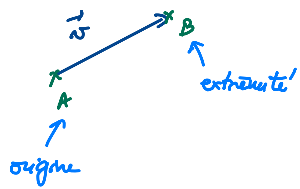
Chapitre 1 : Géométrie dans le plan

1.1 . Vecteurs

Caractérisés par : * une norme (positive) ou intensité

* direction (axe)
* sens

$\vec{v} = \vec{AB}$



$\vec{AB}$ est un représentant de $\vec{v}$.

$\vec{v}$: * direction $(\vec{AB})$
* sens de A vers B
* norme $\|\vec{v}\| = v > 0$

* $\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \vec{u} = k\vec{v} \quad k \in \mathbb{R}^*$

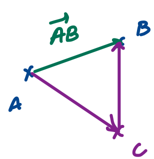
colinéaires

$\|\vec{u}\| = k\|\vec{v}\|$
mêmes directions
! sens (signe de k).

$\exists k \in \mathbb{R}^* \,/\, \vec{u} = k\vec{u}$

il existe au moins un

* Chasles :



$\pi)$

Pour tout / Quel que soit

$\forall C \in \pi$
$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

Inégalité triangulaire $\|\vec{AB}\| \leq \|\vec{AC}\| + \|\vec{CB}\|$

* Linéarité : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $m \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{R}^*$

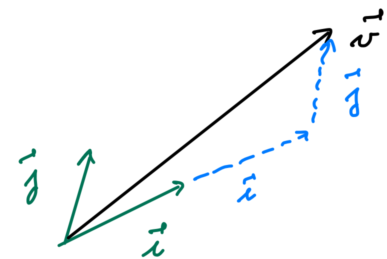
$\rightarrow m(p\vec{u}) = p(m\vec{u}) = mp\vec{u}$

$\rightarrow m(\vec{u} + \vec{v}) = m\vec{u} + m\vec{v}$

$\rightarrow (m+p)(\vec{u} + \vec{v}) = m\vec{u} + m\vec{v} + p\vec{u} + p\vec{v}$

1.2. Coordonnées

* Base dans le plan : $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.



$\vec{v} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$

$(\vec{i};\vec{j})$ permet décrire de façon unique $\vec{v}$

$\forall \vec{v} \in \pi \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad \exists! y \in \mathbb{R} \;/\; \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

unique

tel que

$\to \quad \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x;y) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

⚠ dépend de la base

x et y : coordonnés ou composantes de $\vec{v}$.

* Bases particulières

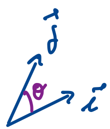
①

$\vec{i} \perp \vec{j}$ mais $\|\vec{i}\| \neq \|\vec{j}\|$

orthogonal

Base orthogonale

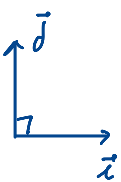
②



$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$ $\quad \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$

Base normée.

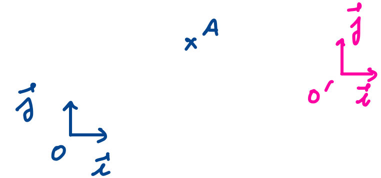
③



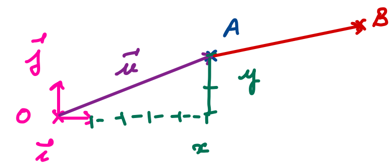
$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ Base orthonormée.

$\vec{i} \perp \vec{j}$

* Repère : permet de localiser les points



Wanted : base + origine



$\vec{u} = \vec{OA}$

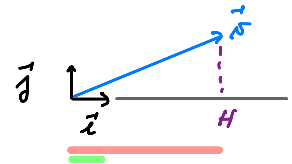
A a les coordonnées de $\vec{OA}$

$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$

À partir de maintenant : repère orthonormé.

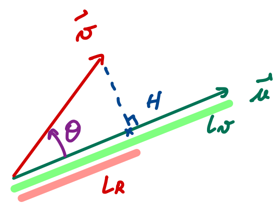
1.3. Produit scalaire



$\vec{v}\cdot\vec{i} = x \qquad \vec{v}\cdot\vec{j} = y$

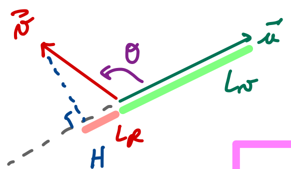
$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$s = L_R \cdot L_v = x \times 1$.



On peut aussi projeter $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

$s = L_v \cdot L_R \qquad L_R = \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$



$s = -L_v \times L_R \; (-L_R) = \|\vec{v}\| \cos\theta$

$$\boxed{s = \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta}$$

avec $\theta = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Faisons : $\vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{v};\vec{u}}) = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\| \cos(-\theta)$

$= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = s$.

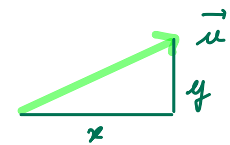
→ Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

<u>Question</u> : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{u} \neq \vec{0}$

$\vec{u} \perp \vec{v} \quad (\theta = 90°)$

→ Permet de tester l'orthogonalité des vecteurs.

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u^2 \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2}$

Lien avec les coordonnées

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$

Preuve : $(\vec{u}+\vec{v})^2 = u^2 + v^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

$$(x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2\vec{u}\vec{v}$$

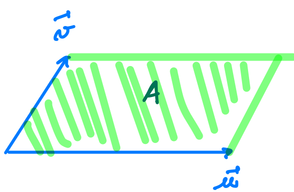
$$\cancel{x^2} + \cancel{x'^2} + 2xx' + \cancel{y^2} + \cancel{y'^2} + 2yy' = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x'^2} + \cancel{y'^2} + 2\vec{u}\vec{v}$$

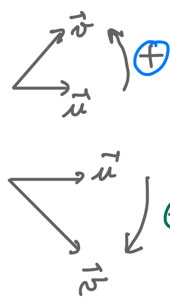
$$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

1.4. Déterminant 2D

$\vec{u} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{v} \neq \vec{0}$

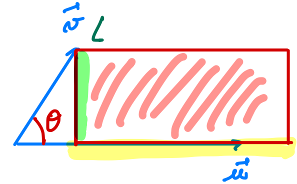
surface engendrée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.





$\oplus$ Direct

$\ominus$ indirect inverse



$\|\vec{u}\| = u$

$A = L.u = u.v.\sin\theta.$

$L = v \sin\theta$

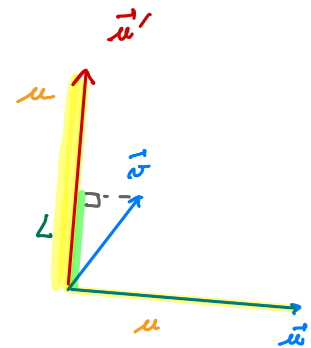
$$\boxed{\det(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\theta} \quad \text{avec} \quad \theta = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})$$

Propriétés : $\det(\vec{v};\vec{u}) = -\det(\vec{u};\vec{v})$

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0 \iff \vec{u} \,/\!/\, \vec{v}$$

$\rightarrow$ Tester la colinéarité.

* Lien avec les coordonnées



$A = L.u$

$= \vec{u}'.\vec{v}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

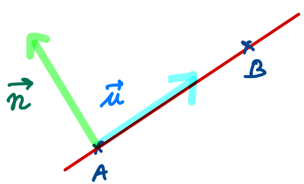
$\vec{u}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{u}' = \vec{u}'\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= -x'y + xy'.$$

$$\Rightarrow \quad \det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \\ \vec{u} \quad\quad \vec{v} \end{array} = xy' - yx'$$

1.5. Droites du plan



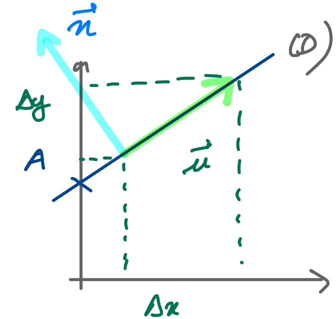
(AB) est définie par :

* deux points A et B
* un point et un vecteur directeur $\vec{u}$ (ou tout colinéaire à $\vec{u}$)
* un point et un vecteur normal $\vec{n}$ (ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$)

Equations de droite :

* Forme usuelle réduite : $y = mx + p$ (p : ordonnée à l'origine)

$$\boxed{\vec{u} = (1;m)}$$



$A(0;p)$ $\quad \vec{u} = (\Delta x;\Delta y)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y = m\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \vec{u} = (\Delta x;\, m\Delta x) = \Delta x(1;m)$$

Je cherche $\vec{n}$ normal à (D) : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{n} = (-m;1)}$$

* Forme canonique : $ax + by + c = 0$. pas unique

$$by = -ax - c \Rightarrow y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x - \frac{c}{b}$$

$$\vec{u}_1 = \left(1; -\frac{a}{b}\right) \qquad \vec{u} = -b\vec{u}_1 = (-b;a) \Rightarrow \boxed{\vec{u} = (-b;a)} \text{ DIRECTEUR}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{n} = (a;+b) \text{ NORMAL}}$$

Exemples:

	$\vec{u}$	$\vec{n}$
$y=-2x+7$	$(1;-2)$	$(2;1)$
$3x-4y+2=0$	$(4;3)$	$(3;-4)$
$y=7x-1$	$(1;7)$	$(7;-1)$
$2x+3y=5$ $2x+3y-5=0$	$(3;-2)$	$(2;3)$

* Forme paramétrique : elle introduit un paramètre t pour découpler les coordonnées.

Ex: $\begin{cases} x=t \\ y=2t+1 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\quad$ $\begin{cases} x=-t \\ y=-2t+1 \end{cases}$

$$y=2x+1$$

Rq: * la forme paramétrique n'est pas unique

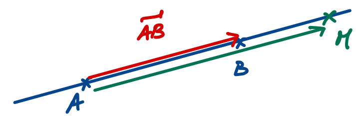
* elle permet une description fine de l'ensemble

Ex: $\underbrace{\begin{cases} x=t \\ y=2t+1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}^+}_{\text{demi-droite}}$ ou $\underbrace{\begin{cases} x=t \\ y=2t+1 \end{cases} \quad t\in[0;7]}_{\text{segment de droite}}$

Exemple: Soit $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Wanted: équations paramétrées de (AB)

$$(AB) = \left\{ M(x;y) \,/\, \vec{AM}=t.\vec{AB} \;;\; t\in\mathbb{R} \right\}$$



$\vec{AM}/\!/\vec{AB}$

$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \,/\, \vec{AM}=t.\vec{AB}$

$$\vec{AM}=t.\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = t\,\vec{u} = t\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

$\vec{u}=(\vec{AB})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+t(x_B-x_A) \\ y=y_A+t(y_B-y_A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=x_A+t\,x_u \\ y=y_A+t\,y_u \end{cases}$$

Ici pour A et B : $\begin{cases} x=1+t2 = 1+2t \\ y=4+t(-2) = 4-2t \end{cases}$

Exercice de 10 b : Donner des éq. paramétriques pour la droite définie par : $A(5;3)$ et $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2;4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5-2t \\ y = 3+4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.6. Cercles du plan

Soit le cercle de centre C et de rayon R. Appelons-le $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \{M(x;y) \ / \ CM = R\} = \{M(x;y) \ / \ \|\vec{CM}\| = R\}$$

$$\|\vec{CM}\| = R \iff \|\vec{CM}\|^2 = R^2$$

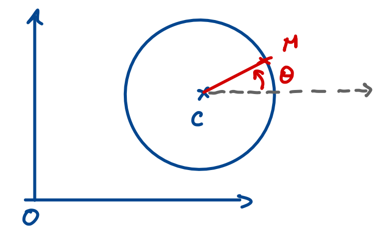
avec $\vec{CM} = \begin{pmatrix} x - x_C \\ y - y_C \end{pmatrix} \iff \boxed{\mathcal{C} : (x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = R^2}$

Équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exercices :

Centre ; rayon	Équation
$(1;4)$; 2	$(x-1)^2+(y-4)^2 = 4$
$(1;-1)$; 4	$(x-1)^2+(y+1)^2 = 16$
$(-1;2)$; 3	$(x+1)^2+(y-2)^2 = 9$
$(-4;7)$; 5	$(x+4)^2+(y-7)^2 = 25$

Remarque : Il y a aussi une forme paramétrique



$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$$

$$\|\vec{CM}\| = R$$

$$\vec{CM} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_C + R\cos\theta \\ y = y_C + R\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [-\pi;\pi]$$

Ex : $\mathcal{C} : (1;2)$ $R=5$ $\rightarrow \begin{cases} x = 1+5\cos\theta \\ y = 2+5\sin\theta \end{cases}$

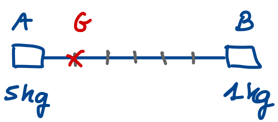
1.7. Barycentre

Soient n points $M_i(x_i\,;y_i)$ associés respectivement aux poids p_i. On appelle barycentre G de ces points le point vérifiant

$$\boxed{p_1\overrightarrow{GM_1}+p_2\overrightarrow{GM_2}+\dots+p_n\overrightarrow{GM_n}=\vec{0}}$$

ou $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i\overrightarrow{GM_i}=\vec{0}$

Exemple :



$$5\overrightarrow{GA}+1\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$p_1\overrightarrow{GM_1}+\dots+p_n\overrightarrow{GM_n}=\vec{0}\iff p_1\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM_1}\right)+\dots+p_n\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM_n}\right)=\vec{0}$$

$$\iff (p_1+p_2+\dots+p_n)\overrightarrow{OG}=p_1\overrightarrow{OM_1}+\dots+p_n\overrightarrow{OM_n}$$

$$\iff \overrightarrow{OG}=\frac{1}{p_1+p_2+\dots+p_n}\left(p_1\overrightarrow{OM_1}+\dots+p_n\overrightarrow{OM_n}\right)$$

$$\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}x_G\\ y_G\end{pmatrix}$$

$$x_G=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n}{p_1+p_2+\dots+p_n}$$

Les coordonnées de G sont les moyennes (pondérées) des coordonnées des M_i.

Rq : On appelle isobarycentre un barycentre pour lequel

$$p_1=p_2=\dots=p_n\ (=1)$$

CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

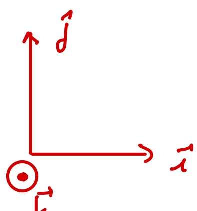
2.1. Bases et repères

On généralise la 2D à $\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix}$ et $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

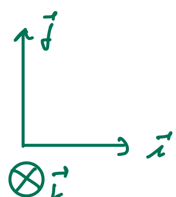
BASE — REPÈRE

Coordonnées : $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ← la cote

→ Orientation



trièdre $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ direct*



trièdre $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ indirect
inverse

Règle 1 : Main droite

$(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ direct

$\Leftrightarrow$ je peux mettre $\left\{\begin{array}{l}\vec{u} \text{ sur le pouce}\\ \vec{v} \text{ sur l'index}\\ \vec{w} \text{ sur le majeur}\end{array}\right.$

de la main droite. ou toute permutation circulaire.

Le trièdre garde la même orientation par permutation CIRCULAIRE.

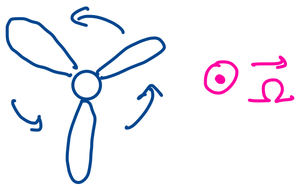
→ $(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \leftrightarrow (\vec{w};\vec{u};\vec{v}) \leftrightarrow (\vec{v};\vec{w};\vec{u})$

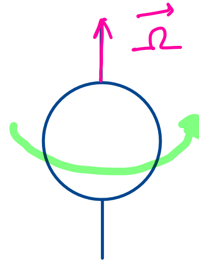
Mais il change d'orientation par permutation simple.

Règle 2 : Tournevis

$(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ direct $\Leftrightarrow$ quand je tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ le tournevis progresse dans le sens de $\vec{w}$.

→ Pseudo-vecteurs.





2.2. PRODUIT SCALAIRE

Même définition qu'en 2D

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\theta = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

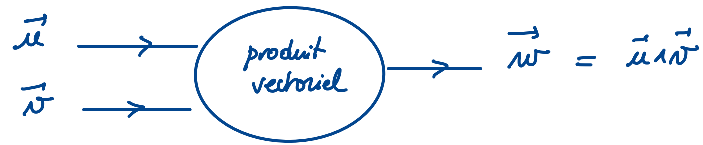
$$= xx' + yy' + zz'.$$

→ Utile pour calculer θ.

Ex: $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

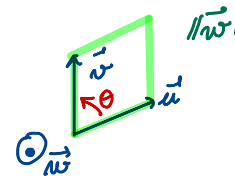
$$\cos\theta = \frac{10}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \theta = \pm 44,4^\circ$$

2.3. PRODUIT VECTORIEL



$\vec{w}$:

* direction → axe perpendiculaire au plan que créent $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
* sens → $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ direct



* norme : Aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin\theta| = u.v.|\sin\theta|$$

Propriétés:

- $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$ anti-commutatif.
- $\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$ ne s'écrit pas

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} \neq \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ n'est pas associatif.

Coordonnées : $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}yz'-zy'\\zx'-xz'\\xy'-yx'\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}x & & x'\\y & & y'\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}yz'-zy'\\-(xz'-zx')\\xy'-yx'\end{pmatrix}$$

Ex : $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u}}\wedge\underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}=\begin{pmatrix}-8\\+1\\2\end{pmatrix}$

Surface du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

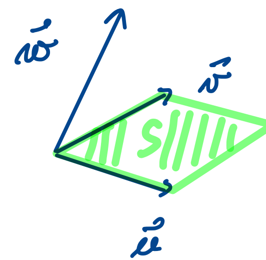
$$S=\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\sqrt{64+1+4}=\sqrt{69}\simeq 8{,}31\ u_A$$

2.4. DETERMINANT 3D (produit mixte)

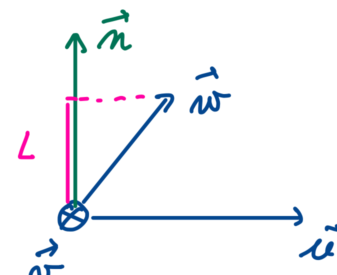
$\vec{u}\longrightarrow$
$\vec{v}\longrightarrow$ $\boxed{\text{PRODUIT MIXTE}}\longrightarrow m\in\mathbb{R}.$
$\vec{w}\longrightarrow$

* $|m|$ = volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$

* $m>0 \iff (\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est direct



$S=\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{n}$



$$V=L\times S=|\vec{n}\cdot\vec{w}|$$

$$V = \left| (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \right| \Longrightarrow m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Le produit mixte se calcule en faisant

- Un produit vectoriel

  PUIS

- Un produit scalaire

Notation : $m = [\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w}]$

Propriétés : * $[\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w}] = [\vec{v}\,; \vec{w}\,; \vec{u}] = [\vec{w}\,; \vec{u}\,; \vec{v}]$.

$$\Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$$

Dans les faits : $[\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w}] = \vec{u}\,(\vec{v} \wedge \vec{w})$

$$[\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w}] = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

① J'écris $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans l'ordre en commençant par celui que je veux

② Je pose $\wedge$ où je veux → 1ère opération

③ Je fait le scalaire du résultat.

Exemple : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

① Orientation de $(\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w})$?

② Volume V du parallélépipède engendré par $(\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w})$?

$$m = \det(\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ +1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 + 8 = 13 = m$$

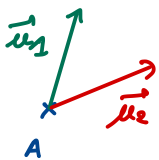
$\Rightarrow \quad V = |13| = 13\, u_V$

$\Rightarrow \quad m > 0 \Leftrightarrow (\vec{u}\,; \vec{v}\,; \vec{w})$ direct

2.5 Plans et Droites de l'espace

2.5.1 Plan de l'espace

Pour définir un plan j'utilise



Un point et deux vecteurs du plan

Un point et un vecteur normal

→ On peut donc définir les équations canoniques du plan.

Soit $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix} \in \Pi$ et soit $\vec{n} \perp \Pi$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\Pi = \left\{ M(x;y;z) \;/\; \vec{AM} \perp \vec{n} \right\}$$

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\vec{AM}\cdot\vec{n} \underset{\text{éq.}}{=} 0 \qquad a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

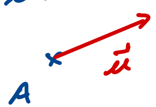
$$\Leftrightarrow\quad ax+by+cz+\underbrace{(-ax_A-by_A-cz_A)}_{d}=0$$

Si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \Pi$, alors Π a pour équation $\boxed{ax+by+cz+d=0}$

et réciproquement.

2.5.2. Droites de l'espace

* Dans l'espace on définit une droite comme l'intersection de deux plans.
* On la décrit aussi avec un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.



⚠ Je ne peux pas la décrire avec un vecteur normal.

* Dans l'espace je ne peux utiliser que des équations paramétriques.

$$\mathcal{D} = \{M(x;y;z) \ / \ \vec{AM} = t\vec{u} \quad t \in \mathbb{R}\}$$

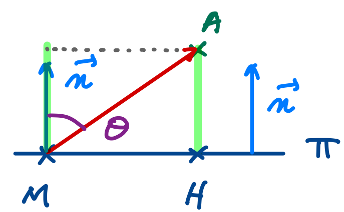
$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \cdot x_u + x_A \\ y = t \cdot y_u + y_A \\ z = t \cdot z_u + z_A \end{cases}$$

Ex: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = -2t \\ y - 3 = 3t \\ z + 4 = t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t + 3 \\ z = t - 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.5.3 Calculs de distances

1 Distance point-plan



$d = AH.$

$$d = MA \cdot |\cos\theta| = \frac{\|\vec{MA}\| \, \|\vec{n}\| \, |\cos\theta|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\boxed{= \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

Ex: $\pi : 3x - 2y + z + 2 = 0$

$A\begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix} \rightarrow$ Wanted: $d(A;\pi)$ avec 3 chiffres significatifs.

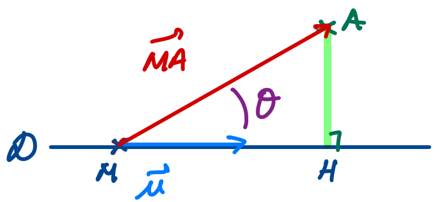
$$d = \frac{|\vec{MA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Je choisis $M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{MA} = \begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{MA}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = 21 \qquad \|\vec{n}\| = \sqrt{14}$$

$$d = \frac{21}{\sqrt{14}} = 5{,}61\ u_L.$$

2. Distance point-droite



$d = AH$

Je choisis M sur $\mathcal{D}$

$$d = MA\cdot|\sin\theta| = \frac{\|\vec{MA}\|\,\|\vec{u}\|\,|\sin\theta|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\boxed{d = \frac{\|\vec{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = d(A;\mathcal{D})}$$

Ex: $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = -t + 2 \end{cases} \qquad A\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ Wanted: $d(A;\mathcal{D})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{MA} = \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{MA}\wedge\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\+3\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\vec{MA}\wedge\vec{u}\| = \sqrt{41} \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} = 4{,}53\ u_L.$$