Jeremie Torres

Outils mathématiques 1 — TD 3 : Géométrie dans l'espace

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Donner leurs composantes, puis :
   (a) calculer les produits scalaires $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{c})$;
   (b) calculer les produits vectoriels $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{c}$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \wedge (4\vec{c})$;
   (c) calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

2. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$:
   (a) déterminer les coordonnées des points A et B ;
   (b) calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

3. Déterminer une équation cartésienne :
   (a) du plan Π_1 passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2;0;1)$ et $\vec{v} = (0;1;2)$;
   (b) du plan Π_2 passant par $B(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2;1;1)$.

4. On considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;1\,;-2)$, $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ et $\vec{w} = (1\,;1\,;4)$:
   (a) calculer leurs normes ;
   (b) calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$;
   (c) calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$;
   (d) calculer les produits mixtes $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ et $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est direct ou indirect.
   (e) Enfin, le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u} + 2\vec{v}$ et est unitaire. Déterminer $\vec{a}$.

5. On considère :
   — le point A de coordonnées $(2;0;5)$;
   — la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0;-2;-4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2;1;0)$;
   — le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.
   (a) Calculer les distances d_1 de A à $\mathcal{D}$ et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.
   (b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?

6. On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$:
   (a) déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;
   (b) à l'aide du produit vectoriel, calculer l'aire du triangle ABC.
   (c) Quel est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{AO}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$?
   (d) Le parallélépipède (ou pavé) construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ a-t-il même volume ?

7. Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

   (a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;
   (b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

1. On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Donner leurs composantes, puis :
   (a) calculer les produits scalaires $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{c})$;
   (b) calculer les produits vectoriels $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{c}$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \wedge (4\vec{c})$;
   (c) calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

On considère le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé, direct.

a) $\vec{a}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{c}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

alors $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = 1$
$(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot 4\vec{c} = 32$

b) $\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\+1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{a}\wedge\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\+1\\0\end{pmatrix}$

$(2\vec{a}+3\vec{b})\wedge(4\vec{c}) = 4\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\+1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} \neq \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ le produit vectoriel n'est pas associatif.

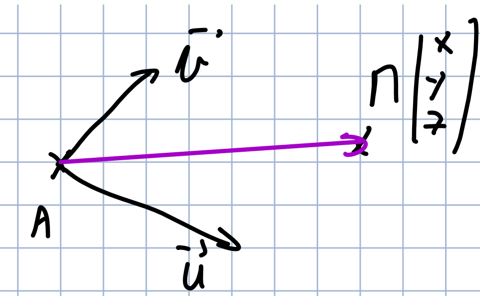
2. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$:
   (a) déterminer les coordonnées des points A et B ;
   (b) calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

a) $\overrightarrow{OA} : \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$. Le point A a les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ car $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A - x_0\\y_A - y_0\\z_A - z_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$. Idem pour B

b) $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \left\| \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} \right\| = \boxed{\sqrt{474} \simeq 21,8 \text{ u.a} = \mathcal{A}}$

3. Déterminer une équation cartésienne :
   (a) du plan Π_1 passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2;0;1)$ et $\vec{v} = (0;1;2)$;
   (b) du plan Π_2 passant par $B(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2;1;1)$.

a)



$\Pi_1 : \{ M(x;y;z) / \vec{u} ; \vec{v} ; \overrightarrow{AM}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow [\vec{u};\vec{v};\overrightarrow{AM}] = 0 \}$

or $[\vec{u};\vec{v};\overrightarrow{AM}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AM} = -x - 4y + 2z + 3$

$\Rightarrow \boxed{\Pi_1 : \{ M(x;y;z) / -x - 4y + 2z + 3 = 0 \}}$.

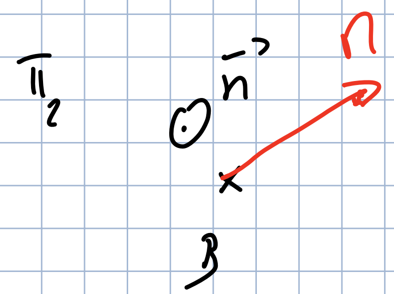
b) $\Pi_2 : \{ M_2(x;y;z) / ax + by + cz + d = 0 \}$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$: \{$ ——— $/ 2x + y + z + d = 0$ passant par $B(1;0;1) \}$

$\Rightarrow d = -3$

$$\boxed{\Pi_2 : \{ M_2(x;y;z) \,/\, 2x + y + z - 3 = 0 \}}$$

<u>Autre méthode</u> :



$$\Pi_2 : \{ M_2(x;y;z) \,/\, \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0 \}$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + y + z - 3 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Pi_2 : \{ M_2(x;y;z) \,/\, 2x + y + z - 3 = 0 \}}$$

4. On considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;1\,;-2)$, $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ et $\vec{w} = (1\,;1\,;4)$:

   (a) calculer leurs normes ;

   (b) calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$;

   (c) calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$;

   (d) calculer les produits mixtes $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ et $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est direct ou indirect.

   (e) Enfin, le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u} + 2\vec{v}$ et est unitaire. Déterminer $\vec{a}$.

(a) soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{14} \;;\; \|\vec{v}\| = \sqrt{5} \;;\; \|\vec{w}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}}$$

b) Produit scalaire : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \;;\; \vec{u} \cdot \vec{w} = -4 \;;\; (2\vec{u} - 3\vec{v})(\vec{v} + \vec{w}) = -33}$

c) Produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$; $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -35 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) Produit mixte : $[\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

$= -14$

et $\underbrace{[\vec{v} ; \vec{u} ; \vec{w}]} = -[\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w}] = +14$

↳ $(\vec{v} ; \vec{u} ; \vec{w})$ est direct !

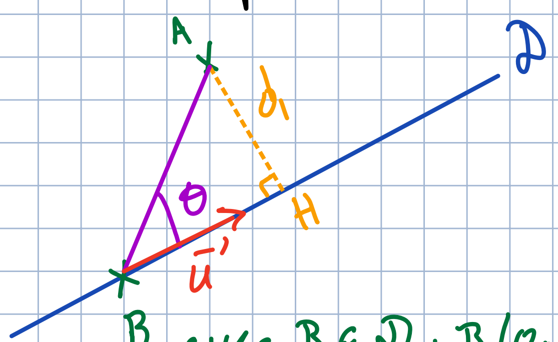
e) $\vec{a} = \dfrac{\vec{u} + 2\vec{v}}{\|\vec{u} + 2\vec{v}\|} = \boxed{\dfrac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}}$

5. On considère :
- le point A de coordonnées $(2;0;5)$;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0;-2;-4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2;1;0)$;
- le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.

(a) Calculer les distances d_1 de A à $\mathcal{D}$ et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.

(b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?

a) Distance point-droite :



B avec $B \in \mathcal{D}$; $B(0;-2;-4)$

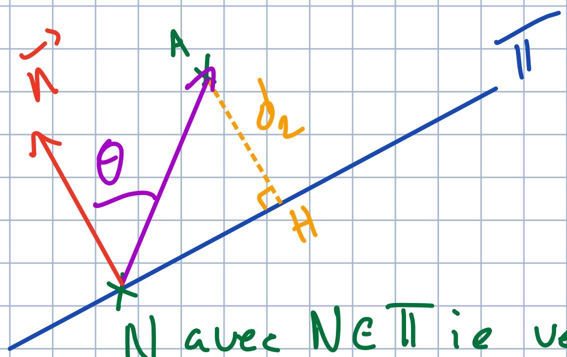
$d_1 = AH = BA \cdot \sin(\theta) = \dfrac{\|\vec{BA}\| \|\vec{u}\| \sin(\theta)}{\|\vec{u}\|}$

$\Rightarrow \boxed{d_1 = \dfrac{\|\vec{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}} = \sqrt{\dfrac{409}{5}} \simeq 9{,}04 \text{ u.}$

distance point-plan :

$d_2 = AH = NA \cos(\theta)$

$= \dfrac{\|\overrightarrow{NA}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\theta)}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|\overrightarrow{NA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$



$$\boxed{d_2 = \dfrac{|\overrightarrow{NA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

N avec $N \in \Pi$ ie verifiant $x + y + 2z - 5 = 0$

je choisis $z = 0$; $y = 0$ et $x = 5 \Rightarrow N(5; 0; 0)$

alors $\overrightarrow{NA}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d'après l'equation du plan)

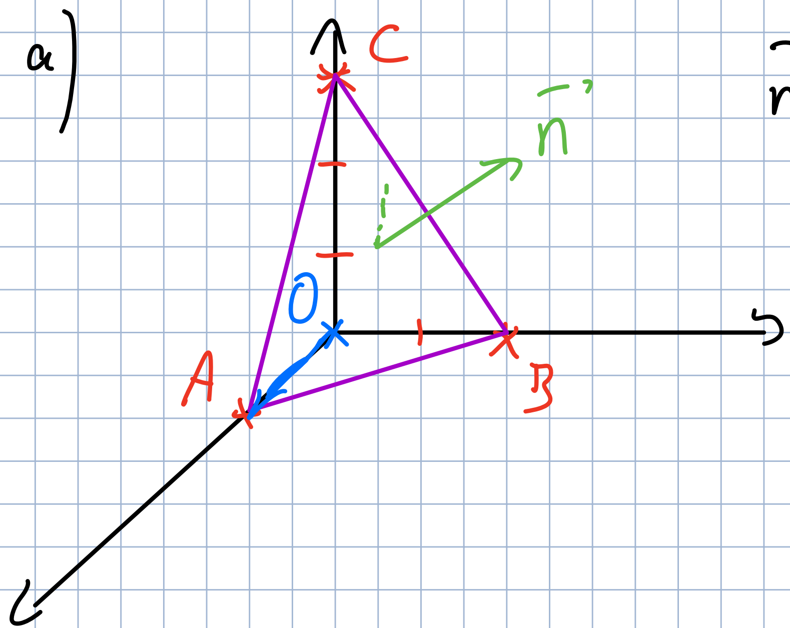
alors $\boxed{d_2 = +\dfrac{7}{\sqrt{6}}}$

b) $(\mathcal{D})$ et parallèle au plan Π si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ or

$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ $(\mathcal{D})$ et Π ne sont pas //.

6. On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$:
   (a) déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;
   (b) à l'aide du produit vectoriel, calculer l'aire du triangle ABC.
   (c) Quel est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{AO}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$?
   (d) Le parallélépipède (ou pavé) construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ a-t-il même volume ?

a)



$$\vec{n} = \frac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|} = \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = \hat{n}}$$

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} ; \vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$$

b) $$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \boxed{\frac{7}{2}\text{ ua} = \mathcal{A}}$$

c) $$V_1 = [\vec{AO} ; \vec{AB} ; \vec{AC}] = \vec{AO} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = -6 \Rightarrow \boxed{V = +6\text{ uv}}$$; le trièdre est indirect

d) $$V_2 = [\vec{OA} ; \vec{OB} ; \vec{OC}] = \vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{AC})$$

$$= \begin{pmatrix}+1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = +6$$

V_1 et V_2 sont égaux !

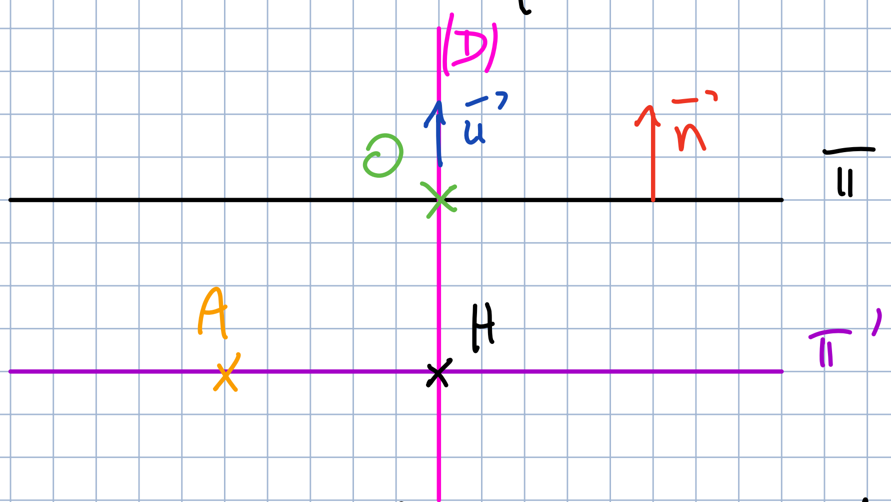
7. Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

(a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;

(b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

a) $(\mathcal{D})$ décrite par $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t \\ z = 2t-1 \end{cases}$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.



Ainsi $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Π admet alors comme équation $x+y+2z+d=0$

et $O \in \Pi \Rightarrow d=0$ et $\boxed{\Pi : \{M(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+2z=0\}}$

b) $\Pi' /\!/ \Pi$ et passe par $A(1;2;3)$. $\mathcal{D}' \in \Pi'$

alors $\Pi' : \{M'(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+2z-9=0\}$

Soit H tq $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ alors $H(x;y;z) \in \Pi'$ tq :
$\in \mathcal{D}$

$$\begin{cases} x+y+2z-9=0 \\ x=t+1 \\ y=t \\ z=2t-1 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{5}{3} \text{ et } \boxed{H\left(\frac{8}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)}$$

Enfin comme $A \in \mathcal{D}'$ et $H \in \mathcal{D}'$ alors $\mathcal{D}' = (AH) = \left\{ M(x;y;z) \,/\, \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AH} \right\}$

$$\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = t\left(\frac{8}{3}-1\right) = \frac{5}{3}t \\ y-2 = t\left(\frac{5}{3}-2\right) = -\frac{1}{3}t \\ z-3 = t\left(\frac{7}{3}-3\right) = -\frac{2}{3}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{5}{3}t+1 \\ y = -\frac{1}{3}t+2 \\ z = -\frac{2}{3}t+3 \end{cases}}$$

Droite passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur

$\vec{v}\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

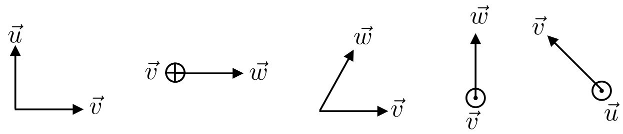
Outils mathématiques 1 — TD 2 : Géométrie dans l'espace

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

Dans toute cette feuille, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1.1 Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Dessiner le vecteurs manquant dans les cinq cas représentés ci-dessous.



1.2 On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$:

(a) donner leurs coordonnées ;

(b) calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

1.3 On considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;1\,;-2)$, $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ et $\vec{w} = (1\,;1\,;4)$:

(a) calculer leurs normes ;

(b) calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$;

(c) calculer les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})$;

(d) calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct ou indirect.

(e) Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u} + 2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

2. Objets de l'espace et calculs de grandeurs

2.1 À partir des résultats de l'exercice précédent :

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

(b) donner une mesure au signe près de l'angle $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

2.2 Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ et donner une mesure au signe près de l'angle $(\widehat{AOB})$.

2.3 On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$:

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;

(b) calculer l'aire du triangle ABC ;

(c) calculer le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

2.4 Déterminer une équation cartésienne :

(a) du plan Π_1 passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2;0;1)$ et $\vec{v} = (0;1;2)$;

(b) du plan Π_2 passant par $B(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2;1;1)$.

2.5 Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ de l'exercice précédent.

2.6 On considère :

— le point A de coordonnées $(2;0;5)$;
— la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0;-2;-4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2;1;0)$;
— le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.

(a) Calculer les distances d_1 de A à $\mathcal{D}$ et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.

(b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?

(c) Déterminer les équations d'une droite parallèle à Π et passant par A. Cette droite est-elle unique ?

3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

$$\Pi_1 : 2x + 3y - z - 5 = 0 \ ; \ \Pi_2 : 4x - 5y + 3z + 3 = 0 \ ; \ \Pi_3 : 2x - 6y + 7z + 6 = 0$$

3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 5 \quad t \in R \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

(a) montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection ;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.

3.3 On considère :
— le plan Π d'équation $3x - 2x + 4z + 5 = 0$
— la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t + 4 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 1 \end{cases}$
Déterminer le point d'intersection ou bien, s'il n'existe pas, la distance entre Π et $\mathcal{D}$.

3.4 Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \qquad t \in R \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

(a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;

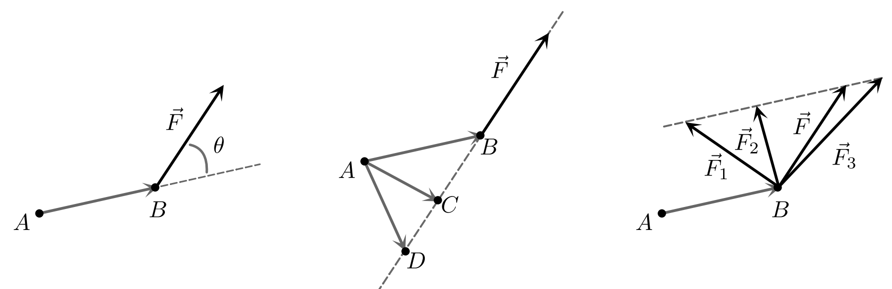
(b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

Application en physique

4.1 Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de la force $\vec{F}$ appliquée en B par rapport à un point A donné est une grandeur physique vectorielle qui quantifie l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour de ce point A. Celui-ci se calcule au travers de la relation

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

et le sens de $\vec{F}$ permet de déterminer le sens de rotation à l'aide de la règle du tournevis.



(a) Moment d'une force (b) Différents points d'application (c) Différentes forces

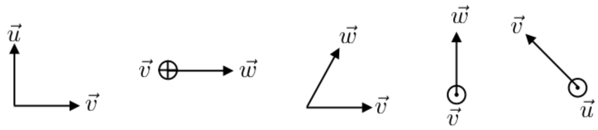
À l'aide de la figure ci-dessus :

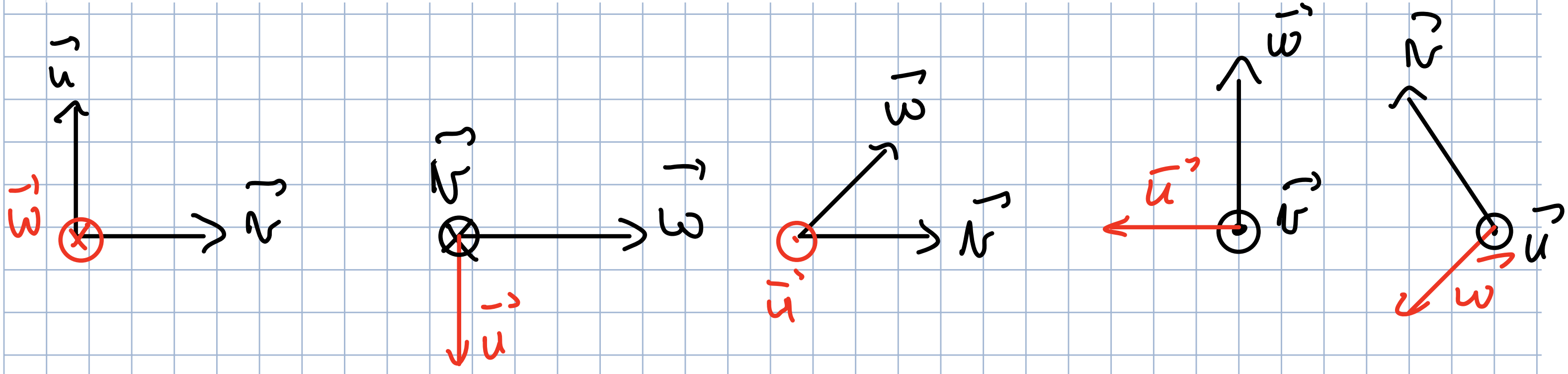
(a) montrer que le moment est le même pour les points d'application B, C et D (volet (b)) et conclure ;

(b) montrer que le moment est le même quelle que soit la force reportée dans le volet (c) et conclure.

1. Produits scalaire, vectoriel et mixte

1.1 Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Dessiner le vecteurs manquant dans les cinq cas représentés ci-dessous.





1.2 On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$:

(a) donner leurs coordonnées ;

(b) calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ puis $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Le produit vectoriel est-il associatif ?

On considère le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé, direct.

a) $\vec{a}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{c}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\+1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\+1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+1\\0\\-1\end{pmatrix}$

<u>De même :</u>

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ le produit vectoriel n'est pas associatif.

1.3 On considère les vecteurs $\vec{u} = (3\,;1\,;-2)$, $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ et $\vec{w} = (1\,;1\,;4)$:

(a) calculer leurs normes ;

(b) calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\vec{v}+\vec{w})$;

(c) calculer les produits vectoriels $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{w}$, $\vec{v}\wedge\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v})\wedge(2\vec{v}+3\vec{w})$;

(d) calculer le produit mixte $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ et indiquer si le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est direct ou indirect.

(e) Le vecteur $\vec{a}$ a pour direction et sens $\vec{u}+2\vec{v}$ et est unitaire : calculer les coordonnées de $\vec{a}$.

a) soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$\Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{14}\ ;\ \|\vec{v}\| = \sqrt{5}\ ;\ \|\vec{w}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}}$

b) Produit scalaire : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\ ;\ \vec{u}\cdot\vec{w} = -4\ ;\ (2\vec{u}-3\vec{v})(\vec{v}+\vec{w}) = -33}$

c) Produit vectoriel : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{u}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix}6\\-14\\2\end{pmatrix}$

$\vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}$; $(\vec{u}-\vec{v})\wedge(2\vec{v}+3\vec{w}) = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}7\\3\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23\\-35\\-4\end{pmatrix}$

d) Produit mixte : $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$

$= -14 < 0 \Rightarrow (\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ indirect

et $[\underbrace{\vec{v};\vec{u};\vec{w}}] = -[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = +14$

$\hookrightarrow (\vec{v};\vec{u};\vec{w})$ est direct !

e) $\vec{a} = \dfrac{\vec{u}+2\vec{v}}{\|\vec{u}+2\vec{v}\|} = \boxed{\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{a}}$

2. Objets de l'espace et calculs de grandeurs

2.1 À partir des résultats de l'exercice précédent :

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

(b) donner une mesure au signe près de l'angle $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

a) $$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \sin(\theta)\, \hat{n}$ avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

$\hookrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{54} = \sqrt{14} . \sqrt{5} \sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\theta = \pm 61,4^\circ}$

2.2 Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ et donner une mesure au signe près de l'angle $(\widehat{AOB})$.

$\overrightarrow{OA} : \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le point A a les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ car $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x_A - x_0 \\ y_A - y_0 \\ z_A - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$. Idem pour B

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \boxed{\sqrt{474} \simeq 21,8 \text{ u.a} = \mathcal{A}}$$

Soit $\theta = \widehat{AOB}$ alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \Rightarrow \sqrt{35}\sqrt{17} \sin(\theta) \simeq 21,8$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \pm 63,3^\circ}$$

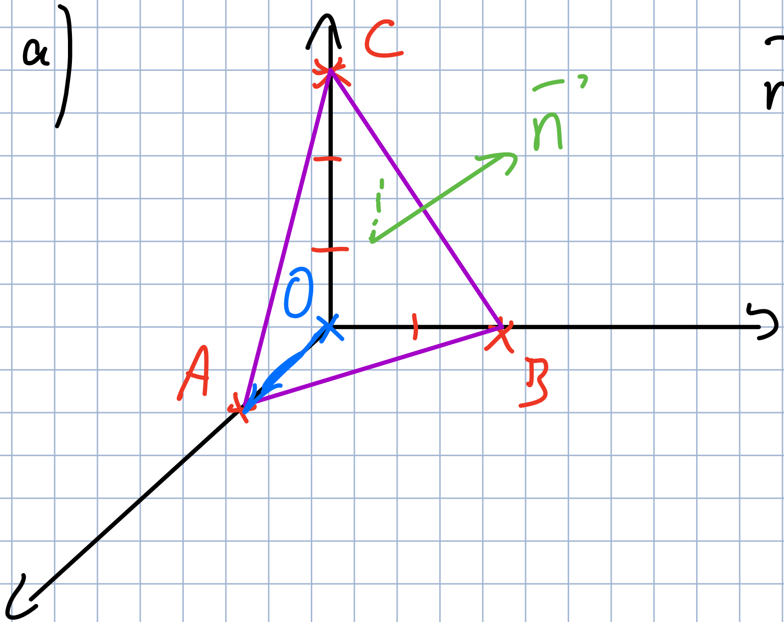
2.3 On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$:

(a) déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan ABC ;

(b) calculer l'aire du triangle ABC ;

(c) calculer le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

a)



$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} = \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \hat{n}}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \boxed{\frac{7}{2}\ ua = \mathcal{A}}$

c) $\left[\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$

$\boxed{V = +6\ uv}$; le trièdre est direct

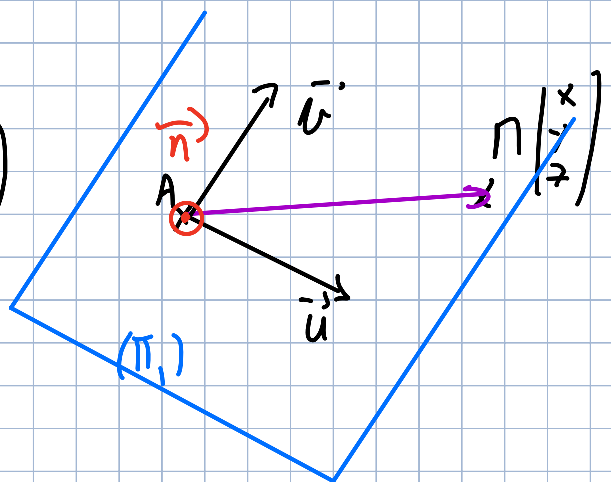
2.4 Déterminer une équation cartésienne :

(a) du plan Π_1 passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (2;0;1)$ et $\vec{v} = (0;1;2)$;

(b) du plan Π_2 passant par $B(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2;1;1)$.

2.5 Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ de l'exercice précédent.

a)



$\Pi : ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \Pi$

$\Pi_1 : \{ M_1(x;y;z) \,/\, \vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{AM}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow [\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{AM}] = 0 \}$

or $[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{AM}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) . \vec{AM} = -x - 4y + 2z + 3$

$\Rightarrow \boxed{\Pi_1 : \{ M_1(x;y;z) \,/\, -x - 4y + 2z + 3 = 0 \}}$

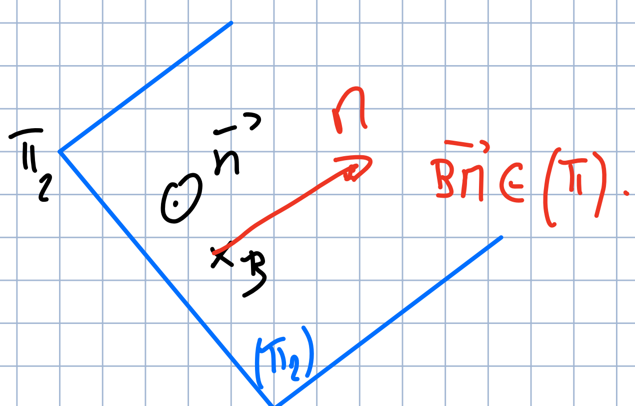
b) $\Pi_2 : \{ M_2(x;y;z) \,/\, ax + by + cz + d = 0 \}$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$: \{ \text{———} \,/\, 2x + y + z + d = 0$ passant par $B(1;0;1) \}$

$\Rightarrow d = -3$

$$\boxed{\Pi_2 : \{ M_2(x;y;z) \,/\, 2x + y + z - 3 = 0 \}}$$

Autre méthode :



$$\Pi_2 : \left\{ M_2(x;y;z) \;/\; \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n} = 0 \right\}$$

$$\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + y + z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_2 : \left\{ M_2(x;y;z) \;/\; 2x + y + z - 3 = 0 \right\}}$$

2.5 : $V = \left| [\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{n}] \right| = \left| [\vec{u} \wedge \vec{v}]\cdot\vec{n} \right|$

or $[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{n}] = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$

$$\Rightarrow \boxed{V = 4 \text{ u.v}}$$

2.6 On considère :

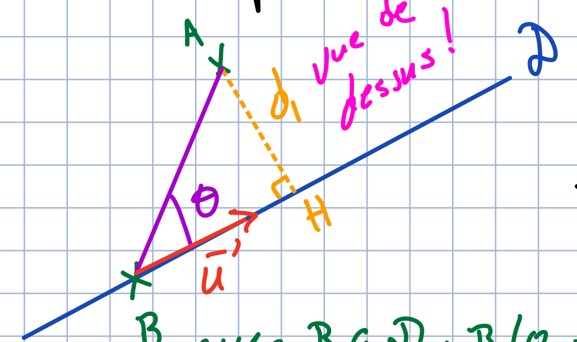
- le point A de coordonnées $(2;0;5)$;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(0;-2;-4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2;1;0)$;
- le plan Π d'équation $x + y + 2z - 5 = 0$.

(a) Calculer les distances d_1 de A à $\mathcal{D}$ et d_2 de A à Π à l'aide des produits scalaires et vectoriels.

(b) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan Π ?

(c) Déterminer les équations d'une droite parallèle à Π et passant par A. Cette droite est-elle unique ?

a) Distance point-droite :

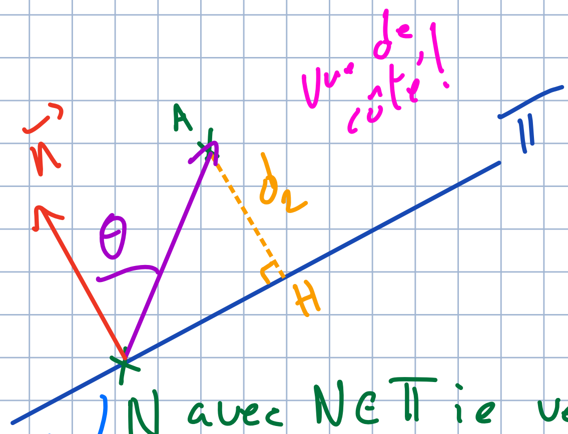


B avec $B \in \mathcal{D}$; $B(0;-2;-4)$

$$d_1 = AH = BA \cdot \sin(\theta) = \frac{\|\overrightarrow{BA}\|\|\vec{u}\|\sin(\theta)}{\|\vec{u}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1 = \frac{\|\overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}} = \sqrt{\frac{409}{5}} \simeq 9{,}04 \text{ u.}$$

distance point-plan :



$d_2 = AH = NA\cos(\theta)$

$= \dfrac{\|\vec{NA}\|.\|\vec{n}\|.\cos(\theta)}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|\vec{NA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

$$\boxed{d_2 = \frac{|\vec{NA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

① $\left\{ \begin{array}{l} N \text{ avec } N \in \Pi \text{ ie verifiant } x+y+2z-5=0 \\ \text{je choisis } z=0 \,;\, y=0 \text{ et } x=5 \Rightarrow N(5;0;0) \end{array} \right.$

alors $\vec{NA}\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ (d'après l'équation du plan)

alors $\boxed{d_2 = +\dfrac{7}{\sqrt{6}}}$

b) $(\mathcal{D})$ est parallèle au plan Π si $\vec{u}.\vec{n} = 0$ or

$\vec{u}.\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ $(\mathcal{D})$ et Π ne sont pas //.

c) Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ le vect. directeur de la droite $(\mathcal{D}')$ // à Π.

Alors $\vec{v}.\vec{n} = 0$ et passant par $A(2;0;5)$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = at + 2 \\ y = bt + 0 \\ z = ct + 5 \end{array} \right.$ → coord. de A.

avec $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a+b+2c = 0 \; (1)$

il faut choisir $a;b;c$ verifiant (1)

Par exemple $a=b=1$; $c=-1$ ainsi $(\mathcal{D}) : \boxed{\begin{cases} x = t+2 \\ y = t \\ z = -t+5 \end{cases}}$ n'est pas unique.

3. Intersections d'ensembles

3.1 Donner une valeur approchée à trois chiffres significatifs du point d'intersection des trois plans définis par les équations suivantes :

$$\Pi_1 : 2x+3y-z-5=0 \ ; \ \Pi_2 : 4x-5y+3z+3=0 \ ; \ \Pi_3 : 2x-6y+7z+6=0$$

Résolution d'un système de 3 éqt° à 3 inconnues.

$$\begin{cases} 2x+3y-z-5=0 \\ 4x-5y+3z+3=0 \\ 2x-6y+7z+6=0 \end{cases} \Rightarrow S : \left\{ \frac{32}{43} ; \frac{49}{43} ; -\frac{4}{43} \right\}.$$

3.2 Soient les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, telles que

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -t-2 \\ z = 3t-1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-5 \\ z = -t+3 \end{cases} t \in R$$

A

B

(a) montrer que ces droites sont dans le même plan en déterminant les coordonnées de leur intersection ;

(b) donner une mesure de l'angle qu'elles forment.

a) Soit $I : \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ alors I vérifie

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -t-2 \\ z = 3t-1 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-5 \\ z = -t+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+2 = 3t+1 \Leftrightarrow -t=-1 \Rightarrow t=1 \\ -t-2 = 2t-5 \Leftrightarrow -3t=-3 \Rightarrow t=1 \\ 3t-1 = -t+3 \Leftrightarrow 4t=4 \Rightarrow t=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t=1}$$

$\Rightarrow I = (4 ; -3 ; 2)$ pour $(\mathcal{D}_1)$ et $I = (4 ; -3 ; 2)$ pour $(\mathcal{D}_2)$

$\rightarrow$ même plan pour $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$

Autre méthode : $(\mathcal{D}_1)$ passe par $A\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $(\mathcal{D}_2)$ par $B\begin{pmatrix}+1\\-5\\3\end{pmatrix}$. Est-ce que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{AB}$ existe avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ vect. dir de $(\mathcal{D}_1)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ vect dir de $(\mathcal{D}_2)$?

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+3\beta=-1\\-\alpha+2\beta=-3\\3\alpha-\beta=4 \text{ ok}\end{cases} \quad \alpha=1;\ \beta=-1 \Rightarrow (\mathcal{D}_1);(\mathcal{D}_2) \text{ même plan}$$

b) Soit $\vec{u_1}$ un vect. directeur de $(\mathcal{D}_1)$; $\vec{u_1}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u_2}$ ———————— $(\mathcal{D}_2)$; $\vec{u_2}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

alors $$\cos(\theta)=\frac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{\|\vec{u_1}\|\|\vec{u_2}\|}=\frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta=\pm 85,9^\circ}$$

3.3 On considère :

— le plan Π d'équation $3x-2y+4z+5=0$

— la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques $\begin{cases}x=-2t-1\\y=3t+4\\z=3t-1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

Déterminer le point d'intersection ou bien, s'il n'existe pas, la distance entre Π et $\mathcal{D}$.

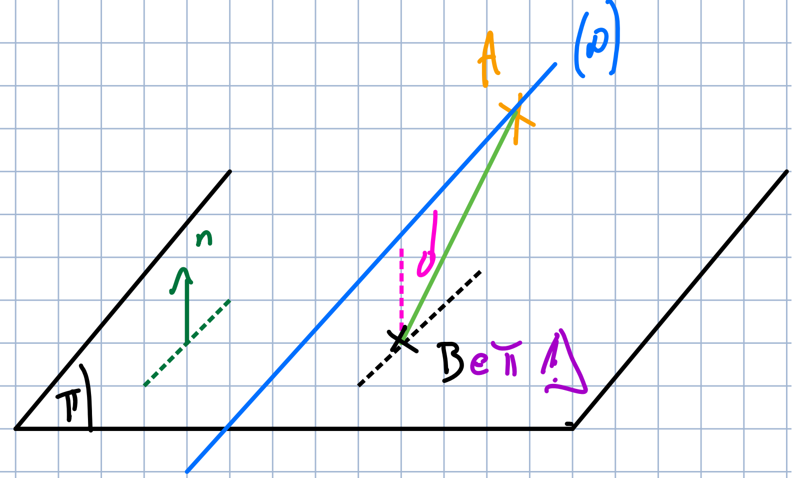
Pour chercher $I=\Pi\cap(\mathcal{D})$ on injecte les éq^t paramétriques dans l'éq^t du plan. Ainsi :

$$3(-2t-1)-2(3t+4)+4(3t-1)+5=0$$

$\Leftrightarrow -6t-6t+12t+\alpha=0 \Rightarrow$ on ne peut pas trouver "t". Il n'existe pas d'intersection entre $(\mathcal{D})$ et Π. Les 2 sont dans le même plan

Calculons la distance entre Π et $(\mathcal{D})$.

$(\mathcal{D}) \begin{cases} \text{passe par } A(-1;4;-1) \\ \vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} \text{ de vect. directeur} \end{cases}$



$\Pi \left\{ \vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} \right.$ de vect. normal.

Soit $B(x;y;z) \in \Pi \setminus d = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{AB}|}{\|\vec{n}\|}$; $\|\vec{n}\| = \sqrt{29}$

Avec $B(-1;1;0)$ (en effet $3(-1) - 2(1) + 0 + 5 = -5+5=0$ ok !)

<u>Ainsi</u> : $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1+1\\1-4\\0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}+3\\-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} = 10$ et $d = \dfrac{10}{\sqrt{29}} = 1,86$ u.l.

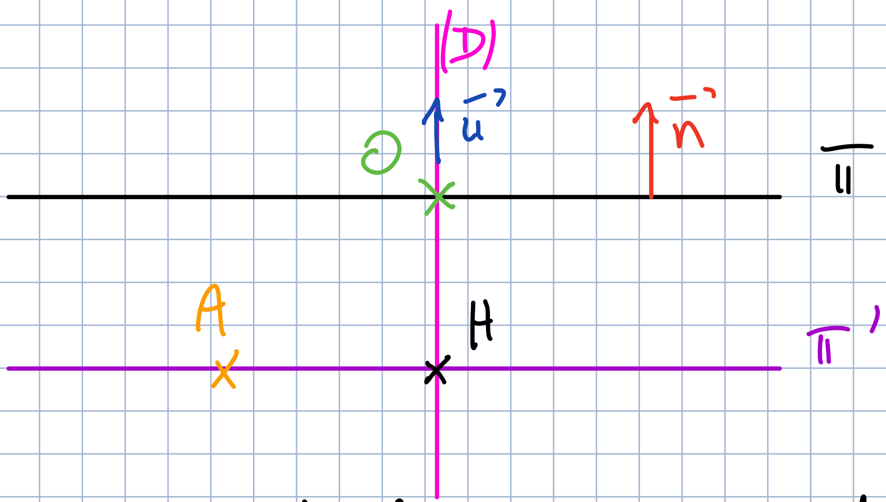
3.4 Soit la droite $\mathcal{D}$ décrite par les équations paramétrées :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = t+1 \\ y = t \qquad t \in R \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

(a) déterminer une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine ;

(b) déterminer des équations paramétrées de la droite $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et coupant la droite $\mathcal{D}$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

a) $(\mathcal{D})$ décrite par $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t \\ z = 2t-1 \end{cases}$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.



Ainsi $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

π admet alors comme équation $x+y+2z+d=0$

et $O \in \pi \Rightarrow d=0$ et $\boxed{\pi : \{ M(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+2z=0 \}}$

b) $\pi' // \pi$ et passe par $A(1;2;3)$. $\mathcal{D}' \in \pi'$

alors $\pi' : \{ M'(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+2z-9=0 \}$

Soit H tq $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ alors $H(x;y;z) \in \pi'$ $\in \mathcal{D}$ tq :

$$\begin{cases} x+y+2z-9=0 \\ x=t+1 \\ y=t \\ z=2t-1 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{5}{3} \text{ et } \boxed{H\left(\frac{8}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)}$$

Enfin comme $A \in \mathcal{D}'$ et $H \in \mathcal{D}'$ alors $\mathcal{D}' = (AH) = \{M(x;y;z) / \vec{AM} \parallel \vec{AH}\}$

$\vec{AM} \parallel \vec{AH} \Leftrightarrow \vec{AM} = t\,\vec{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = t\left(\frac{8}{3}-1\right) = \frac{5}{3}t \\ y-2 = t\left(\frac{5}{3}-2\right) = -\frac{1}{3}t \\ z-3 = t\left(\frac{7}{3}-3\right) = \frac{-2}{3}t \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{5}{3}t + 1 \\ y = -\frac{1}{3}t + 2 \\ z = \frac{-2}{3}t + 3 \end{cases}}$

3)

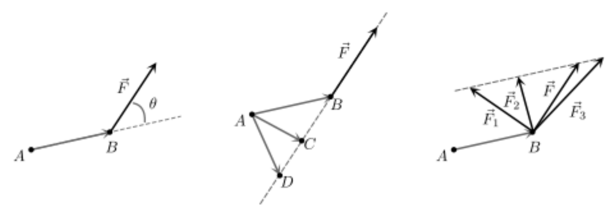
Droite passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Application en physique

4.1 Le moment $\vec{\mathcal{M}}$ de la force $\vec{F}$ appliquée en B par rapport à un point A donné est une grandeur physique vectorielle qui quantifie l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour de ce point A. Celui-ci se calcule au travers de la relation

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

et le sens de $\vec{F}$ permet de déterminer le sens de rotation à l'aide de la règle du tournevis.



(a) Moment d'une force (b) Différents points d'application (c) Différentes forces

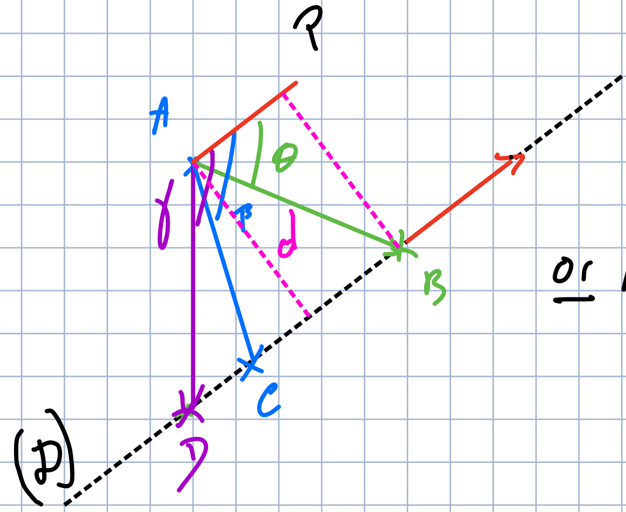
À l'aide de la figure ci-dessus :

(a) montrer que le moment est le même pour les points d'application B, C et D (volet (b)) et conclure ;

(b) montrer que le moment est le même quelle que soit la force reportée dans le volet (c) et conclure.

a)

1ère méthode



$$\vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

Or $AB \sin(\theta) = AC \sin(\beta)$
$= AD \sin(\gamma) = d$

$$\vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AB}) = AB.F.\sin(\theta)\,\hat{n} = d.F.\hat{n}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AC}) = AC.F.\sin(\beta)\,\hat{n} = d.F.\hat{n}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AD}) = AD.F.\sin(\gamma)\,\hat{n} = d.F.\hat{n}$$

$$\boxed{\|\vec{\mathcal{M}}_F\| = d.F}$$

2ème méthode (Chasles)

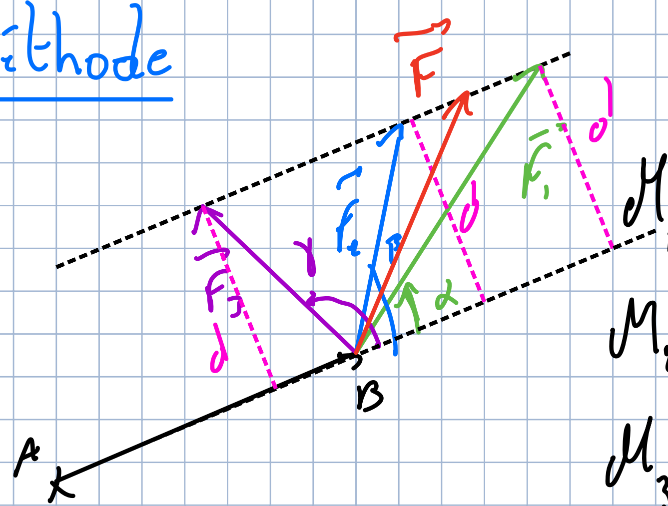
- $\vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$

- $\vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AC}) = \vec{AC} \wedge \vec{F} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \wedge \vec{F}$
$= \vec{AB} \wedge \vec{F} + \underbrace{\vec{BC} \wedge \vec{F}}_{=0 \text{ car } \vec{BC} /\!/ \vec{F}}$
$= \vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AB})$

De même pour $\vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AD}) = \vec{\mathcal{M}}_F(\vec{AB})$

b)

1ère méthode



$$\mathcal{M}_1 = AB.F_1 \sin\alpha = AB.d$$

$$\mathcal{M}_2 = AB.F_2 \sin\beta = AB.d$$

$$\mathcal{M}_3 = AB.F_3 \sin\gamma = AB.d$$

$2^{ème}$ méthode (Chasles)

. $\mathcal{M}_F(\vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$ or $\vec{F_1} = \vec{F} + k\vec{AB}\,;\ \forall k \in \mathbb{R}$

. $\mathcal{M}_{F_1}(\vec{AB}) = \vec{AB} \wedge \vec{F_1} = \vec{AB} \wedge (\vec{F} + k\vec{AB})$

$$= \vec{AB} \wedge \vec{F} + k\vec{AB} \wedge \vec{AB}$$

$$= \mathcal{M}_F(\vec{AB})$$

$\Rightarrow \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}$

Conclusions:

1) Dans le 1er cas; seul la distance entre le pt d'application et la droite d'application (Δ) doit être pris en compte. Avec $\boxed{\|\mathcal{M}\| = F \cdot d}$

2) Dans le 2nd cas; le point d'application ne rentre pas en compte tant que l'extrémité des forces F_i est sur une droite parallèle à $\vec{AB}$.