

Outils mathématiques 1 — TD 4 : Nombres complexes

Remarques : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1 Géométrie dans le plan

- 1.1 On considère les points M et M' de coordonnées respectives $(1 ; \sqrt{3})$ et $(1 ; -\sqrt{3})$:
- (a) déterminer leurs affixes z et z' sous forme algébrique.
 - (b) donner les expressions exponentielles de z et z' .
 - (c) Que constituent z et z' l'un pour l'autre ?
- 1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes z telles que :
- (a) $\operatorname{Re}(z) = -2$; (b) $\operatorname{Im}(z) = 1$; (c) $|z| = 4$; (d) $|z| = -3$; (e) $\arg(z) = \pi/4$;
 - (f) $z \cdot \bar{z} = 4$; (g) $z + \bar{z} = -4$; (h) $z - \bar{z} = 8i$; (i) $z = \bar{z}$.
- 1.3 Déterminer graphiquement (donc, sans utiliser la calculatrice) le module et l'argument des nombres suivants, et donner leurs expressions exponentielles :
- $$z_1 = 1 ; z_2 = i ; z_3 = -i ; z_4 = 1 + i ; z_5 = -1 - i ; z_6 = -1 + i ;$$
- $$z_7 = \frac{+1 - i\sqrt{3}}{2} ; z_8 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$
- 1.4 Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = 2 + 2i$, $z_B = -1 + 3i$, et $z_C = 4 + 6i$, et soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:
- (a) calculer les affixes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$;
 - (b) à partir de ces affixes, calculer la valeur de l'angle $\theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.
- 1.5 Soient A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 6i$.
- (a) Donner l'affixe de $\overrightarrow{AC}$ sous forme exponentielle et déterminer la distance AC .
 - (b) Déterminer l'affixe z du point M tel que $3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$.
- 1.6 Soit $\vec{u}$ d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe iz :
- (a) que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
 - (b) Plus généralement, que dire de $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\theta}z$?

2 Techniques de calcul

- 2.1 Calculer les nombres complexes suivants, et exprimer les résultats obtenus sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1 - 2i)^2 - (2 + i)^2 ; z_2 = \frac{1 + 3i}{1 + 2i} ; z_3 = i(3 + 4i) - (1 - 3i)(3 - i)$$

- 2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(1) z^2 = -9 ; (2) z^2 + 3z + 4 = 0 ; (3) z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$$
$$(4) z + 2i = iz - 1 ; (5) 2z + i = \bar{z} + 1 ;$$
$$(6) z^4 = 1 ; (7) z^3 = -1 ; (8) z^4 = -16 ; (9) z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$$

- 2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

$$(a) z_1 = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6 ; (b) z_2 = (5 + 3i)^7 ; (c) z_3 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} ; (d) z_4 = \frac{(1 - i)^2}{(\sqrt{3} + i)^3} ; (e) z_5 = \frac{4 + 6i}{1 - 5i}$$

3 Trigonométrie

- 3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$, déterminer les valeurs **exactes** de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.
- 3.2 À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

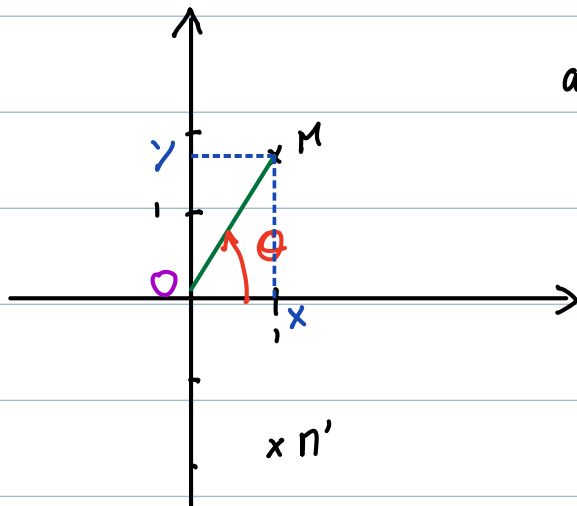
1 Géométrie dans le plan

1.1 On considère les points M et M' de coordonnées respectives $(1; \sqrt{3})$ et $(1; -\sqrt{3})$:

- (a) déterminer leurs affixes z et z' sous forme algébrique.
- (b) donner les expressions exponentielles de z et z' .
- (c) Que constituent z et z' l'un pour l'autre?

Ex 1:

1.1 Soient les points:



a) $\vec{ON}$: $z = 1 + j\sqrt{3}$; $\vec{ON}'$: $z' = 1 - j\sqrt{3}$
 $\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$; $\begin{cases} a' = x' \\ b' = y' \end{cases}$ $z = x + jy$

b) Expressions trigonométriques.

$z = r (\cos \theta + j \sin \theta)$
(distance ON) angle / (Ox)

$$r = |ON| = \sqrt{3^2 + 1^2} = 2$$

On cherche θ ? $\tan(\theta) = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

Par conséquent: $z = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$

$z' = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = \text{span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"> $2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = z'$$

lien avec les polaires: $(r; \theta)$
distance angle

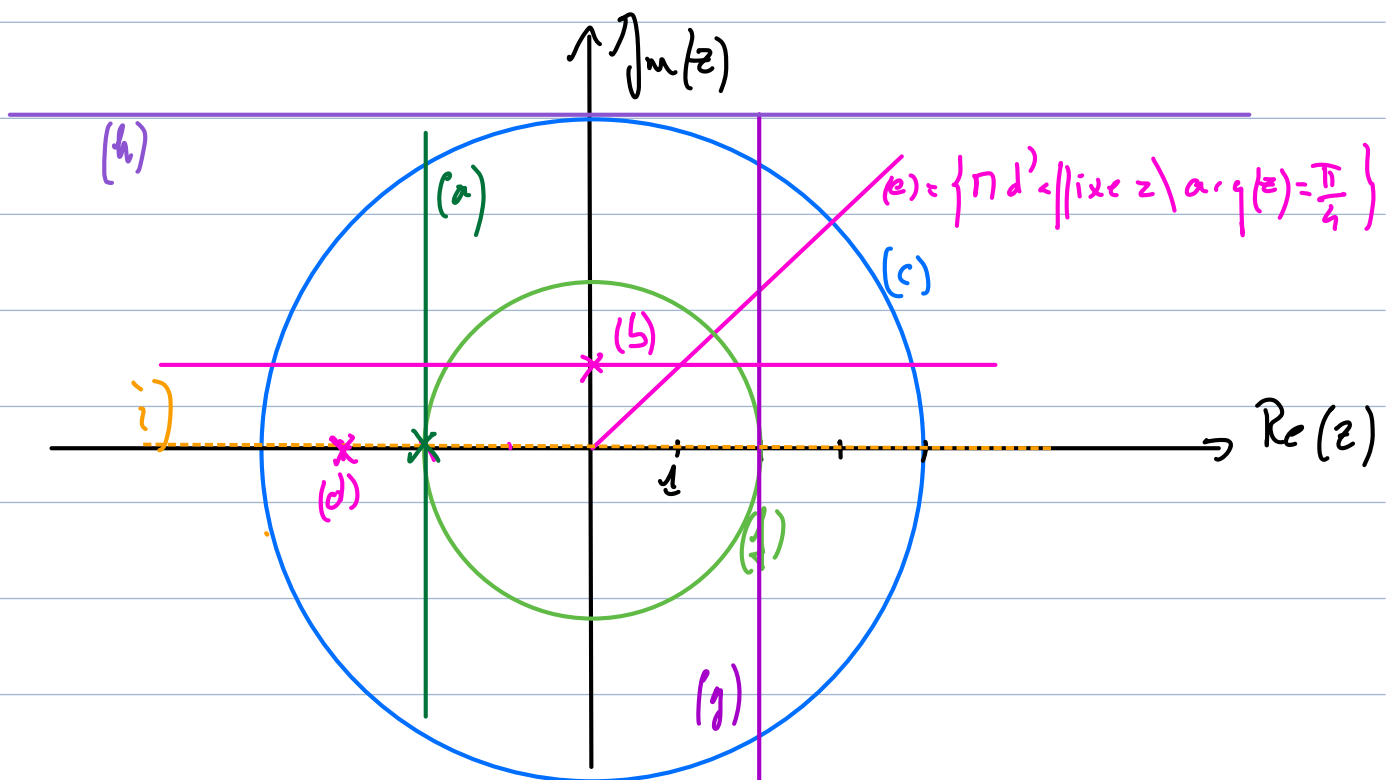
Donc: expressions exponentielles: $z = r \exp(j\theta) = r e^{j\theta}$

Avec $z = 2 e^{j\frac{\pi}{3}}$ et $z' = 2 e^{-j\frac{\pi}{3}}$

c) z et z' sont complexes conjugués i.e. ils sont symétriques par rapport (Ox).

1.2 Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé l'ensemble des points d'affixes z telles que :

- (a) $\operatorname{Re}(z) = -2$; (b) $\operatorname{Im}(z) = 1$; (c) $|z| = 4$; (d) $|z| = -3$; (e) $\arg(z) = \pi/4$;
 (f) $z \cdot \bar{z} = 4$; (g) $z + \bar{z} = -4$; (h) $z - \bar{z} = 8i$; (i) $z = \bar{z}$.



c) Si $z = a + ib$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $|z| = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 16$
 $\Rightarrow$ cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 4.

d) $z = -3 = 3 \cdot -1 = 3e^{i\pi} \rightarrow |z| = 3$
 $\searrow \operatorname{Arg}(z) = \pi$

f) $z \bar{z} = 4 \Rightarrow (a + ib)(a - ib) = (a^2 - b^2) = 4 = |z|^2$ car $z \bar{z} = |z|^2$
 $\Rightarrow$ cercle centre O et de rayon 2.

$$g) z + \bar{z} = 4 \Leftrightarrow (a+ib) + (a-ib) = 2a = 4 \Rightarrow a=2 \forall b \in \mathbb{R}.$$

$$h) z - \bar{z} = 8i \Leftrightarrow (a+ib) - (a-ib) = 2ib = 8i \Leftrightarrow 2b = 8 \Rightarrow b=4 \forall a \in \mathbb{R}$$

$$i) z = \bar{z} \Leftrightarrow a+ib = a-ib \Leftrightarrow b=0 \forall a \in \mathbb{R}$$

1.3 Déterminer graphiquement (donc, sans utiliser la calculatrice) le module et l'argument des nombres suivants, et donner leurs expressions exponentielles :

$$z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = -i; z_4 = 1+i; z_5 = -1-i; z_6 = -1+i;$$

$$z_7 = \frac{+1-i\sqrt{3}}{2}; z_8 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\cdot z_1: \begin{cases} |z_1|=1 \\ \theta_1 = 0[2\pi] \end{cases}; z_1 = 1$$

$$\cdot z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\cdot z_3 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\cdot z_4 = 1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\cdot z_5 = -1-i = \sqrt{2} e^{5i\frac{\pi}{4}}$$

$$\cdot z_6 = -1+i = \sqrt{2} e^{3i\frac{\pi}{4}}$$

$$\cdot z_7 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\cdot z_8 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

1.4 Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = 2 + 2i$, $z_B = -1 + 3i$, et $z_C = 4 + 6i$, et soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

- (a) calculer les affixes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$;
 (b) à partir de ces affixes, calculer la valeur de l'angle $\theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$.

$$a) \quad z_A = 2 + 2i, \quad z_B = -1 + 3i \Rightarrow z_{\vec{u}} = z_B - z_A = (-1 + 3i) - (2 + 2i) = -3 + i$$

De même $z_{\vec{v}} = 2 + 4i$

$$b) \quad \theta = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \arg(z_{\vec{u}}) - \arg(z_{\vec{v}}) = 1,71 (= 98^\circ) = \theta$$

car $\arg(z_{\vec{u}}) = \arctan\left(\frac{-1}{3}\right) + \pi = 2,82 (= 162^\circ)$
 $\arg(z_{\vec{v}}) = \arctan(2) = 1,11 (= 63^\circ)$

1.5 Soient A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 6i$.

- (a) Donner l'affixe de $\overrightarrow{AC}$ sous forme exponentielle et déterminer la distance AC .
 (b) Déterminer l'affixe z du point M tel que $3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$.

$$a) \quad z_{\overrightarrow{AC}} = (-1 + 6i) - (-3 + 2i) = 2 + 4i \quad \left\{ \begin{array}{l} |z_{AC}| = \sqrt{20} \\ \theta = 1,11 \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{20} e^{i1,11} = \sqrt{20} e^{i63^\circ} ; \quad \overrightarrow{AC} = |z_{AC}| = \sqrt{20}$$

$$b) \quad M = a + ib ; \quad z_{\overrightarrow{MB}} = (1 - a) - i(b + 2) ; \quad z_{\overrightarrow{MA}} = -(a + 3) + i(2 - b)$$

Donc $3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = 3 - 3a - 3i(b + 2) + (a + 3) - i(2 - b)$
 $= -2a + 6 + i(-3b - 6 - 2 + b)$
 $= -2a + 6 - i(2b + 8) = z_{\overrightarrow{AC}} = 2 + 4i$

Identification : $-2a + 6 = 2 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$
 $-2b - 8 = 4 \Rightarrow -2b = 12 \Rightarrow \boxed{b = -6}$

À final : $z_n = 2 - 6i$

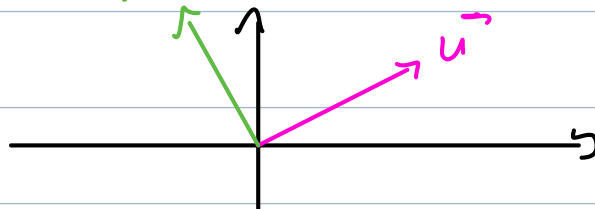
② Autre méthode : $3\vec{nB} - \vec{nA} = \vec{AC} \Leftrightarrow 3(z_B - z_n) - (z_A - z_n) = z_C - z_A$
 $\Rightarrow 2z_n + 3z_B - z_C = 0 \Rightarrow z_n = \frac{1}{2}(z_C - 3z_B)$
 $\Rightarrow z_n = 2 - 6i$

1.6 Soit $\vec{u}$ d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe iz :

(a) que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

(b) Plus généralement, que dire de $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\theta}z$?

(a) $z' = iz = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$ donc $\vec{v}$ est $\perp$ à $\vec{u}$ (rotation $+\frac{\pi}{2}$)



b) $\vec{w}$ est un vecteur qui a le même module que $\vec{u}$ mais son argument α subit une rotation de θ .

2 Techniques de calcul

2.1 Calculer les nombres complexes suivants en donnant les résultats sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$z_1 = (1 - 2i)^2 - (2 + i)^2 ; z_2 = \frac{1 + 3i}{1 + 2i} ; z_3 = i(3 + 4i) - (1 - 3i)(3 - i)$$

$z_1 = (1 - 2i)^2 - (2 + i)^2 = -(3 + 4i) - (3 + 4i) = -6 - 8i = z_1 = 10e^{i(4,07)}$

Rq : $(a + bi)^2 = a^2 + b^2 + 2abi$

$$z_2 = \frac{1+3i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(1+3i)(1-2i)}{1-(2i)^2} = \frac{1+i}{5} = z_2 = \sqrt{2} e^{i(0.44)}$$

Rq: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$z_3 = i(3+4i) - (1-3i)(3-i) = 3i-4 - (3-i-9i-3) \\ = 3i-4 + 10i = 13i-4 = z_3 = \sqrt{195} e^{1.87i}$$

2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 = -9$; (b) $z^2 + 3z + 4 = 0$; (c) $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

(d) $z^4 = 1$; (e) $z^3 = -1$; (f) $z^4 = -16$; (g) $z^3 = 2\sqrt{3} - 2i$

(a) $z^2 = -9 = 9i^2 \Rightarrow \sqrt{|A|} = \pm 3i$ - donne $z_1 = 3i$ et $z_2 = -3i$

(b) $z^2 + 3z + 4 = 0$; $\Delta = -7$ donne $z_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$; $z_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$

(c) $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$; $\Delta = -8$ donne $z_1 = -\sqrt{3} - i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$

(d) $z^4 = 1 = e^{0i} [2\pi] \Rightarrow z = 1^{\frac{1}{4}} e^{\frac{0i/2\pi}{4}}$ On sort 4 solutions

$z_1 = 1 \cdot e^0 = 1 = z_1$; $z_2 = 1 \cdot e^{\frac{2i\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = z_2$;

$z_3 = e^{\frac{4i\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1 = z_3$; $z_4 = e^{\frac{6i\pi}{4}} = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i = z_4$

2.3 Calculer les nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$; (b) $z_2 = (5+3i)^7$; (c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; (d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$; (e) $z_5 = \frac{4+6i}{1-5i}$

a) $z_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = e^{-i2\pi} = 1 = z_1$

b) $z_2 = (5+3i)^7$; $|z_2| = (25+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{34}$; $\theta_2 = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 0,54 \text{ rad} \approx 31^\circ$
 $= \left(\sqrt{34} e^{i0,54}\right)^7 = 34^{\frac{7}{2}} e^{i3,78} = z_2$

c) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{4} + i\frac{(\sqrt{3}+1)}{4}$

d) $z_4 = \frac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$ avec $1-i = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Rightarrow z_4 = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\left(2 e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3} = \frac{2 e^{-i\frac{\pi}{2}}}{8 e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} = z_4$

e) $z_5 = \frac{4+6i}{1-5i} = \sqrt{2} e^{3i\frac{\pi}{4}}$

3 Trigonométrie

3.1 À l'aide des formes exponentielles des nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$, déterminer les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.

3.2 À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

3.1 : $z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z' = 1 + i = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

or : $\arg(z z') = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ Calculons alors $z z'$ et $\frac{z'}{z}$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

$z z' = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$

$$= (\sqrt{3} + i)(1 + i) = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

Ainsi : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\frac{z'}{z} = \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 + i)(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{(\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)}{4}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

Ainsi : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{4} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{4} \right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

3.2. Prouve : $(e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

si $n=2$: $(e^{i\theta})^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2$
 $= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i\sin(\theta)\cos(\theta)$

identification

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$$