

Outils mathématiques 1 — TD 5 : Branches infinies

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

- (a) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \rightarrow +\infty$, et étudier la position de C par rapport à D quand $x \rightarrow +\infty$;
- (b) puis déterminer l'équation de l'asymptote à C en $-\infty$.

2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2 - 5x + 3} \quad f_2(x) = \frac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1} \quad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \quad f_4(x) = \frac{x^2 + x \ln(x)}{x + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 2} \quad f_6(x) = 2x - \cos x \quad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \quad f_8(x) = \frac{x \ln(x)}{1 - x}$$

3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

$$(a) f(x) = x + \frac{1}{x-1}; I =]-\infty; 1[\quad (b) f(x) = \frac{\cos(x)}{x}; I =]0; +\infty[$$

$$(c) f(x) = -2x^3 - 5x + 7; I =]-\infty; 2[\quad (d) f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right); I =]1; +\infty[$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{\sin x}; I =]0; \pi[\quad (f) f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - x}; I =]1; +\infty[$$

$$(g) f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}; I =]4; +\infty[\quad (h) f(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x}; I =]1; +\infty[$$

4. Soient les fonctions $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

- (a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;
- (b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.
- (c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \rightarrow 0$?

5. La fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro?

1. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

- (a) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de f quand $x \rightarrow +\infty$, et étudier la position de C par rapport à D quand $x \rightarrow +\infty$;
 (b) puis déterminer l'équation de l'asymptote à C en $-\infty$.

$$(a) \quad y = 2x \text{ est asymptote à } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y(x) = 0$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = F.I$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$= 0$. La limite tend vers zéro ; tout en restant négative $\Rightarrow C$ est au dessous de D et $y = 2x$ est asymptote à C lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$b) \text{ lorsque } x \rightarrow -\infty: \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = +\infty$$

$\Rightarrow y = 2x$ n'est pas asymptote à C qd $x \rightarrow -\infty$

On cherche $y = ax + b$ telle que $f(x) - (ax + b) = 0$. Mais on remarque que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est asymptote horizontale à C lorsque $x \rightarrow -\infty$

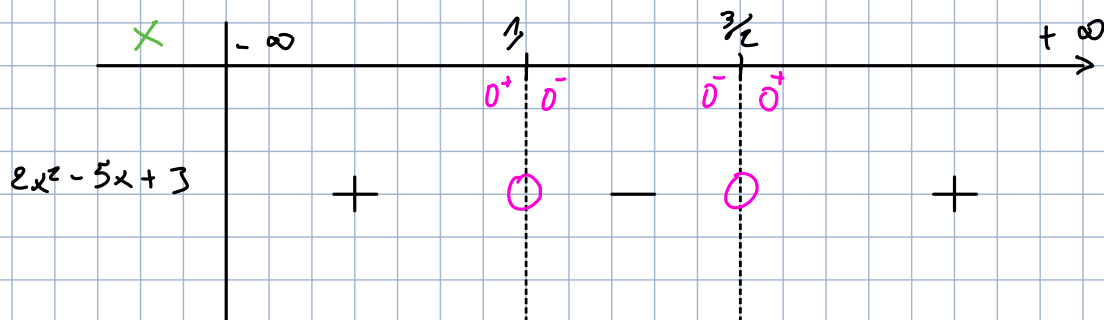
2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2}{2x^2 - 5x + 3} \quad f_2(x) = \frac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1} \quad f_3(x) = x - \sqrt{2x} \quad f_4(x) = \frac{x^2 + x \ln(x)}{x + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 2} \quad f_6(x) = 2x - \cos x \quad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \quad f_8(x) = \frac{x \ln(x)}{1 - x}$$

Branches infinies: Soit $\Pi(x) \in \mathbb{R}$; alors f admet une branche infinie si $\overline{\Pi} \rightarrow \pm\infty \neq x \rightarrow x_0$ ou $x \rightarrow \pm\infty$.

$f_1(x) = \frac{e}{2x^2 - 5x + 3}$; $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$
 $\hookrightarrow$ A.V. en $x \rightarrow 1$ ou $x \rightarrow \frac{3}{2}$



$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm \infty \Rightarrow x = 1$ est A.V. à $f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^\pm} f(x) = \pm \infty \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ est A.V. à $f(x)$

voir tableau de signe

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ est A.H à f lorsque $x \rightarrow \pm \infty$.

$f_2(x) = \frac{x^3 + x + 7}{2x^2 + 1}$; $D_{f_2} = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = +\infty$; il faut étudier $\frac{f_2(x)}{x}$

$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \leadsto \exists$ un A.O

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

$\hookrightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{2}x}{2x^2} = 0 = b$

$\hookrightarrow y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique qd $x \rightarrow +\infty$

$$f_3(x) = x - \sqrt{2x} ; D_f = \mathbb{R}_+^+$$

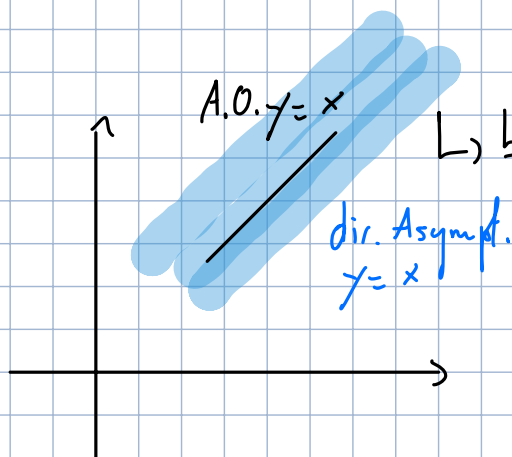
$$\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = 0 \Rightarrow \text{pas d'asymptote.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})}{x + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x + \sqrt{2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{1 + \sqrt{\frac{2}{x}}} = +\infty ; \text{il faut étudier } \frac{f_3(x)}{x}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{2}{x}} = 1$$

$$\hookrightarrow \exists \text{ un A.O. } y = x + b.$$



$$\hookrightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{2x} = -\infty$$

$f_3(x)$ admet une direction asymptotique d'équation $y = x$ qd $x \rightarrow +\infty$.

$$f_4(x) = \frac{x^2 + x \ln x}{x + 1} ; D_f = \mathbb{R}_+^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ pas d'asymptote}$$

Rappel: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x)) = +\infty; \text{ il faut étudier } \frac{f(x)}{x}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \ln x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x+1} = 1 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0)$$

$\Leftrightarrow y = x + 1$ est direction asymptotique

$$\hookrightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \ln x - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\ln x - x)}{x+1}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

$$\Rightarrow b = +\infty$$

Au final $y = x$ est direction asympt. à f qd $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 2}; \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln(2)^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = \ln 2 \text{ est asymptote verticale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x} \cdot \frac{1 + 2e^{-2x}}{1 - 2e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \text{Branche parabolique } (0_+).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ est asymptote horizontale qd } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) = 2x - \cos(x); \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\cos(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$\rightarrow f$ est bornée $\rightarrow 0$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{\cos(x)}{x} = 2; \quad y = 2x + b \text{ est direct asympt.}$$

$$L \rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (-\cos x) \in [-1; +1]$$

$\hookrightarrow y = 2x$ est direction asymptotique.

$$f_7(x) = 2^x - e^x; \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

a) On va utiliser le théorème des croissances comparées pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_7(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x \ln 2} - e^x)$$

$$\text{or } \ln(2) < \ln(e) = 1, \Leftrightarrow e^{x \ln(2)} < e^x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_7(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = -\infty$$

$$L \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_7(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{x} = -\infty \Rightarrow \text{Branche parabolique } (O_y)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f_7(x) = 0; ("^-")$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_7(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ est asymptote horizontale } x \rightarrow -\infty$$

$$f_8(x) = \frac{x \ln(x)}{1-x}; \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_8(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + 1}{-1} = -1 \text{ (Théorème de l'Hospital)}$$

$\hookrightarrow$ pas d'asymptote.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_8(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \Rightarrow \text{pas d'asymptote}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_8(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty$$

$$L \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_8(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \text{Branche parabolique } (O_x).$$

3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$; $I =]-\infty ; 1[$ (b) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty ; 2[$ (d) $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$; $I =]1 ; +\infty[$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; $I =]0 ; \pi[$ (f) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1 ; +\infty[$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4 ; +\infty[$ (h) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1 ; +\infty[$

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ sur $I =]-\infty ; 1[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2 - x} \right) = \boxed{1 = m}$

$p = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = \boxed{0 = p}$

$\Rightarrow y = x$ est A.O à $f(x)$ qd $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = "1 - \infty" = -\infty \Rightarrow x = 1$ est A.V

b) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ sur $I =]0 ; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = " \frac{1}{0^+} " = +\infty$; $x = 0$ est A.V.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ est A.H

fonction bornée $\in [-1; 1]$

c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty ; 2[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$ (terme de + haut degré).

$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x} = -\infty \Rightarrow$ Branche parabolique (O_y)

$$\cdot \lim_{2^-} f(x) = -16 - 10 + 7 = -19$$

$$d) f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right); \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{1^+} x = 1$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \boxed{1 = m}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \boxed{0 = p}$$

$\Rightarrow y = x$ est A.O. à $f(x)$ qd $x \rightarrow +\infty$

$$e) f(x) = \frac{1}{\sin(x)}; I =]0; \pi[$$

$$\cdot \lim_{0^+} \sin(x) = 0^+; \lim_{\pi^-} \sin(x) = 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{0^+} f(x) = +\infty = \lim_{\pi^-} f(x) \Rightarrow x = 0 \text{ et } x = \pi \text{ sont A.V à } f(x)$$

$$f) g(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - x}; I =]1; +\infty[$$

$$\cdot \lim_{1^+} g(x) = \frac{e^1 - 2}{e^1 - 1} \approx 0.4$$

$\hookrightarrow$ pas de B.P

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \boxed{1 = m}$$

$\Rightarrow y = 1$ est A.H qd $x \rightarrow +\infty$

• g) $f_7(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4; +\infty[$

• "4" est racine de $P(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow \lim_{4^+} P(x) = 0^+$

$$\Rightarrow \lim_{4^+} f_7(x) = \frac{0}{0} = \lim_{4^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - 5} = \frac{1}{12}$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_7(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = 0$ (termes de + haut degré).

$\Rightarrow y = 0$ est A.H qd $x \rightarrow +\infty$

h) $f_9(x) = \frac{1-x^3}{1-x}$; $I =]1; +\infty[$

Hospital.

• $\lim_{1^+} (1-x^3) = 0^+ = \lim_{1^+} (1-x) \Rightarrow \lim_{1^+} f_9(x) = \frac{0}{0} = \lim_{1^+} \frac{-3x^2}{-1} = 3$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_9(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f_9(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$; BP (0_y)

4. Soient les fonctions $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

(a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;

(b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.

(c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \rightarrow 0$?

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathcal{D}_g$.

(b) Branches infinies:

f est bornée $\in [-1; +1]$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ est A.H lorsque $x \rightarrow \pm \infty$.

$$\lim_{0^+} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{0^+} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{x^2} = 0 \quad (\text{théorème d'encadrement})$$

$$\lim_{0} g(x) = \frac{0}{0} = \lim_{0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

c) Non car $\overline{0n} \not\rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow 0$, $\forall n \in \mathbb{R}$.

5. La fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro?

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \begin{cases} \frac{-|x|}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{+|x|}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{0^+} f(x) = +1$$

$\Rightarrow f$ n'admet pas de limite en zéro