

# Maths TD3: Calcul Matriciel.

## Outils mathématiques 3 — TD 2 : Systèmes linéaires et calcul matriciel

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD)

1. Résoudre par substitution et par la formule de Cramer l'ensemble des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}; \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Cramer :  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{11}$$

$$\bullet (S) = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad x = y = z = 0$$

$$\bullet (S) = \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{3 \cdot 1 + 0 - 6}{-1} = +3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot -1 + 1 \cdot -7}{-1} = +2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{6 + 0 + 3 \cdot -2}{-1} = 0$$

$$S = \{3; 2; 0\}$$

2. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer  $5A$ ;  $8D$ ;  $(1/2)B$ ;  $3A - 2B$ ;  $2A - 4B$ ;  $BC$ ,  $BD$ ,  $DB$ .

$$\bullet 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}; 8D = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 16 & -8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet 3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; 2A - 4B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}; BC = \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} ; D B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Effectuer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1/2 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1/2 & 1/5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 179 \\ 13 \end{pmatrix}$$

4. Soit la matrice carrée :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Calculer  $A^{-1}$ , la matrice inverse de  $A$ .

(b) Utiliser le résultat précédent pour résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y = -8 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} ; A^{-1} = \frac{{}^t C_0(A)}{\det A} ; \text{Commençons par calculer}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 ; C_0(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t C_0(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Résolution des systèmes:

$$(S_1): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = +\frac{3}{5} \end{cases}$$

5. (a) Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Ces matrices sont-elles inversibles ?

(c) Calculer  $B^{-1}$  la matrice inverse de  $B$ .

a)  $\det(A) = 18$ ;  $\det(B) = 0 + 0 + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -8$

b)  $A$  et  $B$  sont inversibles car leurs déterminants sont non-nuls.

c)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $\det(A) = 18$ ;  $\text{co}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $\det(B) = 0 + 0 + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -8$

$$\text{co}(B) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 2 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Inverser la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$\det C = 26 \neq 0$ ;  $C$  est inversible alors

$$C^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -48 & 8 & 6 \\ 42 & -7 & -2 \\ 32 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

7. À quelle(s) condition(s) la matrice  $D(m) = \begin{pmatrix} m & 2 & 5 \\ 0 & 6 & m \\ m & 3 & 3 \end{pmatrix}$  est-elle inversible?

$D(m)$  est inversible si son déterminant est non nul. Or

$$\begin{aligned} \det(D(m)) &= m(18 - 3m) + m(2m - 30) = -m^2 - 12m \\ &= -m(m + 12). \end{aligned}$$

$D(m)$  est inversible si  $m \neq 0$  ou si  $m \neq -12$

8. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

(b) Calculer  $P(A)$  où  $P$  est le polynôme  $P(X) = 5X^2 + 6X + 3$ .

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $P(A) = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 21 \\ 0 & 14 & 16 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

9. On donne  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $X^t X$  et  ${}^t X X$ .

$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  ;  $X \cdot {}^t X = 14$  ;  ${}^t X \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

10. Soit le système de paramètres  $m$  et  $n$  : 
$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ 4y + mz = 2 \\ my + z = n \end{cases} \quad (S)$$

À quelle(s) condition(s) ce système n'admet-il aucune solution ?

(S) :  $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 4 & m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$ .

(S) n'admet pas de solution (ou une infinité de solutions)  
si A n'est pas inversible, c-à-d si  $\det A = 0$ .

$$\text{Or } \det(A) = 4 - m^2 = 0 \text{ si } m = \pm 2.$$

Si  $m = +2$  alors (S) :

$$\begin{cases} (1) & m + 2y + z = 1 \\ (2) & 4y + 2z = 2 \\ (3) & 2y + z = n \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } n = 1 \\ \text{alors ces 2 eqts} \\ \text{sont identiques.} \end{array}$$

Rq : Si  $n = 1$  alors (1) et (3) impose  $x = 0$  et  $2y + z = 1$   $\Rightarrow$  infinité de solutions ;  $\Rightarrow$  infinité de solutions.

Si  $m = -2$  alors  $n = -1 \Rightarrow$  (S) infinité de solutions.

Au final (S) admet une infinité de solutions si :

$$m = +2 \text{ et } n = 1$$

$$m = -2 \text{ et } n = -1$$

et si

$$m = +2 (\text{ou } -2) \text{ et } n \neq 1 (-1) \Rightarrow \text{pas de solutions}$$

11) Voir Cours.

similitude = homothétie - Rotation.

12. En utilisant les matrices :

- (a) déterminer  $A'$ , l'image du point  $A(1;3)$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $30^\circ$  suivie de la symétrie d'axe  $(Ox)$ ;
- (b) déterminer  $A''$ , l'image du point  $A(1;3)$  par la symétrie d'axe  $(Ox)$  suivie de la rotation de centre  $O$  et d'angle  $30^\circ$ ;
- (c) déterminer  $B'$ , l'image du point  $B(2;1)$  par la similitude de centre  $O$ , de rapport 2 et d'angle  $60^\circ$ .

a). Rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$  :  $R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

. Symétrie d'axe  $(Ox)$  :  $\Sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

. Point  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} A'$  avec :

$$T = \Sigma_x R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ alors } A' = T \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A' \approx \begin{pmatrix} -0,6 \\ -3,1 \end{pmatrix}$$

b) Symétrie d'axe  $(Ox)$  suivie d'une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T'} A'' \text{ avec } T' = R \Sigma_x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A'' = T' A = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -2,1 \end{pmatrix} = A''$$

$$A'' = \left( \frac{\sqrt{3}+3}{2} ; \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \right)$$

c) Similitude de centre  $O$ ; angle  $\frac{\pi}{3}$  et rapport 2:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } B \xrightarrow{S} B' = S B = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 \\ 4,47 \end{pmatrix} = B'$$

13. On considère la transformation associée à la matrice  $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $M$  est associée à une projection.
- (b) Déterminer la droite sur laquelle la projection est faite.
- (c) En se rappelant que la droite d'équation  $y = mx + p$  admet comme vecteur normal  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ , montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale.
- (d) La matrice  $M$  est-elle inversible? Cela vous paraît-il cohérent avec la transformation géométrique considérée?

Soit  $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a)  $M$  est une projection si  $M^n = M$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{or } M^2 = M M = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = M$$

Par récurrence:  $M^3 = M^2 M = M M = M^2 = M$   
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = M \cdot M^{n-1} = M^2 \cdot M^{n-2}$   
 $= M M^{n-2} = M^2 M^{n-3} = \dots$   
 $= \dots = M M = M^2 = M$

$\Rightarrow M$  est une projection.

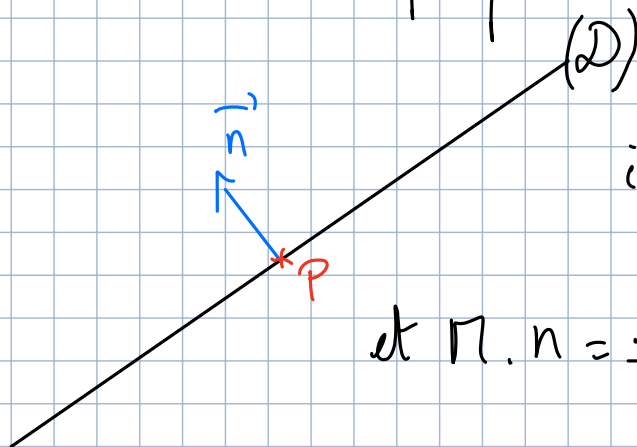
b) On cherche la droite qui, projetée, ne change pas

$$\Rightarrow MX = X \Leftrightarrow (M - I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

c)  $y = mx + p$  admet comme vecteur normal  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$   
 Si l'application linéaire est une projection orthogonale alors la projection de  $\vec{n}$  sur  $(D)$  vaut 0.



ici  $y = 2x \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

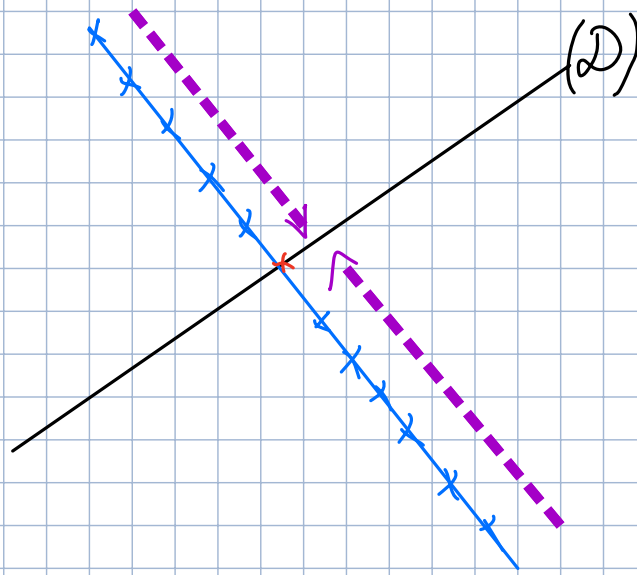
et  $M \cdot n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$  la projection est orthogonale

d)  $\Pi$  est inversible ssi  $\det \Pi \neq 0$  :

$$\det \Pi = \frac{1}{5} (4-4) = 0 \Rightarrow \Pi \text{ n'est pas inversible.}$$

logique : une projection orthogonale possède une infinité d'antécédants pour le même projeté.



Légende :

---- = projection orthogonale

x = antécédants

x = projeté