

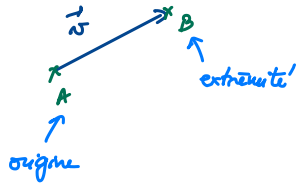
# Chapitre 1 : Géométrie dans le plan

## 1.1. Vecteurs

Caractérisés par : \* une norme (positive)  
ou intensité

\* direction (axe)  
\* sens

$$\vec{v} = \vec{AB}$$



$\vec{AB}$  est un représentant  
de  $\vec{v}$ .

$\vec{v}$  : \* direction ( $\vec{AB}$ )  
\* sens de A vers B  
\* norme  $\|\vec{v}\| = v > 0$

$$* \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \quad k \in \mathbb{R}^*$$

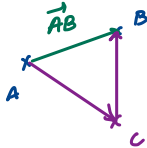
↑  
colinéaires

$\|\vec{u}\| = k\|\vec{v}\|$   
mêmes directions  
! sens (signe de k).

$\exists k \in \mathbb{R}^* / \vec{u} = k\vec{v}$   
↑  
il existe au moins un

Pour tout / Quel que soit

\* Chasles:



$$\forall C \in \Pi$$

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

$\Pi$

Inégalité triangulaire

$$\|\vec{AB}\| \leq \|\vec{AC}\| + \|\vec{CB}\|$$

\* Linéarité: Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$   
 $m \in \mathbb{R}^*$  et  $p \in \mathbb{R}^*$

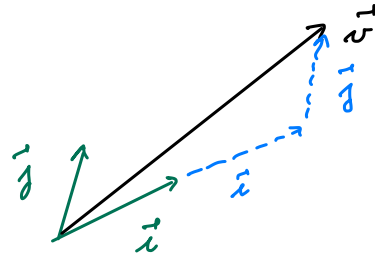
$$\rightarrow m(p\vec{u}) = p(m\vec{u}) = mp\vec{u}$$

$$\rightarrow m(\vec{u} + \vec{v}) = m\vec{u} + m\vec{v}$$

$$\rightarrow (m+p)(\vec{u} + \vec{v}) = m\vec{u} + m\vec{v} + p\vec{u} + p\vec{v}$$

## 1.2. Coordonnées

\* Base dans le plan :  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  non colinéaires.



$$\vec{v} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$$

$(\vec{i}, \vec{j})$  permet de dire de façon unique  $\vec{v}$

$$\forall \vec{v} \in \Pi \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad \exists! y \in \mathbb{R} \quad / \quad \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

↑ unique

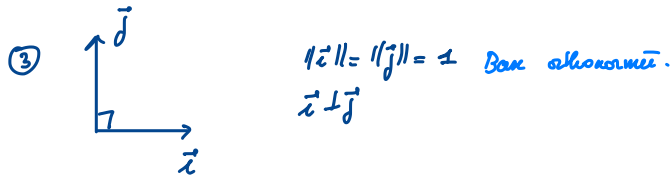
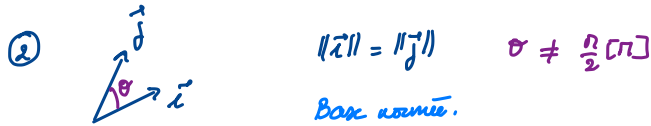
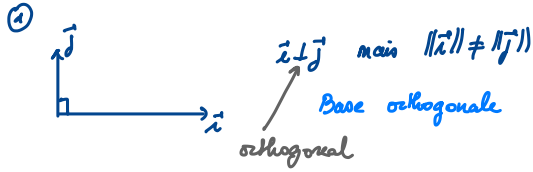
↑ tel que

$$\rightarrow \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

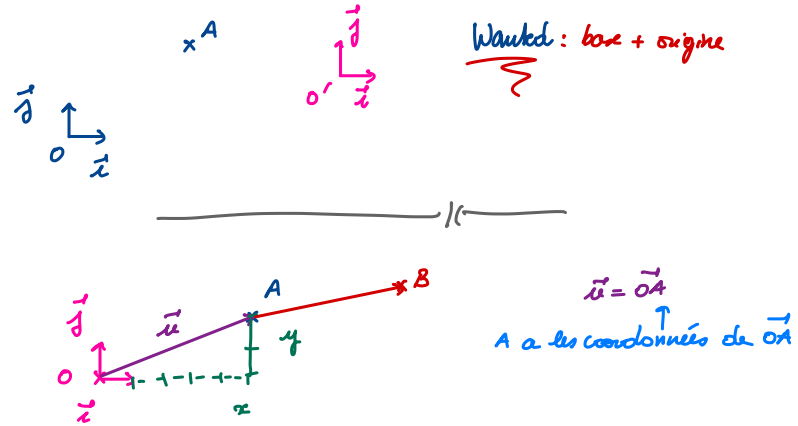
↑  
dépend de la base

$x$  et  $y$  : coordonnées ou composantes de  $\vec{v}$ .

\* Bases particulières



\* Rappel: permet de localiser les points

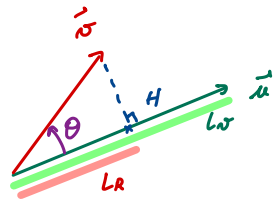


$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

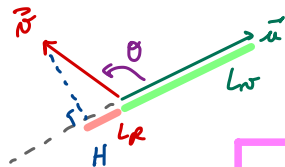
A partir de maintenant: repère orthonormé.

### 1.3. Produit scalaire



On peut aussi projeter  $\vec{u}$  sur  $\vec{v}$ .

$$\Delta = L_{\vec{v}} \cdot L_R \quad L_R = \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$



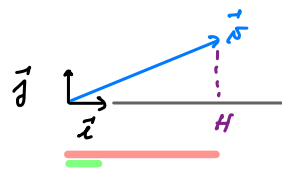
$$\Delta = -L_{\vec{v}} \cdot L_R (-L_R) = \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\Delta = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

$$\text{avec } \theta = (\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$$

$$\begin{aligned} \text{Faisons : } \vec{v} \cdot \vec{u} &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos(-\theta) \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \Delta. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Le produit scalaire est commutatif:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$



$$\vec{v} \cdot \vec{i} = x \quad \vec{v} \cdot \vec{j} = y$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\Delta = L_R \cdot L_{\vec{v}} = x \cdot 1$$

Question:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \vec{v} \neq \vec{0} & \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \perp \vec{v} & (\theta = 90^\circ) \end{matrix}$

$\rightarrow$  Permet de tester l'orthogonalité des vecteurs.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u^2$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

NB:  $\vec{u}$  unitaire  $\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 1$ .

Lien avec les coordonnées

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

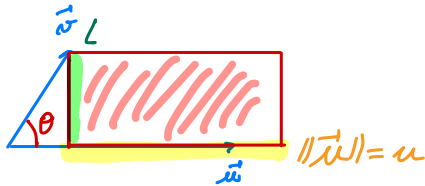
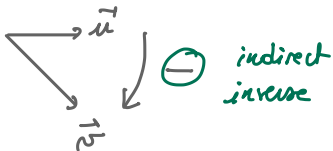
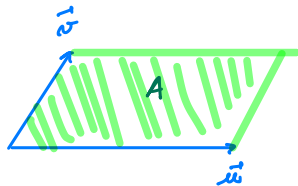
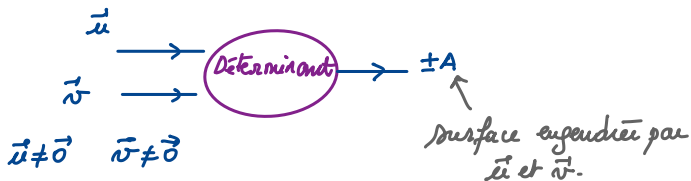
Preuve:  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = u^2 + v^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$(x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{x'^2} + 2xx' + \cancel{y^2} + \cancel{y'^2} + 2yy' = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x'^2} + \cancel{y'^2} + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

#### 1.4. Déterminant 2D



$$A = L \cdot u = u \cdot v \cdot \sin \theta$$

$$L = v \sin \theta$$

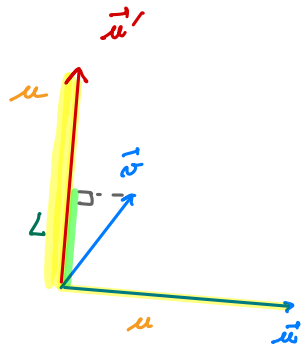
$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta \quad \text{avec } \theta = \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$$

Propriétés:  $\det(\vec{v}; \vec{u}) = -\det(\vec{u}; \vec{v})$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

→ Tester la colinéarité.

\* Lien avec les coordonnées



$$A = L \cdot u$$

$$= \vec{u}' \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

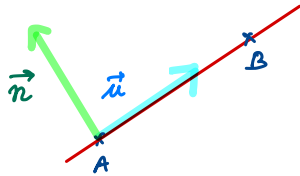
$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}' = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -x'y + xy'.$$

$$\Rightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

$\uparrow$   $\vec{u}$        $\uparrow$   $\vec{v}$

### 1.5. Droites du plan



(AB) est définie par:

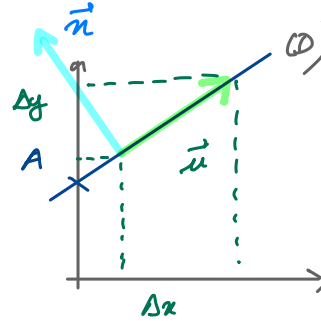
\* deux points A et B

\* un point et un vecteur directeur  $\vec{u}$  (ou tout colinéaire à  $\vec{u}$ )

\* un point et un vecteur normal  $\vec{n}$  (ou tout vecteur colinéaire à  $\vec{n}$ )

### Equations de droite:

\* Forme nouvelle réduite:  $y = mx + p$  ordonnée à l'origine



$$\vec{u} = (1; m)$$

$$A(0; p) \quad \vec{u} = (\Delta x; \Delta y)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y = m \Delta x$$

$$\Rightarrow \vec{u} = (\Delta x; m \Delta x) = \Delta x (1; m)$$

Je cherche  $\vec{n}$  normal à (D):  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-m; 1)$$

\* Forme canonique:  $ax + by + c = 0$ . pas unique

$$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\vec{u}_1 = (1; -\frac{a}{b}) \quad \vec{u} = -b\vec{u}_1 = (-b; a) \Rightarrow \vec{u} = (-b; a) \text{ DIRECTEUR}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (a; b) \text{ NORMAL}$$

Examples:

|                   | $\vec{a}$                   | $\vec{n}$                   |
|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $y = -2x + 7$     | <u><math>(1; -2)</math></u> | <u><math>(2; 1)</math></u>  |
| $3x - 4y + 2 = 0$ | <u><math>(4; 3)</math></u>  | <u><math>(3; -4)</math></u> |
| $y = 7x - 1$      | <u><math>(1; 7)</math></u>  | <u><math>(7; -1)</math></u> |
| $2x + 3y = 5$     | <u><math>(3; -2)</math></u> | <u><math>(2; 3)</math></u>  |
| $2x + 3y - 5 = 0$ |                             |                             |

- \* Forme paramétrique: elle introduit un paramètre  $t$  pour découpler les coordonnées.

Fr:  $\begin{cases} x=t \\ y=2t+1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x=-t \\ y=-2t+1 \end{cases}$

$\searrow \quad \swarrow$

$y=2x+1$

Rq: \* la forme paramétrique n'est pas unique

- \* elle permet une description fine de l'ensemble

Ex:

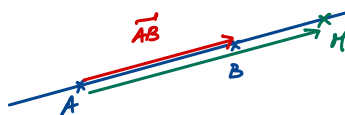
$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t + 1 \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}^+$   
deuxi-ème droite

$\approx \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t + 1 \end{array} \right. \quad t \in [0; 7]$   
segment de droite

Example: sort  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$   $B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wanted: équations paramétriques de (AB)

$$(AB) = \{ M(x; y) / \vec{AM} = t \cdot \vec{AB} ; t \in \mathbb{R} \}$$



$$\vec{AM} \parallel \vec{AB} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = t \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = t \vec{u} = t \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = (\overline{AB})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_A + t x_u \\ y = y_A + t y_u \end{cases}$$

Les param. A et B :

$$\begin{cases} x = 1 + t^2 = 1 + 2t \\ y = 4 + t(-2) = 4 - 2t \end{cases}$$

Exercice de 100: Donner des éq. paramétriques pour la droite définie par:  $A(5;3)$  et  $\vec{a}=(-2;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5-2t \\ y=3+4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

### 1.6. Cercles du plan

Soit le cercle de centre  $C$  et de rayon  $R$ . Appelons-le  $\mathcal{C}$ .

$$\mathcal{C} = \{M(x;y) \mid CM = R\} = \{M(x;y) \mid \|\vec{CM}\| = R\}$$

$$\|\vec{CM}\| = R \Leftrightarrow \|\vec{CM}\|^2 = R^2$$

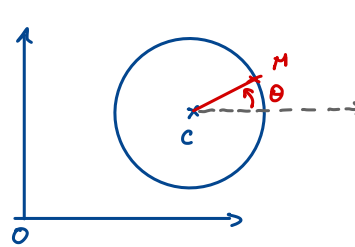
avec  $\vec{CM} = \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{C}: (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

Equation canonique du cercle  $\mathcal{C}$ .

Exercices:

| Centre ; rayon | Equation                 |
|----------------|--------------------------|
| $(1;4) ; 2$    | $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$  |
| $(1;-1) ; 4$   | $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$ |
| $(-1;2) ; 3$   | $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$  |
| $(-4;7) ; 5$   | $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 25$ |

Remarque: Il y a aussi une forme paramétrique



$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$$

$$\|\vec{CM}\| = R$$

$$\vec{CM} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_c + R \cos \theta \\ y = y_c + R \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [-\pi; \pi]$$

Ex:  $\mathcal{C}: (1;2) \quad R=5 \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 5 \cos \theta \\ y = 2 + 5 \sin \theta \end{cases}$

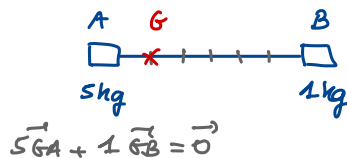
## 1.7. Barycentre

Soient  $n$  points  $M_i(x_i; y_i)$  associés respectivement aux poids  $p_i$ . On appelle barycentre  $G$  de ces points le point vérifiant

$$p_1 \overrightarrow{GM_1} + p_2 \overrightarrow{GM_2} + \dots + p_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0}$$

$$\text{ou } \sum_{i=1}^n p_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Exemple :



$$p_1 \overrightarrow{GM_1} + \dots + p_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0} \Leftrightarrow p_1 (\vec{GO} + \vec{OM_1}) + \dots + p_n (\vec{GO} + \vec{OM_n}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \vec{OG} = p_1 \vec{OM_1} + \dots + p_n \vec{OM_n}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OG} = \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} (p_1 \vec{OM_1} + \dots + p_n \vec{OM_n})$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$$

$$x_G = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Les coordonnées de  $G$  sont les moyennes (pondérées) des coordonnées des  $M_i$ .

Rq : On appelle isobarycentre ou barycentre pour lequel  $p_1 = p_2 = \dots = p_n (=1)$

# CHAPITRE 2

## GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

### 2.1. Bases et repères

On généralise la 2D  $\vec{a}$   $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ k \end{pmatrix}$  et  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$   
 BASE  
 REPÈRE

Coordonnées :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ← la 3e

⇒ Orientation



triedre  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  direct\*

triedre  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  indirect  
inverse

Règle 1: Main droite  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  direct

⇒ je peux mettre  $\begin{cases} \vec{u} \text{ sur le pouce} \\ \vec{v} \text{ sur l'index} \\ \vec{w} \text{ sur le majeur} \end{cases}$

de la main droite.

ou toute permutation circulaire.

Le triedre garde la même orientation par permutation Circulaire.

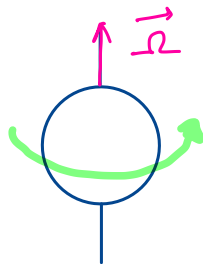
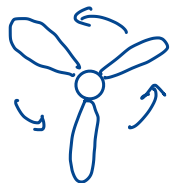
→  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \Leftrightarrow (\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}) \Leftrightarrow (\vec{w}; \vec{u}; \vec{v})$

Mais il change d'orientation par permutation simple.

Règle 2: Tournevis

$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  direct  $\Leftrightarrow$  quand je tourne de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$  le tournevis progresse dans le sens de  $\vec{w}$ .

→ Pseudo-vecteurs.



## 2.2. PRODUIT SCALAIRE

Même définition qu'en 2D

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

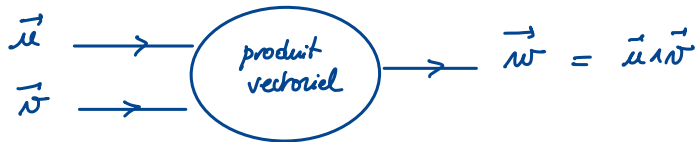
$$= xx' + yy' + zz'$$

→ Utile pour calculer  $\theta$ .

Ex:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

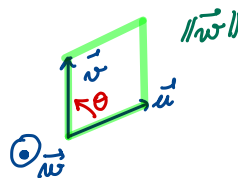
$$\cos \theta = \frac{10}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \theta = \pm 44,4^\circ$$

## 2.3. PRODUIT VECTORIEL



$\vec{w}$ : \* direction → axe perpendiculaire au plan que tiennent  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

\* sens →  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  direct



\* norme: Aire du parallélogramme engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \theta| = u \cdot v \cdot |\sin \theta|$$

Propriétés: •  $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$  anti-commutatif.

•  $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$  ne s'écrit pas

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$   
n'est pas associatif.

Coordonnées:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$   $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -(xz' - zx') \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Ex:  $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -8 \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Surface du parallélogramme engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

$$S = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

$$= \sqrt{64 + 1 + 4} = \sqrt{69}$$

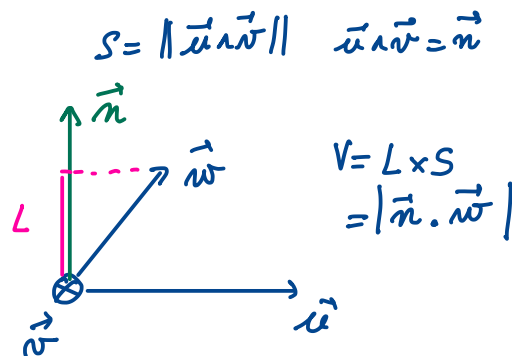
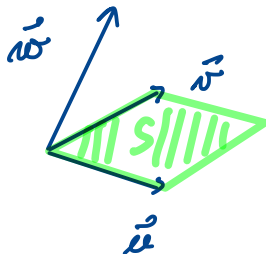
$$\approx 8,31 \text{ uA}$$

## 2.4. DETERMINANT 3D (produit mixte)

$$\begin{matrix} \vec{u} \longrightarrow \\ \vec{v} \longrightarrow \\ \vec{w} \longrightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} \text{PRODUIT} \\ \text{MIXTE} \end{matrix}} \longrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

\*  $|m|$  = volume du parallépipède engendré par  $\vec{u}$ ;  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$

\*  $m > 0 \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  est direct



$$V = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| \implies m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Le produit mixte se calcule en faisant

- Un produit vectoriel

Puis

- Un produit scalaire

notation:  $m = [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$

Propriétés:  $* [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = [\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}] = [\vec{w}; \vec{u}; \vec{v}]$

$$\begin{aligned} \implies (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} \\ &= \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) \end{aligned}$$

Dans les faits:  $[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

$$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

① J'écris  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans l'ordre en commençant par celui que je veux

② Je pose 1 ou -1 devant  $\rightarrow$  1<sup>ère</sup> opération

③ Je fais le scalaire du résultat.

Exemple:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$   $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$   $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

① Orientation de  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  ?

② Volume  $V$  du parallélépipède engendré par  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  ?

$$m = \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ +1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 + 8 = 13 = m$$

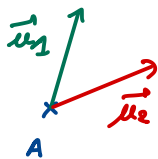
$$\implies V = |13| = 13 u_V$$

$$\implies m > 0 \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ direct}$$

## 2.5 Plans et Droites de l'espace

### 2.5.1 Plan de l'espace

Pour définir un plan j'utilise



Un point et deux  
vecteurs du plan



Un point et  
un vecteur normal



→ On peut donc définir les équations canoniques  
du plan.

Soit  $A(x_A, y_A, z_A) \in \Pi$  et soit  $\vec{n} \perp \Pi$   $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\Pi = \{ M(x, y, z) \mid \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \}$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \stackrel{\text{eq.}}{=} 0 \quad a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_d = 0$$

Si  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \Pi$ , alors  $\Pi$  a pour

équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

et réciproquement.

### 2.5.2. Droites de l'espace

\* Dans l'espace on définit une droite comme l'intersection de deux plans.

\* On la décrit aussi avec un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$ .



⚠ je ne peux pas la décrire avec un vecteur normal.

\* Dans l'espace je ne peux utiliser que des équations paramétriques.

$$\mathcal{D} = \{M(x;y;z) / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \quad t \in \mathbb{R}\}$$

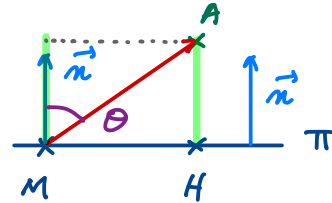
$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \cdot x_u + x_A \\ y = t \cdot y_u + y_A \\ z = t \cdot z_u + z_A \end{cases}$$

Ex:  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x-1 = -2t \\ y-3 = 3t \\ z+4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t+1 \\ y = 3t+3 \\ z = t-4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

### 2.5.3 Calculs de distances

#### ① Distance point-plan



$$d = AH.$$

$$d = MA \cdot |\cos \theta| = \frac{\|\vec{MA}\| \|\vec{n}\| |\cos \theta|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Ex:  $\pi: 3x - 2y + z + 2 = 0$   
 $A \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$  Wanted:  $d(A; \pi)$  avec  
 3 chiffres significatifs.

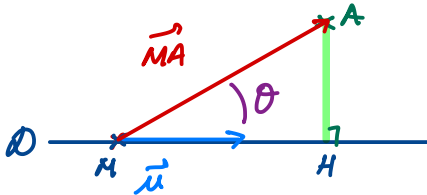
$$d = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Je choisis  $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{MA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{MA} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 21 \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{14}$$

$$d = \frac{21}{\sqrt{14}} = 5,61 \mu_L.$$

② Distance point-droite



$$d = AH$$

Je choisis  $M$  sur  $D$

$$d = MA \cdot |\sin \theta| = \frac{\|\vec{MA}\| \|\vec{u}\| |\sin \theta|}{\|\vec{u}\|}$$

$$d = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = d(A; D)$$

Ex:  $D: \begin{cases} x=1+t \\ y=4 \\ z=-t+2 \end{cases} \quad A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad$  Wanted:  $d(A; D)$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MA} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ +3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\vec{MA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{41} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} = 4,53 \mu_L.$$

## 2.6. SPHÈRES

$$\mathcal{S} = \{ \pi(x; y; z) \mid CM = R \} \quad \begin{array}{l} \text{centre } C. \\ \text{rayon } R. \end{array}$$

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad \| \overrightarrow{CM} \|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = R^2$$

Équivalent 3D de l'éq. du cercle dans le plan.

Ex: ①  $\mathcal{S}: (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = 16$

$$\begin{array}{ll} C(4; -2; 7) & R = \sqrt{16} = 4 \\ \text{centre} & \text{rayon} \end{array}$$

② Eq. de la sphère de centre  $(1; -2; 3)$  et de rayon 5.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

## CHAPITRE 3: SYSTÈMES DE COORDONNÉES

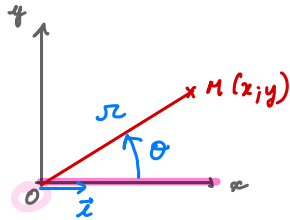
### 3.1. Coordonnées du plan

→ Cartésiennes →  $M(x; y)$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

→ Coordonnées polaires.

#### ① Définition



*Ma les coordonnées de OM.*

$r = OM$ . coordonnée radiale

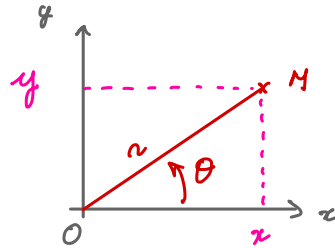
$$\theta \in ]-\pi; +\pi[ \quad \theta \in ]-180^\circ; +180^\circ[$$

↳ coordonnée angulaire

$$\theta = (\widehat{[Ox]; \vec{OM}}) = (\widehat{\vec{i}; \vec{OM}})$$

$$\Rightarrow M(r; \theta)$$

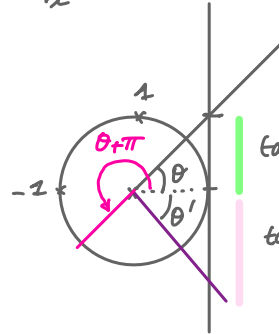
#### ② Relations $(x; y) \longleftrightarrow (r; \theta)$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



$$\tan \theta > 0$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$

$$\tan \theta < 0$$

$$\text{Ex: } \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^\circ$$

$$\tan(210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \frac{1}{2} \text{ tour } m \times 2\pi$$

Ex: ①  $x=2$   $y=0$   $\rightarrow r$  et  $\theta$ ?

$\rightarrow x=2$  et  $y=0$

②  $x=4$   $y=3$   $\rightarrow r$  et  $\theta$ ?

$x=4$   $y=3$

③  $x=1$   $y=4$   $\rightarrow r$  et  $\theta$ ?

$r=\sqrt{17}$   $\theta=76,0^\circ$

④  $x=-1$   $y=7$   $\rightarrow r$  et  $\theta$

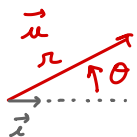
$r=\sqrt{50}$   $\theta=-81,9+180^\circ=98,1^\circ$

⑤  $x=-1$   $y=-7$   $\rightarrow r$  et  $\theta$ ?

$r=\sqrt{50}$   $\theta=\arctan\left(\frac{-7}{-1}\right)-180^\circ=-98,1^\circ$

### ③ Vecteurs

Rappel:  $\vec{OM}$  a les coordonnées de M



$\theta = (\hat{x}, \hat{u})$   
 $r = \|\vec{u}\|$



$\theta' = (\hat{x}, \hat{u}')$   
 $r' = \|\vec{u}'\|$

Question: Quelles sont les coordonnées polaires de  $\vec{u}=(2;-4)$ ?

$r = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{2}\right) = -63,4^\circ$

### 3.2. Coordonnées de l'espace

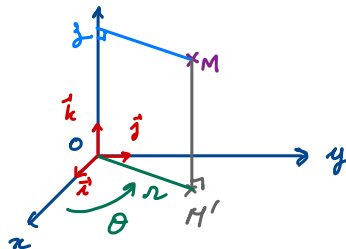
\* cartésiennes  $(x, y, z)$

\* cylindriques  $(r; \theta; z)$

\* sphériques  $(r; \theta; \varphi)$

#### 3.2.1 Coordonnées cylindriques

$\rightarrow$  Plaines 3D



coordonnée angulaire

$(r; \theta; z)$   
↑  
coordonnée radiale

① Je relie la cote z

② Je projette M sur (xoy)  
 $\rightarrow H'$

$\begin{cases} ③ r = \|\vec{OM}'\| \\ ④ \theta = (\hat{z}, \hat{OM}') \end{cases}$   
 $\rightarrow$  coordonnées  $\vec{u}$  3D.

## Relations de passage

Mêmes que polaires  $\iff$  cartésiennes

$$\theta \in ]-\pi; \pi]$$

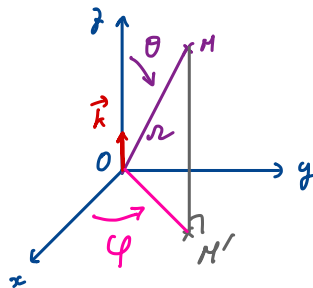
$$r > 0$$

$$z \in \mathbb{R}$$

Rq: Si je fixe  $r$  et pas les autres, je trace un cylindre.

### 3-2.2 Coordonnées sphériques

Ici si je fixe  $r$  et pas les autres je trace une sphère



① Je mesure  $r$ , la distance (radiale)  $r = OM$ .

② Je mesure  $\theta = (\vec{k}; \vec{OM})$   
 $\theta \in [0; 180]$   
 $\theta$ : colatitude

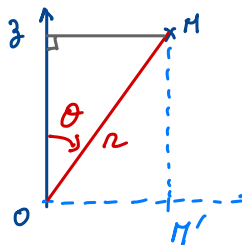
③ Je projette sur  $(xOy)$   
j'obtiens  $M'$ .

④ Je mesure  $\varphi = (\vec{x}; \vec{OM'})$

$\varphi \in ]-\pi; +\pi] = ]-180^\circ; +180^\circ]$   
 $\varphi$  est la longitude

Rq:  $\varphi_{\text{sph}} = \theta_{\text{cyl}}$  ⚠

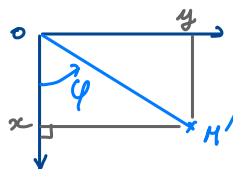
Relations de passage ← cartésiennes → sphériques



plan  $(OMH')$

$$z = r \cos \theta$$

$$OM' = r \sin \theta$$



plan  $(xOy)$

$$x = OM' \cos \varphi$$

$$y = OM' \sin \varphi$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$OM = \sqrt{r^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \frac{\pi}{2} \text{ pour } x < 0.$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

## CHAPITRE 4 : NOMBRES COMPLEXES

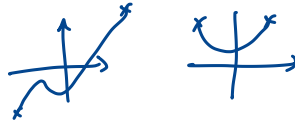
16<sup>e</sup> siècle

$$x^2 = 9 \quad \text{😊}$$

$$x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{😊}$$

$$x^2 = -9 \quad \text{?}$$

$$x^3 = -27$$



On cherche à trouver toutes les solutions des équations de degré 3.

→  $\sqrt{-1}$  pas problème.

On pose  $i / i^2 = -1$  impossible → imaginaire

À partir de là on crée l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

$$z = \underset{\substack{\uparrow \\ a \in \mathbb{R} \\ \text{partie} \\ \text{réelle}}}{a} + i \underset{\substack{\uparrow \\ b \in \mathbb{R} \\ \text{partie} \\ \text{imaginaire}}}{b} \in \mathbb{C}$$

$z \rightarrow 2$  informations

Comment donner du sens et représenter ces deux informations.

### 4.1. Formes complexes

Approche géométrique dans le plan.

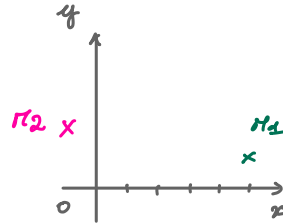
$$z \longrightarrow M(z) \quad z \text{ est l'affixe de } M. \\ \text{N.F.}$$

→ Coordonnées du plan.

#### 4.1.1. Forme algébrique

$$\text{C'est la forme } z = a + ib = x + iy. \\ \begin{array}{l} \nearrow \text{partie réelle} \\ \nwarrow \text{partie imaginaire} \end{array}$$

$$\Rightarrow M(x; y) \text{ avec } x = \operatorname{Re}(z) \\ y = \operatorname{Im}(z)$$

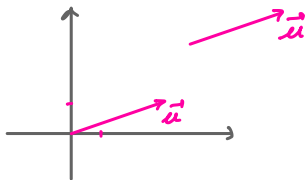


$$z_1 = 5 + i \rightarrow M_1(5; 1)$$

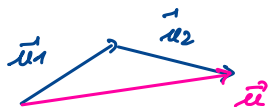
$$z_2 = -1 + 2i \rightarrow M_2(-1; 2)$$

N.B: les nombres complexes sont aussi des affixes pour les vecteurs.

$$z_u = 3+i \rightarrow \vec{u}(3;1)$$



Questions: ①  $z_1 + z_2 = ?$



$$z_1 = a_1 + ib_1 \rightarrow \vec{u}_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2 \rightarrow \vec{u}_2$$

$$z = z_1 + z_2$$

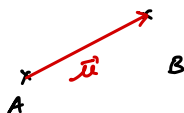
$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$

Ex:  $z_1 = 1+i$   $z_2 = -3+4i$   $z_1 + z_2 = -2 + 5i$

Affixe de  $\vec{u} = \vec{AB}$

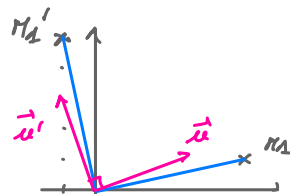


$$z_u = z_B - z_A$$

② Que représente la multiplication par  $i$ ?

$$z' = i * z$$

Ex:



$$r_1(z_1) \quad z_1 = 5+i$$

$$z_1' = i z_1 = i(5+i)$$

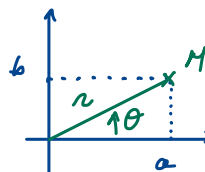
$$= 5i - 1 = -1 + 5i = z_1'$$

$$z_u = 3+i \quad z_u' = i z_u = 3i - 1$$

$$= -1 + 3i$$

Multiplier par  $i$ , c'est faire  $R(0; \frac{\pi}{2})$  rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  (pour les points)

4.1.2. Forme trigonométrique (exponentielle)



Je repère  $M$  avec des coordonnées polaires  $r(z) = r(r, \theta)$

$$z = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$= r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$r > 0$  est appelé le module  $z$ .  $r = |z|$

$\theta \in ]-\pi; \pi]$  est appelé l'argument de  $z$ .  $\theta = \arg(z)$

On note  $z = r \exp(i\theta) = r e^{i\theta}$

① E.D:  $\frac{dz}{d\theta} = iz \quad z' - iz = 0 \quad z = r e^{i\theta} \quad r \in \mathbb{R}.$

②  $\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} r(\cos\theta + i\sin\theta) = -r\sin\theta + ir\cos\theta$   
 $= \underline{r(-\sin\theta + i\cos\theta)}$

③  $iz = i r(\cos\theta + i\sin\theta) = \underline{r(-\sin\theta + i\cos\theta)}$

$\frac{dz}{d\theta} = iz$

$\Rightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = r e^{i\theta}.$

$\rightarrow$  j'hérite de toutes les propriétés de exp.

$e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ etc...}$

Bilan:  $z = a+ib = r e^{i\theta}$

$\rightarrow$  cf chapitre 3  
(plaires)

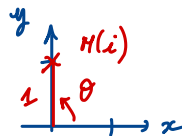
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \frac{1}{2} \text{ tour si } a < 0$

$a = r \cos \theta$

$b = r \sin \theta$

Question: Forme trigo/expo de  $i$ ?

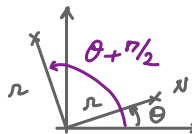


$i = 1 e^{i\pi/2}$

$N(z) \longrightarrow N'(iz)$

$z = a+ib = r e^{i\theta}$

$iz = i(a+ib) = 1 e^{i\pi/2} \times r e^{i\theta} = (1 \times r) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$



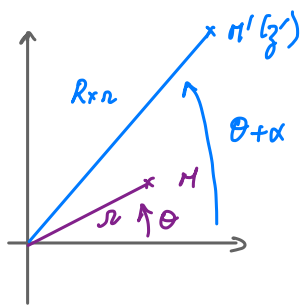
De manière générale, je peux associer à tout nombre complexe une transformation géométrique.

Ex:  $z = R e^{i\alpha} \rightarrow$  quelle transfo?

Soit  $z = r e^{i\theta}$  affixe de M.

$M(z) \xrightarrow{T(z)} M'(z' = z \times z)$

$z' = R e^{i\alpha} r e^{i\theta} = (R \times r) e^{i(\theta + \alpha)}$



3 cas :

①  $R=1 \Leftrightarrow |z|=1$

$T(z) = R(0; \alpha)$  rotation de centre 0 et d'angle  $\alpha$

②  $\alpha = 0 [2\pi]$

$T(z) = H(0; R)$  Homothétie de centre 0 et rapport  $R$ .

③  $R \neq 1 \quad \alpha \neq 0 [2\pi]$ .

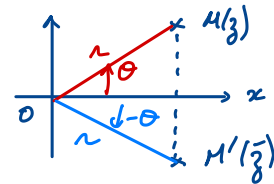
$T(z) = R(0; \alpha) \circ H(0; R)$

$= H(0; R) \circ R(0; \alpha)$

$= S(0; R; \alpha)$  similitude de centre 0 de rapport  $R$  et d'angle  $\alpha$ .

### 4.1.3. Conjugaison

Soit  $z = a+ib$ , on appelle  $\bar{z} = a-ib$  le conjugué de  $z$ .



$z \rightarrow \bar{z}$  correspond à une symétrie d'axe (Ox)

$z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$

Relations  $z, \bar{z}$

\*  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$  (2a)

\*  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$  (2ib)

\*  $z \cdot \bar{z} = re^{i\theta} \times re^{-i\theta} = r^2 e^{i(\theta-\theta)} = r^2$   
 $\Rightarrow z \cdot \bar{z} = r^2 = a^2 + b^2$

Application :  $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5}$  etc...

## 4.2. Opérations sur les complexes

### 4.2.1. Égalité de deux complexes

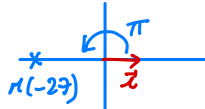
$$z = a + ib = r e^{i\theta}$$

$$z' = a' + ib' = r' e^{i\theta'}$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ \text{ET} \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Ex: Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'éq.  $z^3 = -27$

① Je pose  $z = r e^{i\theta}$   $-27 = 27 e^{i\pi}$



② j'écris  $(r e^{i\theta})^3 = 27 e^{i\pi}$   
 $\Rightarrow r^3 e^{i3\theta} = 27 e^{i\pi}$

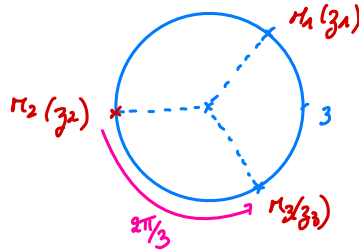
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 27 & r > 0 \\ 3\theta = \pi [2\pi] = \pi + k2\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \left[ \frac{2\pi}{3} \right] \end{cases}$$

$$z_1 = 3 e^{-i\pi/3}$$

$$z_2 = 3 e^{i\pi}$$

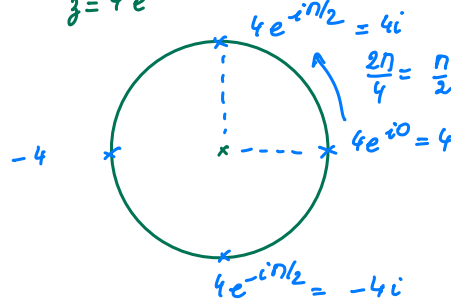
$$z_3 = 3 e^{i5\pi/3} = 3 e^{-i\pi/3}$$



Autre exemple: Résoudre  $z^4 = 256$

$z = 4$  est racine évidente

$$z = 4 e^{i0}$$



### 4.2.2. Opérations sur les formes complexes

$$\begin{cases} z = a+ib = re^{i\theta} \\ z' = a'+ib' = r'e^{i\theta'} \end{cases}$$

$$z+z' = (a+a') + i(b+b')$$

↳ la forme algébrique est adaptée à + et -.

$$z \cdot z' = r r' e^{i(\theta+\theta')} \Rightarrow |zz'| = |z| \cdot |z'|$$
$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

↳ la forme exponentielle est adaptée aux produits, rapports et puissances.

$$\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

Remarque : les deux formes  $a+ib$  et  $re^{i\theta}$  sont équivalentes (il n'y en a pas une meilleure que l'autre).

$$\overline{z+z'} = \overline{(a+ib)+(a'+ib')} = a+a' - i(b+b') = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'}} = r r' e^{-i(\theta+\theta')} = r r' e^{-i(\theta+\theta')} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad \overline{(z^n)} = \overline{z}^n$$

⇒ la conjugaison conserve toutes les opérations.

Application de cette propriété :

$$\text{Soit } P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\text{Soient } a_0 \in \mathbb{R} \quad a_1 \in \mathbb{R} \quad \dots \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Supposons que  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est racine de  $P$

$$P(z) = 0 \quad (\Rightarrow \text{solution de } a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0.$$

Montrons que  $\overline{z}$  est aussi racine de  $P$ .

$$P(\overline{z}) = \sum_{i=0}^n a_i \overline{z}^i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \overline{P(z)} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{P(z)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \overline{a_i z^i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \overbrace{\overline{a_i}}^{\text{réels } \overline{a_i} = a_i} \overline{z}^i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \overline{z}^i = 0 = P(\overline{z})$$

Lorsqu'un polynôme à coefficients réels admet une racine complexe  $z$ , il admet son conjugué  $\overline{z}$  comme racine.

Conclusion: Tout polynôme à coefficient réel de degré impair admet au moins une solution réelle.

### 4.2.3. Opérations particulières

#### ① Formules d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

#### ② Formule de Moivre

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Ex:  $n=2$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \cdot i \cdot \sin \theta = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

$$\underline{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} + i \underline{2 \sin \theta \cos \theta} = \underline{\cos(2\theta)} + i \underline{\sin(2\theta)}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Rq:  $\cos(a+b)$ ?  $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$   
 $\sin(a+b)$ ?

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

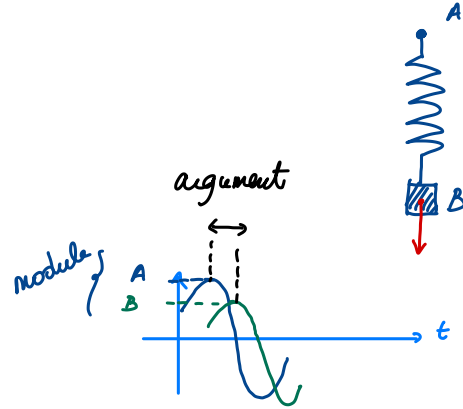
$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$$

$$\underline{\cos(a+b)} + i \underline{\sin(a+b)} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

$$= \underline{\cos a \cos b - \sin a \sin b} + i(\underline{\sin a \cos b + \cos a \sin b})$$

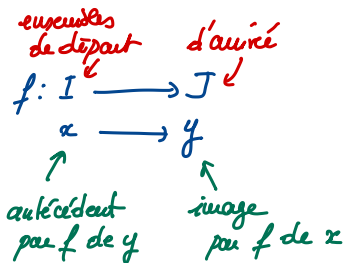
Question: Que peut représenter en physique un nombre complexe?



# CHAPITRE 5 : FONCTIONS NUMÉRIQUES

## 5.1. Définitions

\* Soit  $f$  une **relations** de  $I$  vers  $J$



\*  $f$  est une fonction  $\Leftrightarrow \exists! y / y = f(x)$   
*y unique*

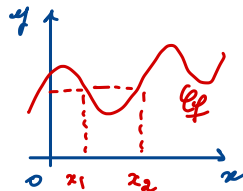
$x$  a au maximum une image par  $f$

\* On appelle  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$

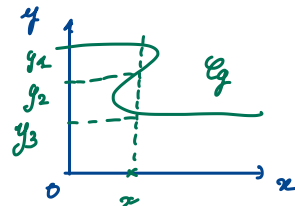
$$\Leftrightarrow \mathcal{C}_f = \{ (x; y) / y = f(x) \}$$

$f$  est l'équation de  $\mathcal{C}_f$ .

Ex:



$f$  est une fonction



$g$  n'est PAS une fonction

\*  $\mathcal{D}_f$  ensemble de définition de  $f$

$$\mathcal{D}_f = \{ x \in I / f(x) \text{ existe} \}$$

\*  $f$  est numérique  $\Leftrightarrow I \subset \mathbb{R}$  et  $J \subset \mathbb{R}$ .

$$* \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

Ex:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}_* = ]-\infty; +\infty[ \setminus \{0\}$$

$$= ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

Notations:  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

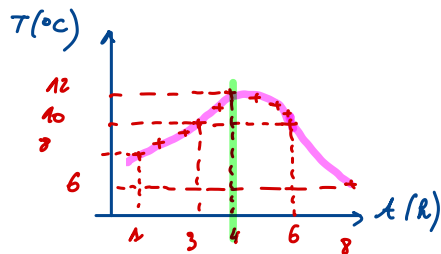
$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

*composé*

$$\hookrightarrow x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

## 5.2. CARACTÉRISTIQUES DES GRAPHES

Ça s'appelle aussi graphe de  $f$ .



Toute étude de  $f$  dépend de l'intervalle d'étude

$f$  est strictement croissante  $\Leftrightarrow x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

$f$  est strictement décroissante  $\Leftrightarrow x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

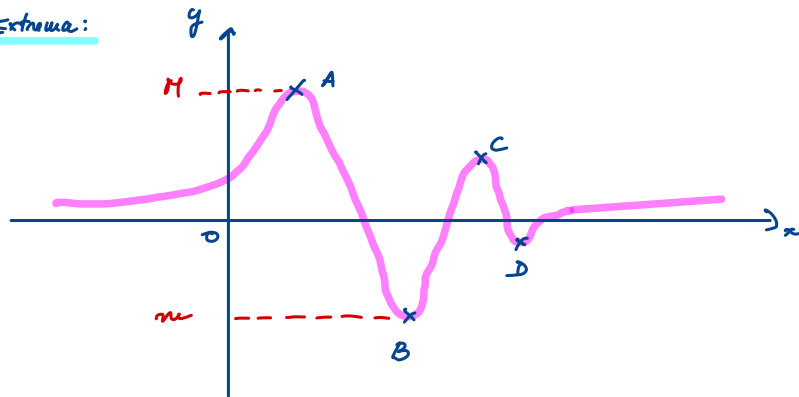
Avant et après 4h dans l'exemple,  $f$  est strictement monotone.

La où  $f$  est monotone :  $A = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$A > 0 \Leftrightarrow f$  strictement croissante

$A < 0 \Leftrightarrow f$  strictement décroissante.

Extrema :



A : maximum global

B : minimum global

C : maximum local

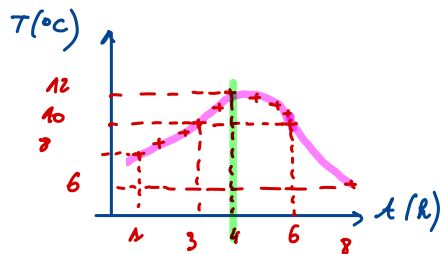
D : minimum local

\* Toute  $y \geq M$  est un majorant de  $f$   
 $M$  est la borne supérieure de  $f$

\* Toute  $y \leq m$  est un minorant de  $f$   
 $m$  est la borne inférieure de  $f$

## 5.2. CARACTÉRISTIQUES DES GRAPHES

Ça s'appelle aussi graphe de  $f$ .



Toute étude de  $f$  dépend de l'intervalle d'étude

$f$  est strictement croissante  $\Leftrightarrow x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

$f$  est strictement décroissante  $\Leftrightarrow x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

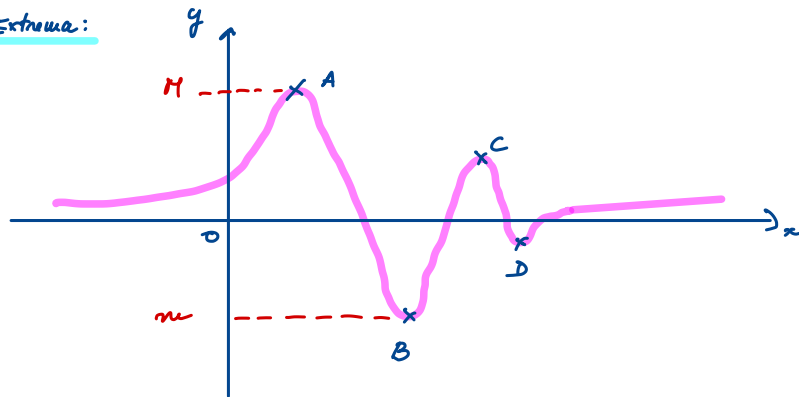
Avant et après 4h dans l'exemple,  $f$  est strictement monotone.

La où  $f$  est monotone :  $A = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$A > 0 \Leftrightarrow f$  strictement croissante

$A < 0 \Leftrightarrow f$  strictement décroissante.

Extrema :



A : maximum global

B : minimum global

C : maximum local

D : minimum local

\* Toute  $y \geq M$  est un majorant de  $f$   
 $M$  est la borne supérieure de  $f$

\* Toute  $y \leq m$  est un minorant de  $f$   
 $m$  est la borne inférieure de  $f$

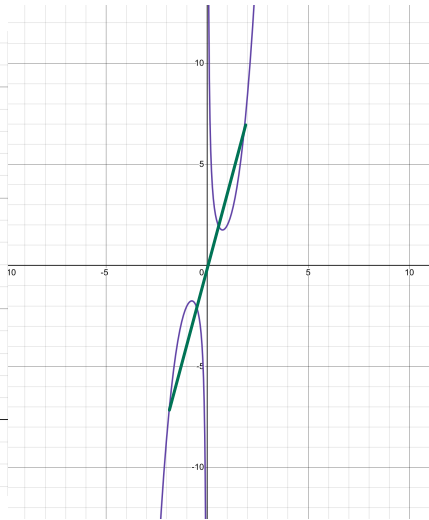
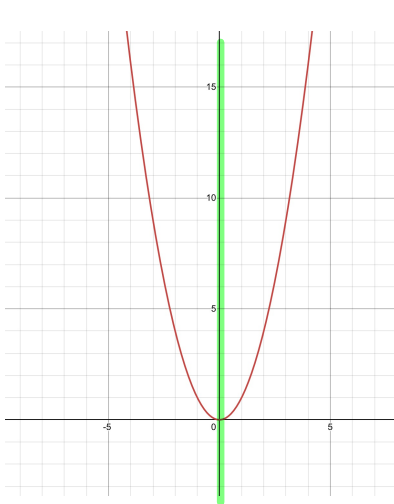
### 5.3. PARITÉ FONCTIONNELLE

Définitions: \*  $f$  est paire  $\Leftrightarrow \mathcal{D}_f$  admet  $(Oy)$  comme axe de symétrie

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\forall x \in \mathcal{D}_f}} \quad f(-x) = f(x).$$

\*  $f$  est impaire  $\Leftrightarrow \mathcal{D}_f$  admet  $O$  comme centre de symétrie

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\forall x \in \mathcal{D}_f}} \quad f(-x) = -f(x)$$



Interêt: Si  $f$  admet une parité, je l'étudie sur  $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ .

NB: \* Si  $f$  admet une parité alors  $\mathcal{D}_f$  est centré en  $O$  et symétrique.

\* Si  $\mathcal{D}_f$  n'est pas centré en  $O$ , alors  $f$  n'admet pas de parité.

Ex:  $f(x) = \frac{1}{x+1}$       $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow f$  n'est ni paire ni impaire.

Règles: Soit  $P$  paires et  $I$  impaires

$$P_2(x) = P_1(-x) \qquad I_1(x) = -I_1(-x)$$

$$(P_1 \times P_2)(-x) = P_1(-x) \times P_2(-x) = P_1(x) P_2(x) = (P_1 \times P_2)(x)$$

Paire  $\times$  Paire  $\rightarrow$  Paire

$$(I_1 \times I_2)(-x) = I_1(-x) \times I_2(-x) = (-I_1(x))(-I_2(x)) = (I_1 \times I_2)(x)$$

Impaire  $\times$  Impaire  $\rightarrow$  Paire

$$(P \times I)(-x) = -(P \times I)(x)$$

Paire  $\times$  Impaire  $\rightarrow$  Impaire

$$(P_1 + P_2)(-x) = P_1(x) + P_2(x) = (P_1 + P_2)(x)$$

Paire + Paire  $\rightarrow$  Paire

$$I_1(-x) + I_2(-x) = -I_1(x) - I_2(x) = -(I_1 + I_2)(x)$$

Impaire + Impaire  $\rightarrow$  Impaire

$$(P+I)(-x) = P(-x) + I(-x) = P(x) - I(x) = (P-I)(x)$$

Pair + Impaire  $\rightarrow$  Ni paire ni impaire  
strictement

Quelques paires :

$\cos(x)$  : paire

$\sin(x)$  : impaire

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} : \frac{I}{P} \rightarrow \text{impaire}$$

$$f(x) = x : \text{impaire}$$

$$f(x) = x^2 : I \times I \rightarrow \text{Pair}$$

$\vdots$

$$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z} \quad f \text{ a la parité fonctionnelle de } n.$$

Ex:  $f(x) = x^2$  impaire

$$f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \text{ paire.}$$

Décomposition des fonctions sans parité

NB:  $f(x) = 0$  est à la fois paire et impaire

Toute fonction s'écrit comme la somme d'une fonction paire  $P$  et d'une fonction impaire  $I$ .

$$\text{Rappel} \quad P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$\text{alors} \quad P(-x) = P(x) \quad I(-x) = -I(x)$$

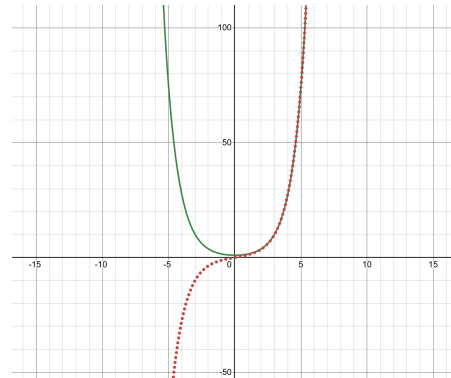
$$P(x) + I(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

Cas de  $\exp(x)$

$$\exp(x) = \underbrace{\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}}_{\text{PAIRE}} + \underbrace{\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}}_{\text{IMPAIRE}}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \quad \text{cosinus hyperbolique}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x) \quad \text{sinus hyperbolique}$$



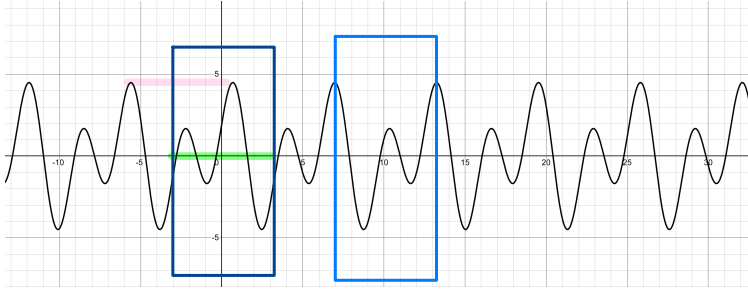
## 5.4. Périodicité

\*  $f$  est  $T$ -périodique ou de période  $T$   
 $\Leftrightarrow \forall x \in \text{def} \quad \exists T / f(x+T) = f(x).$

\* La période de  $f$  est la plus petite valeur positive de  $T$ .

NB:  $\cos$  et  $\sin$  sont  $2\pi$ -périodiques  
 $\tan(x)$  est  $\pi$ -périodique

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$



noté.

→ On va restreindre l'intervalle d'étude sur la largeur d'un motif.

→ On fait des translations  $T$  de la courbe pour avoir  $\mathcal{C}_f$ .

→ En pratique on prend en compte la partie pour réduire l'intervalle d'étude  $IC_{\mathcal{C}_f}$ .

\* Soit  $f$   $T$ -périodique alors  $g(x) = f(\omega x)$  est  $\frac{T}{\omega}$ -périodique  
 $g(x + \frac{T}{\omega}) = f[\omega(x + \frac{T}{\omega})] = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x)$

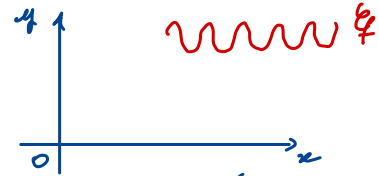
Ex: \*  $\cos(4x)$  est  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ -périodique

\*  $\cos(\omega x + \varphi)$  est  $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique  
↑                      ↑  
pulsation          phase

## 5.5. Fonctions particulières

### 5.5.1. Fonctions sinusoïdales

Problématique:



Wanted: ép. de  $\mathcal{C}_f$

← phase ou déphasage

①  $f(x) = V_m + A \cos(\omega x + \varphi)$

↑                      ↑                      ↑  
valeur moyenne    Amplitude:  $\frac{f_{\max} - f_{\min}}{2}$     pulsation (rad/s)  
composante continue (couplage CC)                       $\omega = 2\pi f$

$A = \sqrt{V^2}$  avec  $V$  valeur efficace

② De même  $f(x) = V_m + A \sin(\omega x + \varphi)$



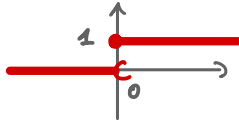
③ Ou encore  $f(x) = V_m + C \cos(\omega x) + S \sin(\omega x)$

amplitudes

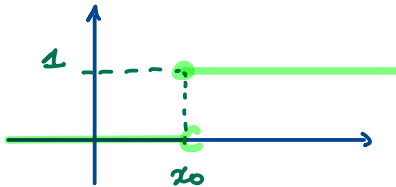
Cette forme est utilisée dès que on procède à des dérivées (ex: équ. diff.).

### 5.5.2. Fonction canonale d'Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

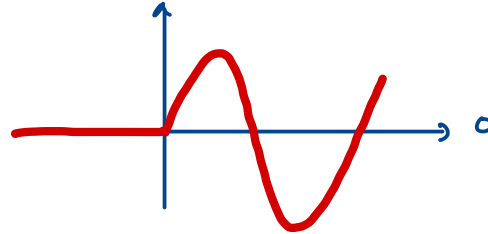


$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

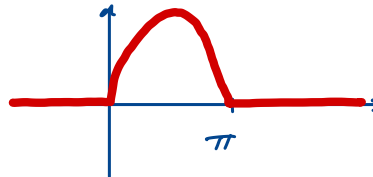


Exemple:  $f(x) = \theta(x) \sin(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Exemple 2:  $g(x) = [\theta(x) - \theta(x - \pi)] \sin(x)$



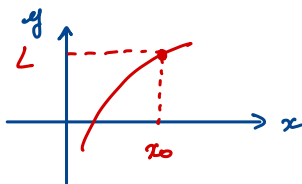
## 5.6. LIMITES

Chercher  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  c'est se demander ce que

fait l'ordonnée de  $f$  quand  $x$  se rapproche de  $x_0$ .

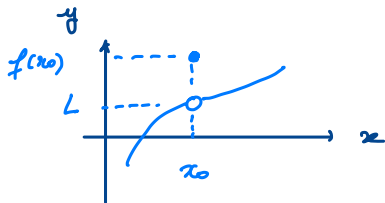
### 5.6.1. Limite en un point

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$  (existe et est finie)



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = f(x_0)$$

↖  $f$  est continue



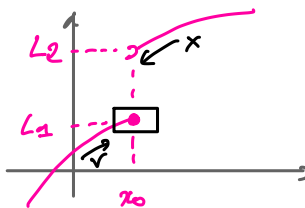
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$$

$f$  continue en  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ .

$f$  continue sur  $I \Leftrightarrow f$  continue en tout  $x \in I$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$  En parcourant  $f$  je peux m'approcher  $x_0$  autant que j'en veux de  $y=L$  à condition de me rapprocher suffisamment de  $x=x_0$ .

Contre exemple:



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  n'existe pas.

On définit :  $L_d = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

↑  
limite à droite  
limite à gauche

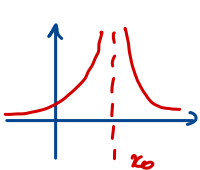
↘  $L_g = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Et donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow L_g = L_d = L$

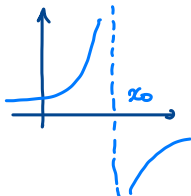
Limite infinie en  $x_0$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ .

En parcourant  $\mathcal{C}_f$  je peux m'éloigner autant que je veux de  $(0, x_0)$  à condition de me rapprocher suffisamment de  $x_0$ .

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

→ Comportement asymptotique

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$   $\exists \Delta: x = x_0$  que  $\mathcal{C}_f$  ne coupe pas.  
appelée asymptote verticale (A.V)

NB: L'AV est dans un trou de  $\mathcal{C}_f$ .

### 5.6.2. Limites à l'infini

$$* \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

En parcourant  $\mathcal{C}_f$  je peux m'approcher autant que je veux de  $y = L$  à condition de m'éloigner suffisamment de  $(0, y)$ .

⇒  $\Delta: y = L$  est asymptote horizontale (A.H) à  $\mathcal{C}_f$   
en  $+\infty$  (ou en  $-\infty$ )

Etude de la position relative:  $\Delta: y = L$  est A.H à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x)}_{\text{ordonnée de } \mathcal{C}_f} - \underbrace{L}_{\text{ordonnée de } \Delta} = 0.$$

2 possibilités :  $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - L = 0^+ \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\Delta$ .

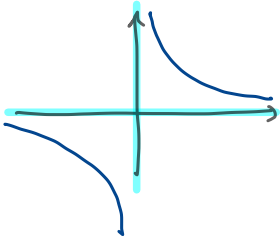
$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - L = 0^- \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$  est en-dessous de  $\Delta$ .

Ex:  $f(x) = 1/x$   $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$\Delta: y=0$  est A.H à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .  
 $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\Delta$ .

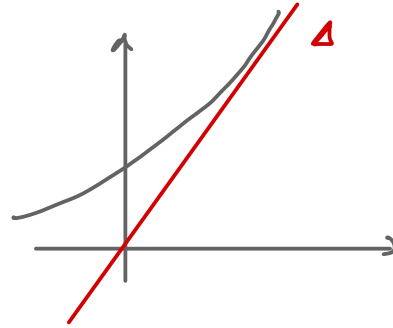
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$   $\Rightarrow \Delta$  est aussi A.H en  $-\infty$ .  
 $\mathcal{C}_f$  est en-dessous de  $\Delta$ .



\*  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .

Je peux m'éloigner autant de  $(0, x)$  à condition de m'éloigner suffisamment de  $(0, y)$

Ex:



$\Rightarrow$  Recherche d'une asymptote oblique (A.O):

$$\Delta: y = mx + p \text{ est A.O à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$$

$\uparrow$  ordonnée de  $\mathcal{C}$                        $\nwarrow$  ordonnée de  $\Delta$ .

Rq:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0^+ \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\Delta$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0^- \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$  est en-dessous de  $\Delta$ .

### 5.6.2. Recherche d'une A.O.

Wanted:  $m$  et  $p$

D'abord vérifier que  $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .

#### ① Recherche de $m$

$$\lim_{\pm\infty} f(x) - (mx+p) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\pm\infty} \frac{f(x) - mx - p}{x} = 0$$

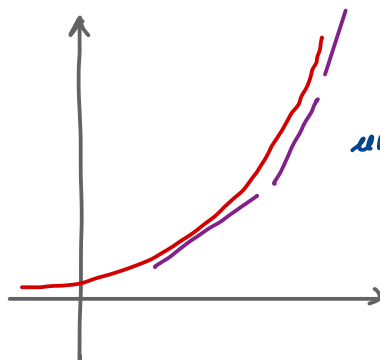
$$\Leftrightarrow \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{p}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \right) - m = 0 \Leftrightarrow m = \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

\*  $m \in \mathbb{R}^*$   $\rightarrow$   $m$  est direction asymptotique  
 $\rightarrow$  recherche de  $p$ .

\*  $m \rightarrow \pm\infty$ . Ex  $m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .

Ex:  $x^2$ ;  $x^3$ ;  $e^x$

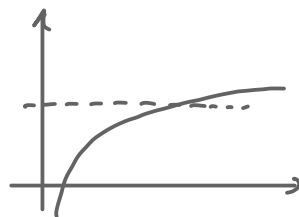


Pas d'A.O. mais  
une branche parabolique  
de direction (Oy).

$\rightarrow$  pas de recherche de  $p$ .

$$* m=0. \quad \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

pas d'A.O. mais une  
branche parabolique de  
direction (Ox)



Ex:  $\sqrt{x}$ ;  $\ln(x)$   
(non majorés)

$$\text{Rq: } m=0 \Rightarrow p = \lim_{\pm\infty} f(x) - mx \\ = \lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

## ② Recherche de $p$

Condition nécessaire :  $m \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{\pm\infty} f(x) - mx - p = 0 \Rightarrow p = \lim_{\pm\infty} f(x) - mx$$

\*  $p \in \mathbb{R} \rightarrow \Delta: y = mx + p$  déterminée

\*  $p \rightarrow \pm\infty$ . Pas d'A.O mais direction asymptotique  $m$ .

### 5.6.3 Branches infinies

$\mathcal{C}_f$  présente une branche infinie  $\forall H(x, y) \in \mathcal{C}_f$  tel que  
 $x \rightarrow \pm\infty$  ou/et  $y \rightarrow \pm\infty$ .  
 $f(x) \rightarrow \pm\infty$ .

Étudier les branches infinies, c'est :

- ① étudier leurs positions potentielles
- ② calculer les limites
- ③ déterminer les eq. des asymptotes
- ④ déterminer les positions relatives

Remarque ①: les branches infinies se trouvent dans les trous de  $\mathcal{C}_f$ .

### 5.7. Détermination des limites

On part des limites usuelles  $\rightarrow$  formulaire

Tant qu'il n'y a pas d'antagonisme, on calcule la limite. Ex:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\ln x}_{+\infty} + \underbrace{x}_{+\infty} = +\infty$ .

Si y a un antagonisme  $\rightarrow$  forme indéterminée (F.I)

Dans ce cas, on tire la F.I. Pour cela plusieurs possibilités.

#### ① Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+ \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_0 x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Si désaccord  
expo l'emporte sur  
le polynôme qui  
l'emporte sur  $\ln$ .

### ③ Forme conjuguée → TD ( $\infty - \infty$ )

### ③ Factorisation

Ex:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty.$

(Diagram:  $x$  is circled with an arrow pointing to  $+\infty$ , and  $1 - \frac{e^x}{x}$  is circled with an arrow pointing to  $-\infty$ .)

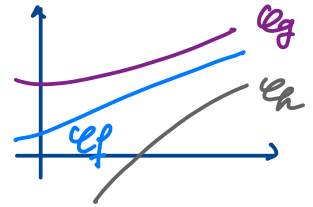
Ex:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right)$

(Diagram: The expression in parentheses is circled in red with an arrow pointing to  $> 1$ .)

À L'INFINI le polynôme se comporte comme le terme de plus haut degré.

Ex:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$

### ④ Encadrement (gendarmes)



$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$   
sur l'intervalle  
d'intérêt

$$\lim_{x_0} h(x) \leq \lim_{x_0} f(x) \leq \lim_{x_0} g(x)$$

NB: très utile aux infinis.

Ex:  $f(x) = x + \cos x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1$

(Diagram:  $x - 1$  and  $x + 1$  are circled in red with arrows pointing to  $+\infty$ . Below,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  is written.)

Corollaire: Ex:  $\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} \cos x = 0$

(Diagram:  $\frac{1}{x}$  and  $\cos x$  are circled in blue. An arrow points from  $\frac{1}{x}$  to  $0$  with the label  $x \rightarrow +\infty$ . The word "bornée" is written next to  $\cos x$ .)

Si  $f(x) = g(x) \cdot b(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$

$b(x)$  bornée

Alors  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$

## ⑤ Règle de l'Hôpital

Objectif: lever les F.I. " $\frac{0}{0}$ "

Conditions:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$   
ou infinis.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

De plus:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)$  existent.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=0}}{x - x_0}}{\frac{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0}}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex:  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_0 f(x) = \lim_0 \frac{\sin x}{x} = \lim_0 \frac{\cos x}{1} = 1.$$

## 5.8. Éléments de continuité'

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### 5.8.1 Prolongement par continuité'

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{af} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

Soit  $\tilde{f}(x)$  le prolongement par continuité de  $f$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

NB:  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

$$\sin c(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{sinus cardinal.}$$

## ⑤ Règle de l'Hôpital

Objectif: lever la F.I. " $\frac{0}{0}$ "

Conditions:  $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$   
ou infinis.

$$\lim_{x_0} f(x) = \lim_{x_0} g(x) = 0$$

De plus:  $\lim_{x_0} f'(x)$  et  $\lim_{x_0} g'(x)$  existent.

$$\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0} \frac{\frac{f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=0}}{x - x_0}}{\frac{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0}}{x - x_0}} = \lim_{x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex:  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_0 f(x) = \lim_0 \frac{\sin x}{x} = \lim_0 \frac{\cos x}{1} = 1.$$

## 5.8. Éléments de continuité'

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$$

### 5.8.1 Prolongement par continuité'

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{df} = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

$$\lim_1 \frac{\ln x}{x-1} = \lim_1 \frac{1/x}{1} = 1$$

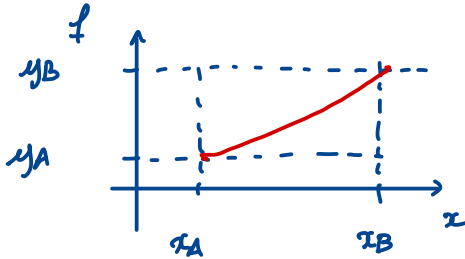
Soit  $\tilde{f}(x)$  le prolongement par continuité de  $f$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

NB:  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

$$\sin c(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{sinus cardinal.}$$

### 5.8.2 Valeurs intermédiaires

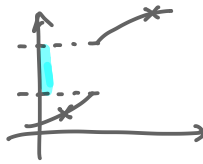


Soit  $f$  continue sur  $[x_A; x_B]$  avec  $y_A = f(x_A)$

et  $y_B = f(x_B)$  ALORS

$$\forall y \in ]y_A; y_B[ \quad \exists c \in ]x_A; x_B[ \quad / \quad f(c) = y$$

Contre-exemple:



Corollaire #1 : Si  $f$  continue sur  $I$  change de signe alors  $\exists x_0 \in I \quad / \quad f(x_0) = 0$ .

Ex: chercher  $x_0 \quad / \quad x_0 = \cos x_0$  à  $10^{-2}$  près.

$$\Rightarrow x_0 - \cos x_0 = 0 \Rightarrow f(x) = x - \cos x$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Dichotomie:  $f(0) = -1 \quad f(1) = 0,46$

$$x_0 \in ]0; 1[$$

$$f(0,5) = -0,378 \Rightarrow x_0 \in ]0,5; 1[$$

$\vdots$

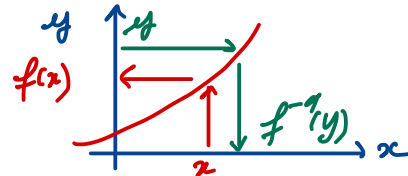
$$\left. \begin{array}{l} f(0,73) = -0,0152 \\ f(0,74) = 0,0015 \end{array} \right\} x_0 \in ]0,73; 0,74[$$

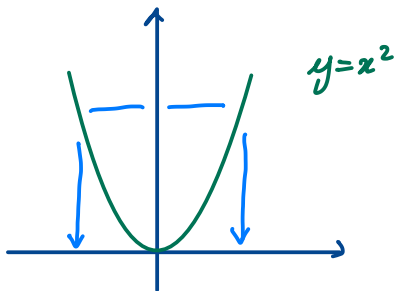
$\Rightarrow$  Méthode numérique

Corollaire #2 : contraposée

Si  $f$  continue sur  $I$  ne s'y annule pas, elle n'y change pas de signe.

### 5.8.3. Bijection réciproque





pour voir  $f^{-1}$  je choisis un intervalle où  $f$  est bijective

Def:  $f$  bijective de  $I$  sur  $J$

$$\Leftrightarrow \forall y \in J \exists ! x \in I$$

$\Rightarrow f$  continue et monotone sur  $I$ .

Si  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans  $J$  il existe

$f^{-1}$  bijection réciproque  $f^{-1}: J \rightarrow I$

avec  $\bullet f \circ f^{-1}(x) = x$  et  $f \circ f^{-1}(x) = x$

$\bullet f^{-1}$  continue et de même sens de variation que  $f$ .

$\bullet \mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à  $\Delta: y=x$

$$\bullet (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

Preuve:  $f \circ f^{-1}(x) = x$

$$(f \circ f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) \times f' \circ f^{-1}(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

Ex:  $\tan(x) \longrightarrow \arctan(x)$ ?

$\tan(x)$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$

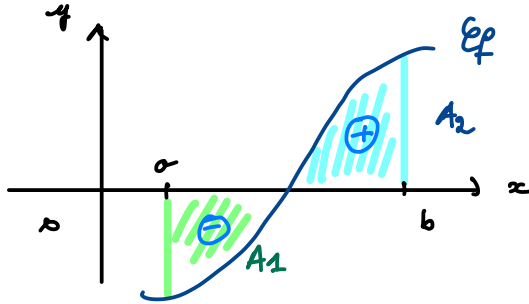
$$\Rightarrow \arctan(x): \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

## Chapitre 6 : Intégrales

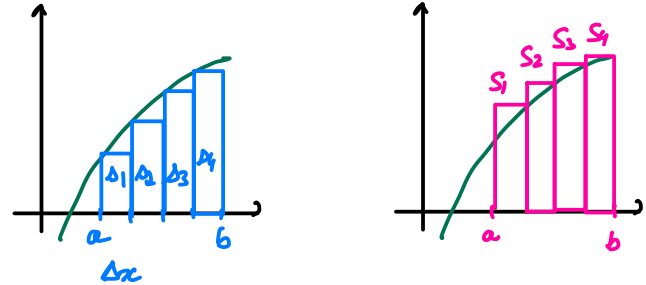
$$I = \int_0^2 5x^2 (x^3 + 5)^2 dx$$

### 6.1 Du calcul d'aire à la primitive



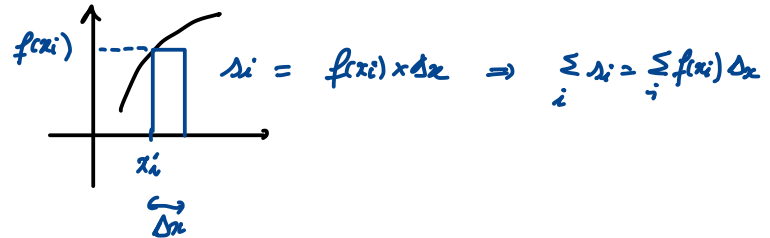
$$\int_a^b f(x) dx = A_1 + A_2$$

$$A_1 < 0 \\ A_2 > 0$$



$$\sum_{i=1}^4 \Delta_i < \int_a^b f(x) dx < \sum_{i=1}^4 S_i$$

Plus  $\Delta x \rightarrow 0$  plus je me rapproche de la valeur de l'intégrale.



$$\int_a^b f(x) dx$$

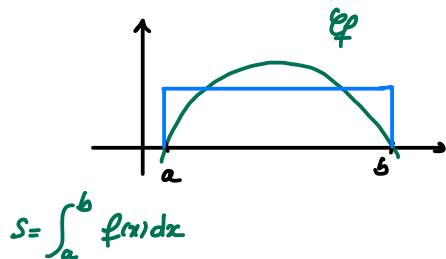
↑  
Somme entre  $x=a$  et  $x=b$  de tous les rectangles de surface  $f(x)dx$ .

⇒ L'intégrale hérite de toutes les propriétés de la somme

⇒  $\triangle$   $\int_a^b f(x)g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \times \int_a^b g(x) dx$

⇒ Charles:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

### 6.1.1. Moyenne et intégrale



$$R = (b-a) \times \underbrace{\langle f \rangle}_{\text{valeur moyenne de } f}$$

$$S = R.$$

$$\Rightarrow \langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

### 6.1.2. Intégrale et primitive

Définition: On appelle  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Soit  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$F(a) = \int_{x_0}^a f(x) dx \quad F(b) = \int_{x_0}^b f(x) dx$$

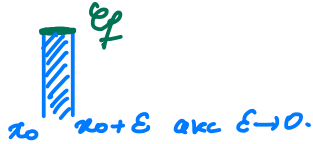
$x_0 \in \mathbb{R}$  n'importe quelle valeur.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx \\ &= \int_{x_0}^b f(x) dx - \int_{x_0}^a f(x) dx = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive de  $f$ .

Wanted:  $F$ .



$$\int_{x_0}^{x_0+\epsilon} f(x) dx = F(x_0+\epsilon) - F(x_0) = f(x_0) \cdot \epsilon$$

$$\Rightarrow f(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x_0+\epsilon) - F(x_0)}{\epsilon}$$

$$f(x_0) = F'(x_0)$$

des primitives se déterminent en inversant l'opération de dérivation.

$\Rightarrow$  Pour calculer  $\int_a^b f(x) dx$  je dois déterminer une  $F(x)$ .

## 6.2. Méthodes d'intégration

Méthode: 4 questions.

- ① Est-ce une forme immédiate?
- ② Est-ce une fraction rationnelle?
- ③ Puis-je faire une intégration par parties? (IPP)
- ④ Je fais un changement de variable

### 6.2.1 Formes immédiates

- ① Est-ce que  $f(x)$  est élémentaire?
- ② Est-ce une forme  $u \cdot u^n$ ?
- ③ Est-ce une forme  $u' \cdot u \cdot v$ ?

$$\Rightarrow \underline{\text{Ex:}} \quad I = \int_a^b 2 \cos x \, dx = \left[ 2 \sin(x) \right]_a^b$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Ex:}} \quad I = \int_1^2 5x^2 (x^3 + 5)^2 dx$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Ex:}} \quad I = \int_1^2 5x^2 (x^3+5)^2 dx$$

$$f(u) = C u' u^n \quad C \in \mathbb{R}. \quad f(x) = 5x^2 (x^3+5)^2$$

$$CQJSi = u' u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad \begin{matrix} u = x^3+5 \\ n = 2 \end{matrix}$$

$$= 3x^2 (x^3+5)^2$$

$$CQJVI: f(x) = \frac{5}{3} \cdot 3x^2 (x^3+5)^2$$

$$F(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{(x^3+5)^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow I = \left[ \frac{5}{9} (x^3+5)^3 \right]_1^2 = \dots$$

$$\underline{\text{Ex:}} I = \int_0^1 x \exp(x^2) dx.$$

$$\rightarrow \text{not du } v' u' o v \quad \begin{matrix} v(x) = x^2 \\ u'(x) = \exp(x) \end{matrix}$$

$$CQJSi = v' u' o v = 2x \times \exp(x^2)$$

$$CQJVI = f(x) = \frac{1}{2} v' u' o v \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} u o v(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \exp(x^2) + C.$$

## 6.2.2. Fractions rationnelles

déf:  $f(x)$  est une fraction rationnelle  $\Leftrightarrow$

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

où  $N(x)$  et  $D(x)$  sont des polynômes.

$\rightarrow$  Chapitre 7.

## 6.2.3. Intégration par parties

$$(u(x) v(x))' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) v(x) = (u(x) v(x))' - u(x) v'(x)$$

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = \underbrace{\int_a^b (u \cdot v)' dx}_{[u(x) \cdot v(x)]_a^b} - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b u'(x) v(x) dx = \left[ u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Objectif: Calculer  $[u \cdot v]_a^b$

Je peux faire une IPP de  $\int_a^b f(x) dx$

$\Rightarrow$  Je peux écrire  $f(x) = u'(x) \times v(x)$

dont on prend une primitive.

$v$  fonction à dériver.

Ex:  $\int_0^\pi x \sin(x) dx$

Je pose  $v(x) = x$

Aide à la décision:

A L P E S  $\rightarrow$  sinusoidales.

actan arcsin log polynôme

$\rightarrow$  Permet de choisir  $v(x)$  à dériver

Ex:  $\int_0^1 x \arctan(x) dx$   $v(x) = \arctan(x)$

$$I = \int_0^\pi x \sin(x) dx$$

$$u'(x) = \sin(x) \rightarrow u(x) = -\cos x$$

$$v'(x) = 1 \leftarrow v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^\pi x \sin x dx = \left[ -x \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi 1(-\cos x) dx \\ &= \underbrace{-\pi \cos \pi + 0 \cos 0} + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= \pi + \int_0^\pi \cos x dx \end{aligned}$$

STOP

Méthode IPP:

[1] J'écris  $f(x)$  comme un produit de deux fonctions

[2] Je choisis  $v(x)$  la fonction à dériver

[3] J'exprime  $[uv]_a^b - \int_a^b uv' dx$

[4] Je calcule le crochet

Autre ex:  $I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$

[1]  $x \times \arctan x$

[2]  $v(x) = \arctan x$

[3]  $u'(x) = x \longrightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$

$v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \longleftarrow v(x) = \arctan x$

$I = \left[ \frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$

[4]  $\left[ \frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \arctan 1 - 0 \arctan 0$   
 $= \frac{\pi}{8} \quad \text{STOP IPP}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$

#### 6.2.4. Changement de variable

Par l'exemple. Ex:  $I = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} \, dx$

On pose  $x = 2t$ .

Méthode en 4 étapes:

[1.] Je change l'élément

[2.] Je change l'intégrande/l'expression

[3.] Je change les bornes

[4.] Je ré-écis.

[1.]  $x = 2t \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2$

$\Rightarrow dx = 2dt$

[2.]  $\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{(2t)^2+4} = \frac{1}{4t^2+4}$

[3.]  $x$  va de 0 à 2  
 $2x$  va de 0 à 2  
 $t$  va de 0 à 1

$$\begin{aligned} [4] \quad I &= \int_0^1 \frac{1}{4t^2 + 4} dt = \int_0^1 \frac{2}{4(t^2 + 1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt \end{aligned}$$

STOP Changement de variable.

↳ Ensuite, méthode d'intégration générale.

→ (1) Forme immédiate → oui

$$I = \frac{1}{2} \left[ \arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

# CHAPITRE 7 : Polynômes et fractions rationnelles

## 7.1. Polynômes

$P(x)$  est une fonction polynôme  $\Leftrightarrow$

$$P(x) = \underbrace{a_n x^n}_{\text{terme dominant}} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + \underbrace{a_0}_{\text{terme constant}}$$

terme dominant

terme constant

(1.)  $n = \deg(P)$  degré de  $P$

(2.)  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$a_k$  s'appellent les coefficients

$\Rightarrow$  le polynôme est à coefficients réels si tous les  $a_k$  sont réels.

(3.) Soient  $A(x)$  et  $B(x)$  deux polynômes tels que  $\deg(A) \geq \deg(B)$  alors il existe deux polynômes uniques  $Q(x)$  et  $R(x)$  ( $a$  une constante multiplicative près) tels que

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(B)$$

Ex: 
$$\frac{17}{3} \mid \frac{3}{5}$$

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline R & Q \end{array}$$

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{R(x)}{B(x)}}_{\text{partie fractionnaire}}$$

NB1: La partie entière s'intègre aux la question 1

NB2: On va s'intéresser à la partie fractionnaire.

(4.) Si  $R(x) = 0$  alors  $A$  est divisible par  $B$   
 $(\frac{A}{B} = Q)$

(5.) 
$$\int_a^b \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int_a^b Q(x) dx + \int_a^b \frac{R(x)}{B(x)} dx$$

😊

(6.) Division de polynômes

Ex: 
$$I = \int_{-1}^0 \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1}{x - 1} dx$$

[1] Est-ce que  $\deg N < \deg D$ ? Non

→ Division Euclidienne pour réduire la fraction

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1 & x - 1 \\
 \underline{-(x^4 - x^3)} & \\
 0 + 3x^3 + 3x^2 + 5x - 1 & \\
 \underline{-(3x^3 - 3x^2)} & \\
 0 + 6x^2 + 5x - 1 & \\
 \underline{-(6x^2 - 6x)} & \\
 0 + 11x - 1 & \\
 \underline{-(11x - 11)} & \\
 0 + 10 & 
 \end{array}$$

$$I = \int_{-1}^0 \left[ \underbrace{x^3 + 3x^2 + 6x + 11}_{\text{élémentaires}} + \frac{10}{x-1} \right] dx$$

$\frac{u'}{u}$

$$I = F(0) - F(-1)$$

avec  $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + 3x^2 + 11x + 10 \cdot \ln|x-1| + 0$

valeur absolue.

## 7.2 Racines de polynômes

(1)  $b$  est racine de  $P(x) \Leftrightarrow P(b) = 0$ .

(2)  $b$  est racine de  $P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-b) Q(x)$

$\uparrow$   
polynôme

Ex:  $P(x) = x^2 - 5x - 6$

$$\Delta = 49 = 7^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5-7}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{5+7}{2} = 6$$

$$P(x) = (x+1)(x-6).$$

(3)  $b$  est racine de  $P \Leftrightarrow P$  est divisible par  $(x-b)$

(4)  $b$  est racine multiple d'ordre  $N$  de  $P(x)$

$$\Leftrightarrow P(x) = (x-b)^N \cdot Q(x)$$

(5)  $b$  racine d'ordre  $N$  de  $P(x)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & P(b) = 0 \\ & P'(b) = 0 \\ & P''(b) = 0 \\ & \dots \\ & P^{(N-1)}(b) = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} P(b) = 0 \\ P'(b) = 0 \\ P''(b) = 0 \\ \dots \\ P^{(N-1)}(b) = 0 \end{aligned}} \right\} N \text{ polynômes}$$

Ex: Trouver les racines de  $P$  sachant qu'il admet une racine double

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4.$$

Wanted: 3 racines de  $\mathbb{C}$ .

Soit  $b$  racine double

$$P(b) = 0$$

$$P'(b) = 0 = 3x^2 - 4x - 7 \Rightarrow \Delta = 100 = 10^2$$

$$b_1 = \frac{4-10}{6} = -1$$

$$b_2 = \frac{4+10}{6} = \frac{7}{3}$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow b = -1 \quad \text{puis } x-a = \frac{P(x)}{(x+1)^2}$$

### ⑥ Règle d'Alembert

Un polynôme de degré  $N$  admet  $N$  racines dans  $\mathbb{C}$  en comptant leurs multiplicités.

⑦ Soit  $P$  à coefficients réels. Soit  $b$  racine de  $P$ .

$$P(b) = 0 = \sum_{k=0}^n a_k b^k = 0$$

$$\begin{aligned}\overline{P(b)} &= \overline{0} = 0 = \overline{\sum_{k=0}^n a_k b^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \overline{a_k b^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{b^k} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \overline{b}^k = P(\overline{b})\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{b}) = 0.$$

Si  $b \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$  à coefficients réels alors  $\overline{b}$  est aussi racine.

⑧ Test polynôme à coef. réels de degré impair admet un nombre impair de racines réelles.

### 7.3. Fractions rationnelles

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \quad N(x) \text{ et } D(x) \text{ sont des polynômes}$$

Deux cas: ①  $\deg N \geq \deg D \rightarrow$  division euclidienne

$$\begin{array}{r} N \\ R \overline{) D} \\ \hline Q \end{array} \quad \frac{N}{D} = Q + \left( \frac{R}{D} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{partie} \\ \text{fractionnaire} \\ \rightarrow \text{cf } \textcircled{2} \end{array}$$

partie entière  
intégrable  
avec la méthode 1

②  $\deg N < \deg D$

Je décompose en éléments simples

Def:  $b$  est pôle de  $f(x)$

$\Leftrightarrow$   
 $b$  est racine de  $D(x)$ .

### 7.3.1. Éléments simples (ES)

#### ① ES de 1<sup>ère</sup> espèce (ES1)

$$es(x) = \frac{A}{(x-b)^N} \quad \begin{matrix} A \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{C} \end{matrix} \quad \begin{matrix} b \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{C} \end{matrix} \quad N \in \mathbb{N}^*$$

↳ s'intègre avec une forme immédiate.

#### ② ES de 2<sup>e</sup> espèce (ES2)

Uniquement lorsque j'intègre dans  $\mathbb{R}$ .

$$es(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^N} \quad \begin{matrix} A \in \mathbb{R} & p \in \mathbb{R} & N \in \mathbb{N}^* \\ B \in \mathbb{R} & q \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

↳ Changement de variable

### 7.3.2. Théorème de décomposition

Toute fraction rationnelle s'écrit comme une somme d'ES.

① Quels sont ces ES ?

→  $\forall b \in \mathbb{R}$  j'associe 1ES1 par multiplicité

$\forall b \in \mathbb{C} \quad \exists \bar{b} \in \mathbb{C}$  auxquels j'associe 1ES2 par multiplicité.

Exemples: 1.  $f(x) = \frac{x+4}{(x-4)(x+2)}$  pôles:  $4(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1ES1$   
 $-2(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1ES1$

$$\Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

2.  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$  pôles:  $1(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1ES1$   
 $-1(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1ES1$

$$\exists A \text{ et } B / f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

3.  $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2(x+4)}$  pôles:  $1(2) \in \mathbb{R} \rightarrow 2ES1$   
 $-4(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1ES1$

$$\exists A_1, A_2, B \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+4}$$

4.  $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$  pôles:  $1(1) \in \mathbb{R} \rightarrow 1ES1$   
 $1 \text{ couple } (1) \in \mathbb{C} \rightarrow 1ES2$

$$\Rightarrow \exists A, B_1, B_2 \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+B_2}{x^2+x+1}$$

$$5. f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+B_2}{x^2+x+1} + \frac{B_3x+B_4}{(x^2+x+1)^2}$$

### 7.3.3 Identification des constantes

⚠ Ne pas sommer au même dénominateur.

$$\text{Ex: } f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$(x-2)f(x) = A \frac{x-2}{x-3} + B \frac{x-2}{x-2} = A \frac{x-2}{x-3} + B$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} A \frac{x-2}{x-3} + B = B$$

$$\Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-3} = -3$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-2} = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

$$\Rightarrow F(x) = 4 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + K \quad K \in \mathbb{R}.$$

Méthode #1: si  $p(x) \in \mathbb{R}$   $A_p = \lim_p (x-p)f(x)$

$$\text{Ex: } f(x) = \frac{x+1}{(x-4)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{(x-4)^2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-4)^2} = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x-4)f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} A_1 \frac{x-4}{x-4} + A_2 \frac{x-4}{(x-4)^2} + B \frac{x-4}{x-3} \rightarrow 0$$

↳ ne fonctionne pas ici

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} A_1 \frac{(x-4)^2}{x-4} + A_2 \frac{(x-4)^2}{(x-4)^2} + B \frac{(x-4)^2}{x-3} = A_2$$

Méthode #2: Soit  $p(x) \in \mathbb{R}$  alors

$$A_N = \lim_p (x-p)^N f(x)$$

$$A_2 = \lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-3} = 5$$

Méthode #3 Calcul de  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k f(x)$   $k=1, 2, 3$  etc...

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{A_1 x}{x-4}}_{A_1} + \underbrace{\frac{A_2 x}{(x-4)^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{Bx}{x-3}}_B = A_1 + B$$

De même  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2+x)}{(x-4)^2(x-3)} = 0$

$$\Rightarrow A_1 + B = 0 \Rightarrow A_1 = -B = -4$$

$$f(x) = \frac{-4}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2} + \frac{4}{x-3}$$

$$F(x) = -4 \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + 4 \ln|x-3| + K$$

Méthode #4: Si elles sont définies, j'ai calculé  
 $f(0), f(4), f(1-x)$  etc.

