Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(4;-1)$ et $D(1;-3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

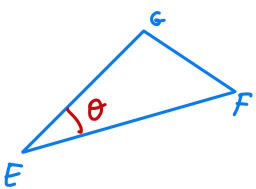
1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

→ calculer θ au signe près.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Q sup)



$\theta = ?$ au signe près

1.1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.2. $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$$= 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8-18-3 \\ 6+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1.3. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$?

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\times 3 + 3\times(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}$? $\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0$

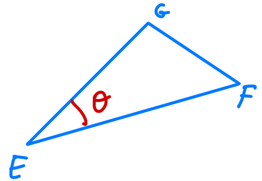
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\| \cos\theta$$

$$4 = \sqrt{29}\,\sqrt{13}\,\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{29}\sqrt{13}} = 0{,}206$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \arccos(0{,}206) = \pm 78{,}1°$$

Q sup)



$\theta = ?$ au signe près

$\vec{j}$ $\vec{i}$

$\vec{EF} = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{EG} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{EF}\cdot\vec{EG} = 36$

$\|\vec{EF}\| = \sqrt{53}$ $\quad \|\vec{EG}\| = \sqrt{32}$

$\cos\theta = \dfrac{36}{\sqrt{32}\,\sqrt{53}} = 0,874 \Rightarrow \theta = \pm \arccos(0,874) = \pm 29,1°$

Outils mathématiques 1 — Première semaine

Trigonométrie

1.1 Rappeler les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

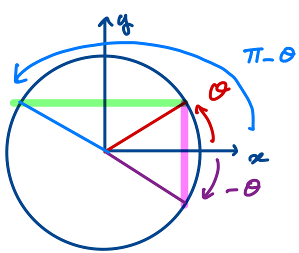
1.2 Établir les formules de $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ ainsi que de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.

1.3 Que permet d'écrire le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique ?

1.4 Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$.

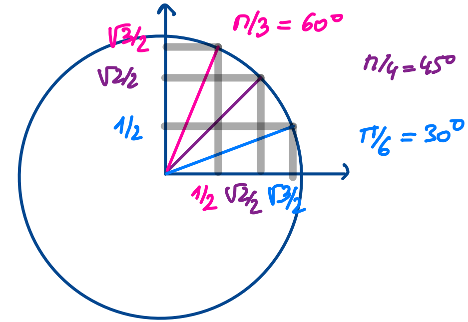
1.5 Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Trigonométrie :



$\cos\theta = \cos(-\theta)$

$\sin(\theta) = \sin(\pi-\theta)$



Grand angle → grand sinus → petit cosinus.

1.1 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$

1.2 $\cos(2a) = \cos^2 a + \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

1.3 $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

1.4 $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a \end{cases}$

$e^A \times e^B = e^{A+B} = \exp(A+B)$

$e^{ia} = \cos a + i \sin a$

$e^{ib} = \cos b + i \sin b$

$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b).$

$\Rightarrow \cos(a+b) + i \sin(a+b) = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$

$= \cos a \cos b + i \sin a \cos b + \cos(a)\, i \sin b + \underset{-1}{\cancel{i^2}} \sin a \sin b$

$= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a)$

1.5

Question: Calcul de $\cos(\pi/12)$

$\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(+\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$

1.6 Résoudre $\sin(2x) = \cos(x)$.

1.7 "Linéariser" $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$

1.8 Calculer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1.6- Résoudre $\sin(2x) = \cos(x)$

$\Longleftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin a = \sin b \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \; [2\pi] & (1) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b \; [2\pi] & (2) \end{cases}$

$\theta + k 2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \theta [2\pi]$ ← modulo 2π

se divise comme l'angle

(1) $2x = \frac{\pi}{2} - x \; [2\pi]$

$3x = \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$

$x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$

(2) $2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2} + x \; [2\pi]$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} [2\pi].$

$S: \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

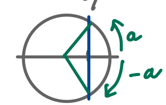
$S = \left\{ x \,/\, x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \right\} \cup \left\{ x \,/\, x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$

Rq: Je peux aussi faire $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(x)$

$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = x \; [2\pi]$ ou $\frac{\pi}{2} - 2x = -x \; [2\pi]$

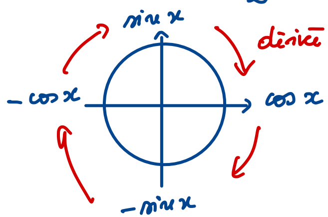
→ Mêmes équations.

$\cos a = \cos b$



$\Longleftrightarrow$ $a = b$ ou $a = -b$

1.7. Primitives $\cos(2x)$: $\frac{1}{2}\sin(2x) + k \in \mathbb{R}$



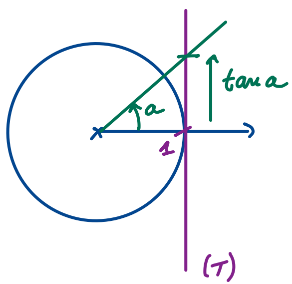
Primitives de $\cos^2 x$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \end{cases}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

1.7



$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(-\pi/4\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin \pi/12}{\cos \pi/12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \times (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4}$$

$$= \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

Exponentielles et logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

2.1 $e^2 \cdot e^3$; e^4/e^2 ; $(e^{2x})^3$; $\exp(2x)\cdot\exp(-x)$

2.2 $\ln(x)+\ln(2)$; $\ln(4x)$; $\ln(x^3)$; $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.3 $\exp(\ln(x))$; $\exp(-\ln(x))$; $\exp(x\ln(x))$

2.1. $e^2 . e^3 = e^5 = \exp(2)\exp(3) = \exp(5)$

$$\frac{e^4}{e^2} = e^{4-2} = e^2$$

$$\left(e^{2x}\right)^3 = e^{3\times 2x} = e^{6x}$$

$$\exp(2x)\exp(-x) = e^{2x} . e^{-x} = \exp(x)$$

2.2 $\underbrace{e^{\ln x}}_{!} = x$ $\quad \ln e^x = x$

$x > 0$

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b.$

$\ln x + \ln 2 = \ln(2x)$

$\ln(4x) = \ln 4 + \ln x$

$\ln(x^3) = 3\ln(x)$ $\quad \ln(a^b) = b\ln(a)$

$$\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(x^{-2}\right) = -2\ln(x)$$

2.3. $e^{\ln x} = x$

$$\exp(-\ln x) = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

$$\exp(x\ln x) = \left(e^{\ln x}\right)^x = x^x \text{ si } x > 0$$

2.4) $\ln(xe^x) = \ln x + \ln e^x = \ln x + x.$

Table des logarithmes décimaux entre 1 et 100

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,322 22	41	1,612 78	61	1,785 33	81	1,908 49
2	0,301 03	22	1,342 42	42	1,623 25	62	1,792 39	82	1,913 81
3	0,477 12	23	1,361 73	43	1,633 47	63	1,799 34	83	1,919 08
4	0,602 06	24	1,380 21	44	1,643 45	64	1,806 18	84	1,924 28
5	0,698 97	25	1,397 94	45	1,653 21	65	1,812 91	85	1,929 42
6	0,778 15	26	1,414 97	46	1,662 76	66	1,819 54	86	1,934 5
7	0,845 1	27	1,431 36	47	1,672 1	67	1,826 07	87	1,939 52
8	0,903 09	28	1,447 16	48	1,681 24	68	1,832 51	88	1,944 48
9	0,954 24	29	1,462 4	49	1,690 2	69	1,838 85	89	1,949 39
10	1	**30**	1,477 12	**50**	1,698 97	**70**	1,845 1	**90**	1,954 24
11	1,041 39	31	1,491 36	51	1,707 57	71	1,851 26	91	1,959 04
12	1,079 18	32	1,505 15	52	1,716	72	1,857 33	92	1,963 79
13	1,113 94	33	1,518 51	53	1,724 28	73	1,863 32	93	1,968 48
14	1,146 13	34	1,531 48	54	1,732 39	74	1,869 23	94	1,973 13
15	1,176 09	35	1,544 07	55	1,740 36	75	1,875 06	95	1,977 72
16	1,204 12	36	1,556 3	56	1,748 19	76	1,880 81	96	1,982 27
17	1,230 45	37	1,568 2	57	1,755 87	77	1,886 49	97	1,986 77
18	1,255 27	38	1,579 78	58	1,763 43	78	1,892 09	98	1,991 23
19	1,278 75	39	1,591 06	59	1,770 85	79	1,897 63	99	1,995 64
20	1,301 03	**40**	1,602 06	**60**	1,778 15	**80**	1,903 09	**100**	2

Systèmes d'équations

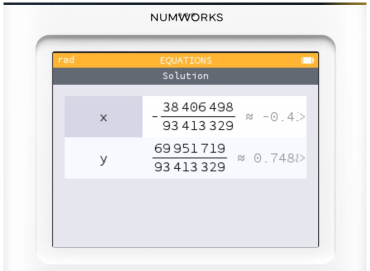
4.1 Résoudre les systèmes d'équations suivants à la calculatrice

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \quad (S1)$$

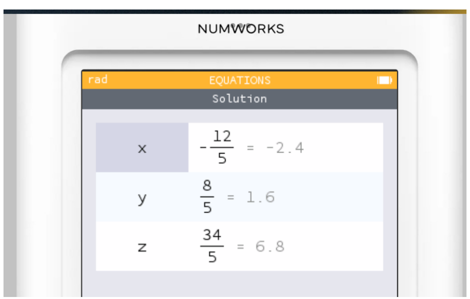
$$\begin{cases} \frac{7}{13}x + \frac{11}{17}y = \frac{5}{19} \\ \frac{23}{29}x - \frac{31}{37}y = -\frac{41}{43} \end{cases} \quad (S2)$$

(S_1) : $x = 4/7$

$y = 9/7$



$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y - z = 2 \end{cases} \quad (S3)$$



Trinôme du second degré

3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

— $3x^2 - 4x + 1 = 0$;

— $2x^2 - 2x + 0 = 0$

$2x^2 - 2x + 4 = 0$

3.2 Factoriser

— $P(x) = x^2 - 3x - 4$;

— $Q(x) = x^2 + 4x - 21$

* $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = d^2$

$x_1 = \dfrac{-b-d}{2a}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b+d}{2a}$

* Soit P polynôme de degré n

P admet n racines dans $\mathbb{C}$.

* Soit P de degré 4

$P = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)\, a$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 = 2^2$

$x = \dfrac{+4 \pm 2}{2 \times 3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{6}{6} = 1 \end{cases}$

$2x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$2x^2 - 2x + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \times 4 \times 2 = -28 = (i\sqrt{28})^2 = (2i\sqrt{7})^2$

$i / \ i^2 = -1$

$x_1 = \dfrac{+2 - 2i\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$

$x_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$

conjugués

$P(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - r_1)(x - r_2)$

Je pose $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 25 = 5^2 \Rightarrow r_1 = \dfrac{+3-5}{2} = -1$

$r_2 = \dfrac{+3+5}{2} = 4$

$P(x) = (x+1)(x-4)$

$Q(x) = x^2 + 4x - 21 \overset{eq.}{=} 0$

$\Delta = 100 = 10^2$

$r_1 = \dfrac{-4-10}{2} = -7$

$r_2 = \dfrac{-4+10}{2} = 3$

$\Rightarrow Q(x) = (x+7)(x-3)$

Intégrales

Intégrer $\int_0^1 (x^2 - 1)\, dx$ et $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$

$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_0^1 x^2 - 1\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + 0\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \cancel{(0 - 0)}$

$= -2/3$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx \underset{(1.7)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2}\, dx$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dx + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} + \cancel{\left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi}}$

$= \frac{2\pi}{2} = \pi$

Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(4;-1)$ et $D(1;-3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

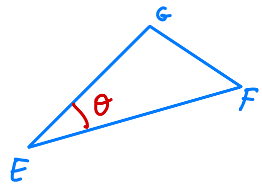
1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

→ calculer θ au signe près.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Q sup)



$\theta = ?$ au signe près

1.1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.2. $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$$= 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8-18-3 \\ 6+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1.3. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$?

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\times 3 + 3\times(-4) = 0$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}$? $\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -6+10 = 4 \neq 0$

1.4 Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.5 Calculer le produit scalaire $s = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}})$.

1.6 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

1.4. $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{9+16} = 5$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4\times 10} = 2\sqrt{10}$

1.5.

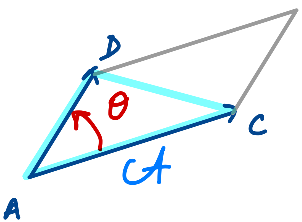
$s = \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \cos\theta = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$

$= 5 \times 2\sqrt{10} \cdot \cos\theta = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 26$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{26}{5 \times 2\sqrt{10}} = 0,822$

$\Rightarrow \theta = \pm 34,70°$

1.6



$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \left| \det(\vec{AC}; \vec{AD}) \right|$

$\det(\vec{AC}; \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -18$

$= 6 \times (-4) - (-2) \times 3$

$= -24 + 6 = -18$

$\mathcal{A} = \dfrac{18}{2} = 9$ uA

$\det(\vec{AC}; \vec{AD}) < 0 \Leftrightarrow \theta < 0$

$\Rightarrow \theta = -34,7°$

(ACD) est indirect ou inverse ?

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

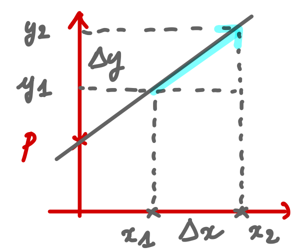
2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

Rappel: $y = mx + p$ Je pose $x = 0 \Rightarrow y = p$.



$y_2 = mx_2 + p$

$y_1 = mx_1 + p$

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

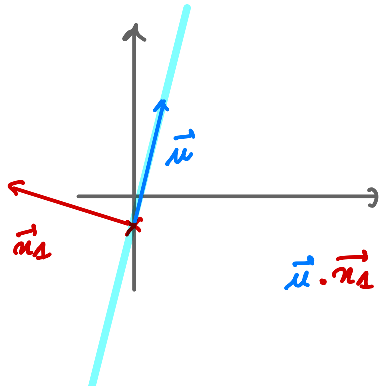
$\Delta y = m \Delta x$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$\vec{u} = (\Delta x; \Delta y) = (\Delta x; m\Delta x)$.

Je pose $\Delta x = 1 \Rightarrow \vec{u} = (1; m) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

Ex: $y = 4x - 1$



$\vec{n_1} = (-m;1)$

$\vec{u}\cdot\vec{n_1} = \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{n} = (-m;1)}$

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :
(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.1 et 2.2 $\longrightarrow$ lectures directes

2.1 $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

2.2. $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ forme canonique

$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

2.3. $\vec{u} = (1;m)$ $\quad \vec{u}' = (1;m')$

$\vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix} = 0$

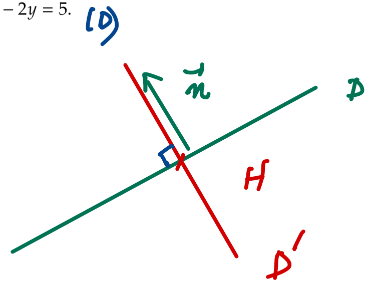
$\Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Rightarrow \boxed{mm' = -1}$

(a) $\vec{u} = (1;2)$ $\quad \vec{n} = (2;-1)$

(b) $\rightarrow$ (ii) $\quad 2\times(-0,5) = -1$

$\vec{u_2} = (1;-0,5)$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{u_2} = 0.$

2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite (D') passant par $H(-2;1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$. (D)



$\vec{u}' = \vec{n}$

Stratégie:

1. $\vec{n}$
2. $\vec{n} = \vec{u}'$
3. $\vec{u}' \Longrightarrow \vec{n}'$
4. Eq. incomplète
5. $H \rightarrow$ compléter l'éq.

$\vec{n} = (1;-2) = \vec{u}' \Rightarrow \vec{n}' = (2;1)$

$\Rightarrow D' : 2x + y + c = 0$

$H \in D' \iff 2\times(-2) + 1 + c = 0 \Rightarrow -3 + c = 0$
$\Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow \boxed{D' : 2x + y + 3 = 0}$

Autre méthode: $D' = \{M(x;y) \,/\, \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}\}$

$\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HM} \perp \vec{u} \iff \overrightarrow{HM}\cdot\vec{u} = 0 \iff \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$2x + 4 + y - 1 = 0 \iff \boxed{2x + y + 3 = 0}$

Autre Méthode: $D' = \{M(x;y) \,/\, \overrightarrow{HM} \,/\!/\, \vec{n}\}$

$\overrightarrow{HM} \,/\!/\, \vec{n} \iff \det(\overrightarrow{HM};\vec{n}) = 0$

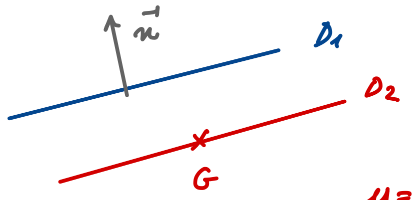
$\iff \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{eq.}}{=} 0$

$\iff -2x - 4 - y + 1 = 0$

$\boxed{-2x - y - 3 = 0}$

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2;-3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2;-3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y=-2x+3$.



$y=-2x+p$

$\Rightarrow -3=-2\times 2+p \Rightarrow p=1$

$y=-2x+1$

D' : $M /\ \overrightarrow{GM} \perp \vec{n}$ $\qquad \overrightarrow{GM}=\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{GM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 2x-4+y+3=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :

- D_1 d'équation : $2x+y-3=0$
- D_2 passant par $A(0;3)$ et $B(3;5)$
- D_3 d'équation : $4x-y=6$

$I_{13}=D_1\cap D_3$

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 & (1) \\ 4x-y-6=0 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(3)\quad 6x-9=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

$(1)\Rightarrow 3+y-3=0 \Rightarrow y=0 \qquad I_{13}=\left(\frac{3}{2};0\right)$

$(D_2)\quad 2x-3y+9=0$

Je décris $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{AM}\,//\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 3-0 \\ 5-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} x \\ y-3 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & x \\ 2 & y-3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3y-9-2x=0$

$\Leftrightarrow 2x-3x+9=0.$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ 2x - 3y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow x = 0.$

$I_{12}(0;3)$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 & (2) \\ 4x - y - 6 = 0 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2{,}7 \\ y = 4{,}8 \end{cases}$$

$I_{23}(2{,}7;4{,}8)$

2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5;-2)$ sur la droite D d'équation $y = -3x + 4$.

2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x;y) \ / \ y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x;y) \ / \ x - 4y + 12 = 0\}$.

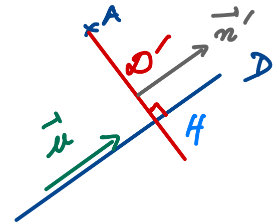
2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1;-4)$ et de rayon 7.

2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

$$a)\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 2 \ \ ; \ \ b)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \ \ ; \ \ c)\ x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$$

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB, ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.

2.7



① $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ $A \in \mathcal{D}'$ → Equation de $\mathcal{D}'$

② $H \in \mathcal{D}$ et $H \in \mathcal{D}'$ → Système

$\mathcal{D}'$: $x - 3y - 11 = 0.$

$\vec{u} = (1;-3) = \vec{n}'$

$\Rightarrow \mathcal{D}' : x - 3y + c = 0$

$A \in \mathcal{D}' : 5 + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -11$

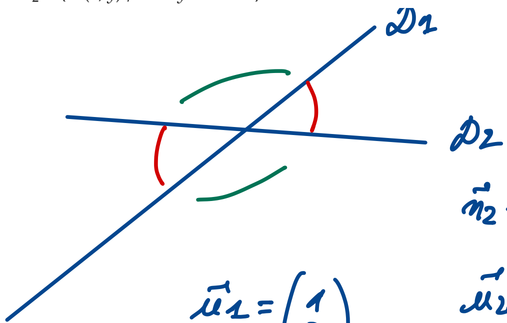
$$\begin{cases} 3x + y = 4 & (1) \\ x - 3y = 11 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = 11 + 3y \Rightarrow 3(11+3y) + y = 4$

$\Rightarrow 33 + 9y + y = 4 \Rightarrow 10y = -29 \Rightarrow y = -2{,}9$

$(2) \Rightarrow x = 11 - 3 \times 2{,}9 = 2{,}3 \Rightarrow \boxed{x(2{,}3;-2{,}9)}$

2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x;y) \ / \ y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x;y) \ / \ x - 4y + 12 = 0\}$.



$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|} = \frac{7}{\sqrt{10}\ \sqrt{17}} = 0{,}537$$

$\Rightarrow \theta = \pm 57{,}5°$

(ou $\pm 123°$ selon le choix de u_1 et u_2)

2.9 Déterminer l'équation cartésienne canonique du cercle de centre $C(1;-4)$ et de rayon 7.

2.9. $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 49$

2.10 Parmi les trois équations suivantes, lesquelles sont des équations de cercles :

a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$; *b)* $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; *c)* $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$

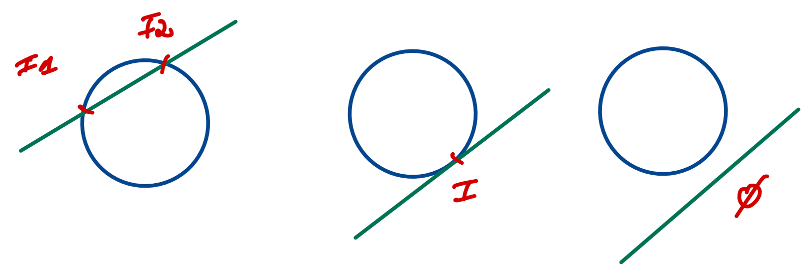
$$\underbrace{x^2 - 2x} + \underbrace{y^2 + 4y} - 3 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + \underbrace{(y+2)^2 - 4} - 3 = 0$$

$$y^2 + 4y + \cancel{4} - \cancel{4}$$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8 \rightarrow$ équation du cercle de centre $(1;-2)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB, ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.



$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 \\ \text{Eq. de } (AB) \end{cases}$$

$y = mx + p$

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

$\Rightarrow y = 2x + p \qquad B \in \mathcal{D} \Rightarrow -1 = 2 \times 0 + p \Rightarrow p = -1$

$y = 2x - 1.$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (2x-1)^2 = 9$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 9$

$5x^2 - 8x - 4 = 0.$

$\Delta = 64 + 4 \times 4 \times 5 = 144 = 12^2$

$x_1 = \dfrac{8-12}{10} = -0{,}4 \Rightarrow y_1 = 2 \times (-0{,}4) - 1 = -1{,}8$

$x_2 = \dfrac{8+12}{10} = 2 \Rightarrow y_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$

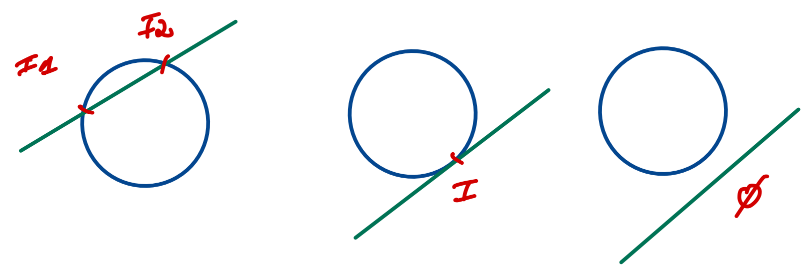
$\Rightarrow I_1(-0{,}4; -1{,}8) \qquad I_2 = (2;3).$

$\underbrace{x^2 - 2x} + \underbrace{y^2 + 4y} - 3 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + \underbrace{(y+2)^2 - 4}_{y^2 + 4y + \cancel{4} - \cancel{4}} - 3 = 0$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8 \rightarrow$ équation du cercle de centre $(1;-2)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

2.11 Dans le plan, déterminer l'intersection de la droite D passant par les points $A(1;1)$ et $B(0;-1)$ et du cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 3. Calculer l'aire du triangle OAB, ainsi que la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.



$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 \\ \text{Eq. de } (AB) \end{cases}$$

$y = mx + p$

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}$

$y = 2x + p$ $\qquad$ $y = 2x - 1$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 9 & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \end{cases}$$

$(2) \to (1)$

$(x-2)^2 + (2x-1)^2 = 9$

$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 9$

$5x^2 - 8x - 4 = 0$

$\Delta = 144 = 12^2$

$\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{8-12}{10} = -0{,}4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2x_1 - 1 = -1{,}8$

$\Rightarrow \boxed{I_1(-0{,}4\,;\,-1{,}8)}$

$\Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{8+12}{10} = 2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 2x_2 - 1 = 3$

$\Rightarrow \boxed{I_2(2\,;\,3)}$

$\theta = (\vec{OA}\,;\,\vec{OB})$

$\mathcal{A}$ aire de OAB

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{OA}\,;\,\vec{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \mathcal{A} = \dfrac{|-1|}{2} = 0{,}5\,u_A.$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{\|\vec{OA}\|.\|\vec{OB}\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\,.\,1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pm 135°$

$\Rightarrow \theta = -135°$

3. Barycentres

3.1 Le barycentre de n points M_i de poids respectifs p_i est le point G vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

(a) Établir la relation entre les coordonnées de G et celles des points M_i ?

(b) Que devient cette dernière relation si G est l'isobarycentre des points ?

↳ Cours.

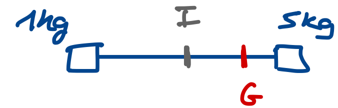
(c) Calculer les coordonnées du barycentre G et de l'isobarycentre I du triangle formé par les points $A(0;3)$, $B(1;1)$ et $C(4;0)$ affectés respectivement des poids 1, 3 et 2.

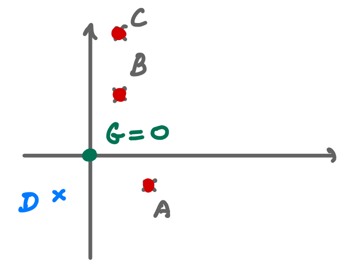
3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine ? On appellera le point D.

(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg ?

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A, et calculer l'aire du triangle ABC.





(c) $$x_G = \frac{p_A x_A + p_B x_B + p_C x_C}{p_A + p_B + p_C} = \frac{1\times 0 + 3\times 1 + 2\times 4}{1+3+2} = \frac{11}{6}$$

$$y_G = \frac{p_A y_A + p_B y_B + p_C y_C}{p_A + p_B + p_C} = \frac{1\times 3 + 3\times 1 + 2\times 0}{1+3+2} = 1$$

$$G\left(\frac{11}{6} ; 1\right)$$

Isobarycentre I : $$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0+1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3+1+0}{3} = \frac{4}{3}$$

$$I\left(\frac{5}{3} ; \frac{4}{3}\right)$$

Wanted: $D(x;y)$ (4kg) pour que $G = O$.

(1) $$x_G = 0 = \frac{1 \times x_A + 1\, x_B + 1\, x_C + 4 x_D}{7}$$

(2) $$y_G = 0 = \frac{y_A + y_B + y_C + 4 y_D}{7}$$

(1) $2 + 1 + 1 + 4x_D = 0 \Rightarrow x_D = -1$

(2) $-1 + 2 + 4 + 4y_D = 0 \Rightarrow y_D = -\frac{5}{4} = -1{,}25$

$\Rightarrow D(-1 ; -1{,}25)$

3.2 On place une masse de 1 kg en $A(2;-1)$, en $B(1;2)$ et en $C(1;4)$.

(a) Où doit-on placer une masse de 4 kg pour que le barycentre se situe à l'origine ? On appellera le point D.

(b) Où se situe le barycentre si l'on place en ce point D une masse de 2 kg ?

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A, et calculer l'aire du triangle ABC.

(b) G' nouveau barycentre

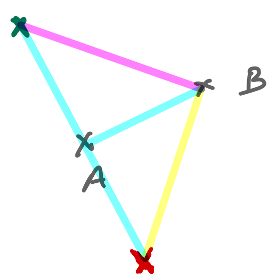
$$x_{G'} = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C + 2x_D}{5}$$

$$= \frac{2+1+1+2\times(-1)}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$y_{G'} = \frac{-1+2+4+2\times(-1{,}25)}{5} = 0{,}5$$

$G'(0{,}4\,;0{,}5)$

3.3 Soient les points $A(1;-2)$ et $B(2;0)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que le triangle ABC soit direct, isocèle et rectangle en A, et calculer l'aire du triangle ABC.



Etape :

1. $\vec{AB}$
2. $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$ et $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0$
3. $\det(\vec{AB};\vec{AC})$
4. $\vec{AC} \longrightarrow x_C$ et y_C

① $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

② $\vec{AC_1} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

③ $\det(\vec{AB};\vec{AC_1}) = \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 5 > 0$

$C = C_1 \Rightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

④ $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_C - 1\\ y_C + 2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_C = -2+1 = -1$

$\quad y_C = 1-2 = -1$

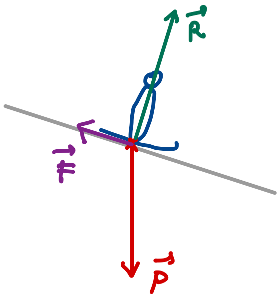
$\Rightarrow C(-1;-1)$

$\mathcal{A} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5\ u_A.$

4. Application en physique

Un skieur de masse totale $m = 90$ kg, tout équipement compris, descend une piste inclinée d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale. Sa vitesse étant constante, on choisit de modéliser l'ensemble des frottements qu'il subit par une force unique $\vec{F}$ ayant la même direction que le mouvement du skieur mais de sens opposé. On peut modéliser le skieur par un solide en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Après avoir tracé les vecteurs modélisant les différentes forces mises en jeu, déterminer leurs coordonnées et en déduire l'intensité de la force de frottement $\vec{F}$.



PFD : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$

Wanted : $\|\vec{F}\| = F$.

Etape : ① $\vec{AB}$

② $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

③ $\det(\vec{AB}; \vec{AC})$

④ $\vec{AC} \longrightarrow x_C$ et y_C

① $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\vec{AC_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

③ $\det(\vec{AB}; \vec{AC_1}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 > 0$

$C = C_1 \Rightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C + 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_C = -2 + 1 = -1 \\ y_C = 1 - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow C(-1; -1)$

$\mathcal{A} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5\ u_A.$