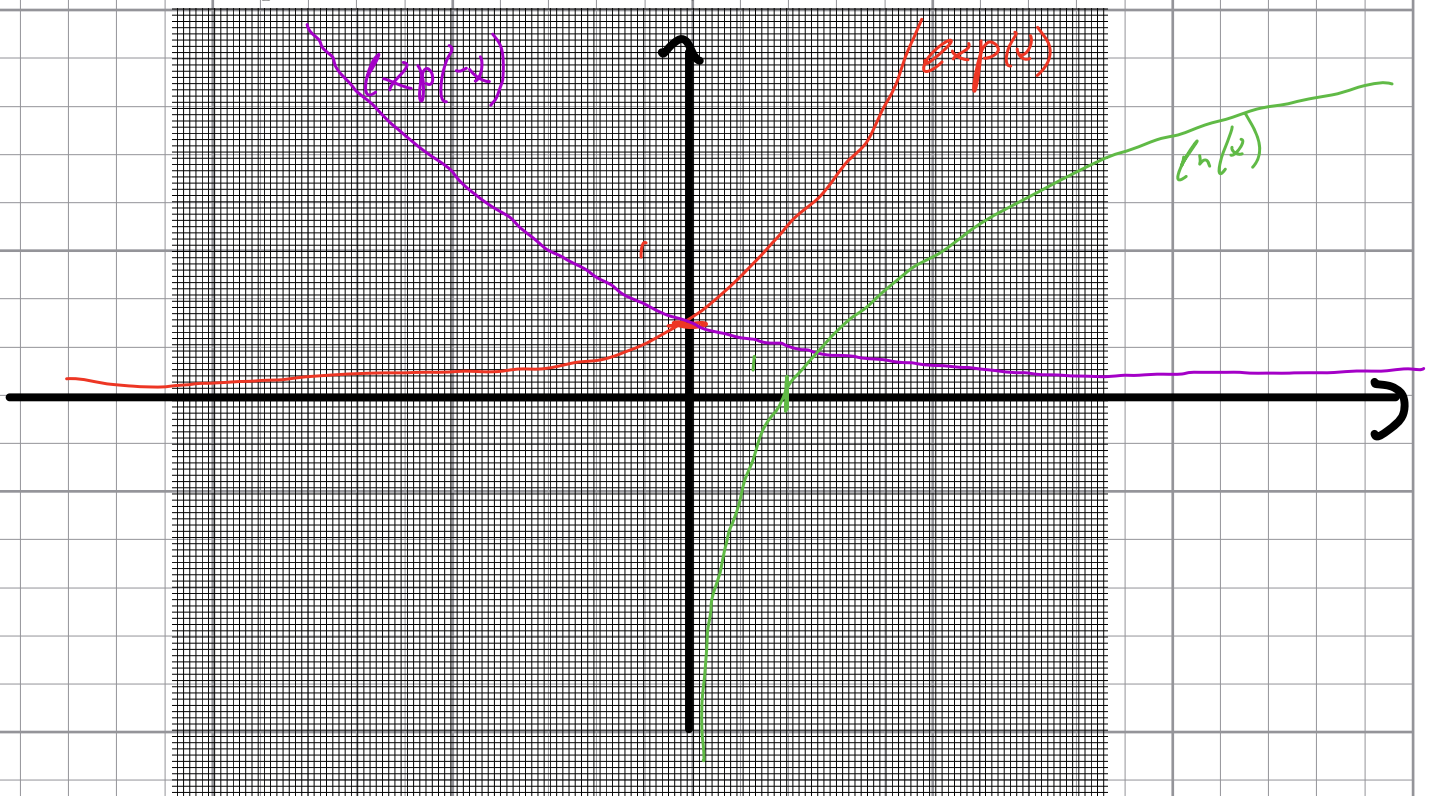
En utilisant la grille ci-dessous, et un repère orthonormé :

- Tracer les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = \tan(x)$.
- Lesquelles sont paires ? Impaires ?
- Relier la fonction f (respectivement g) à la projection orthogonale sur l'axe des abscisses (resp. des ordonnées)



5. En utilisant la grille ci-dessous, et un repère orthonormé :

- Tracer dans $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \exp(x)$ puis, sur le même graphe, représenter $g(x) = \exp(-x)$
- Tracer pour tout $x \in]0; +\infty[$, la fonction $f(x) = \ln(x)$.



6. Simplifiez les expressions suivantes :

- $f_1(x) = \exp(-\ln(x))$, $f_2(x) = \frac{\exp(2x)}{\exp(x)}$, $f_3(x) = \ln(\exp(x^2))$,
- $f_4(x) = e^{2x} \cdot e^3$, $f_5(x) = (e^{2x})^3$, $x = 10^3 \cdot 10^5$, $x = (10^3)^5$,
- $f_8(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, $f_9(x) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$, $f_{10}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$

7. Calculer la dérivée de $f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$.

8. Soient $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sin(2x)$. Calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ et $I_2 = \int_{-\pi/8}^{\pi/6} g(x)dx$.

Correction TD#0:

1. Simplifiez les expressions suivantes

$$(a) y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}, y = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}, y = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{1}, y = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{6}{1}}$$

$$(b) f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1}, f(x) = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}, f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1},$$

$$(c) f(x) = -\frac{3x+1}{-x^2-1}, f(x) = \frac{-3x-1}{x^2+1}, f(x) = -\frac{3x+1}{x^2+1}, f(x) = \frac{\frac{1}{(1-x^2)} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1 + \frac{1+x}{1-x}}$$

$$(a) y = \frac{8}{27}; \quad y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}; \quad y = 5; \quad y = 5$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{3(x-1)}; \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}; \quad f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$$(c) f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}; \quad f(x) = -\frac{3x+1}{x^2+1}$$

$$f(x) = \frac{-1+3x}{x^2+1};$$

$$f(x) = \frac{1-x}{1-\cancel{x} + 1+\cancel{x}} \cdot \frac{1}{1-x^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{1-x}}{2 \cancel{(1-x)} (1+x)} \cdot \sqrt{} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\cancel{1-x}}{(1-x)(1+x)}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

2. Géométrie

- (a) Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3;7)$, $B(5;7)$ et $C(-1;2)$. Le point I est le milieu de $[BC]$:
- calculer les coordonnées de I ;
 - calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$;
 - donner une équation de la droite (AC) .
- (b) Dans l'espace, déterminer les coordonnées du plan de vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; 3)$ et passant par $A(3; 2; -1)$.

(a) i) Coor. données de I : $\begin{pmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$? $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$xx' + yy'$

$\vec{CA} \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 = 2$$

ii) Éq't droite (AC):

$$(D) = (AC) = \left\{ n \in \mathbb{R} \mid y = ax + b; \begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

Calculons a et b:

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x + b \text{ passe par } C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ou } A$$

$$2 = \frac{5}{4}(-1) + b \Rightarrow b = \frac{13}{4}$$

$$(AC) = \left\{ n(x; y) \in \mathbb{R} \mid y = \frac{5}{4}x + \frac{13}{4} \right\}$$

$$b) \quad \vec{n}'(2;1;3); A(3;2;-1)$$

$$\text{Si } \vec{n}' \perp \pi \text{ alors } \pi: \{ \Pi(x;y;z) \in \mathbb{R} \mid 2x+y+3z+d=0; d \in \mathbb{R} \}$$

Calculons d sachant que $A \in \pi$

$$2 \cdot 3 + 2 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = -5$$

$$\pi: \{ \Pi(x;y;z) \in \mathbb{R} \mid 2x+y+3z-5=0 \}$$

6. Simplifiez les expressions suivantes :

(a) $f_1(x) = \exp(-\ln(x))$, $f_2(x) = \frac{\exp(2x)}{\exp(x)}$, $f_3(x) = \ln(\exp(x^2))$,

(b) $f_4(x) = e^{2x} \cdot e^3$, $f_5(x) = (e^{2x})^3$, $x = 10^3 \cdot 10^5$, $x = (10^3)^5$,

(c) $f_8(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, $f_9(x) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$, $f_{10}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$

(a) $f_1(x) = \frac{1}{x}$; $f_2(x) = \exp(x)$; $f_3(x) = x^2$; $f_4(x) = e^{2x+3}$
 $f_5(x) = e^{8x^3}$; $x = 10^{3+5} = 10^8$; $x = 10^{3 \cdot 5} = 10^{15}$

(c) $f_8(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; $f_9(x) = \ln((1-x)(1+x))$
 $= \ln(1-x^2)$; $f_{10}(x) = \ln(\sqrt{x})$

7. Calculer la dérivée de $f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$.

$f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$
u.v u^n

$f'(x) = 2x \ln(x) + \frac{x^2}{x} - \frac{2x}{2}$

$f'(x) = 2x \ln(x)$

8. Soient $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sin(2x)$. Calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ et $I_2 = \int_{-\pi/8}^{\pi/6} g(x)dx$.

$$I_1 = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} = I_1$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\pi/8}^{\pi/6} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_{-\pi/8}^{\pi/6} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\pi\right) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) \right) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = I_2 \end{aligned}$$