Outils mathématiques 1 — TD 5 : Calcul matriciel

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD)

1. On considère les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Calculer $5A$; $8D$; $(1/2)B$; $3A - 2B$; $2A - 4B$; BC, BD, DB.

2. Effectuer les produits suivants :
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1/2 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Soit la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer A^{-1}, la matrice inverse de A.
   (b) Utiliser le résultat précèdent pour résoudre les systèmes suivants :
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -8 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$$

4. (a) Calculer les déterminants des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   (b) Ces matrices sont-elles inversibles ?
   (c) Calculer B^{-1} la matrice inverse de B.

5. Inverser la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

6. À quelle(s) condition(s) la matrice $D(m) = \begin{pmatrix} m & 2 & 5 \\ 0 & 6 & m \\ m & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Calculer $P(A)$ où P est le polynôme $P(X) = 5X^2 + 6X + 3$.

8. On donne $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer X^tX et ${}^tXX$.

9. Soit le système de paramètres m et n : $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ 4y + mz = 2 \\ my + z = n \end{cases}$.
À quelle(s) condition(s) ce système n'admet-il aucune solution ?

10. On considère dans ce qui suit des transformations géométriques du **plan**. Donner :
   (a) la matrice R associée à une rotation de centre O et de rayon r ;
   (b) la matrice H associée à une homothétie de centre O et de rapport k ;
   (c) la matrice S associée à une similitude de centre O, de rapport k et d'angle θ.
   (d) les matrices Σ_x et Σ_y associées respectivement aux symétries d'axe (Ox) et (Oy).
   (e) la matrice P d'une projection orthogonale sur l'axe (Ox). Calculer alors P^2, P^n et conclure.

11. En utilisant les matrices :
   (a) déterminer A', l'image du point $A(1;3)$ par la rotation de centre O et d'angle 30^o suivie de la symétrie d'axe (Ox) ;
   (b) déterminer A'', l'image du point $A(1;3)$ par la symétrie d'axe (Ox) suivie de la rotation de centre O et d'angle 30^o ;
   (c) déterminer B', l'image du point $B(2;1)$ par la similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle 60^o.

12. On considère la transformation associée à la matrice $M = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que M est associée à une projection.
   (b) Déterminer la droite sur laquelle la projection est faite.
   (c) En se rappelant que la droite d'équation $y = mx + p$ admet comme vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale.
   (d) La matrice M est-elle inversible ? Cela vous paraît-il cohérent avec la transformation géométrique considérée ?