

1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) f(x) = \frac{1}{x-1} & 2) f(x) = \frac{1}{x^2-4} & 3) f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6} & 4) f(x) = \sqrt{x^2+3x-4} \\ 5) f(x) = \frac{1}{\cos x - \sin x} & 6) f(x) = \ln(1-x) & 7) f(x) = \ln(2x^2+3x-2) & 8) f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \end{array}$$

2 Parité et symétries

2.1 Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) f(x) = |x| & 2) f(x) = x^2 & 3) f(x) = x^3 & 4) f(x) = \sqrt{x} \\ 5) f(x) = x^{3/2} & 6) f(x) = 2x+1 & 7) f(x) = 2x^2+1 & 8) f(x) = \frac{x}{x^2+1} \\ 9) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} & 10) f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} & 11) f(x) = \sin(2x) & 12) f(x) = \sin(x^2) \\ 13) f(x) = \cos(3x) & 14) f(x) = \cos(x^3) & 15) f(x) = \tan(x) & 16) f(x) = \tan(x^2+1) \\ 17) f(x) = \ln(x) & 18) f(x) = \sin \circ \ln(x) & 19) f(x) = \ln \circ \sin(x) & 20) f(x) = \exp(x) \\ 21) f(x) = \sin \circ \exp(x) & 22) f(x) = \exp \circ \cos(x) & & \end{array}$$

2.2 Quelles règles peut-on énoncer concernant la parité de fonctions composées ?

2.3 À l'aide du cercle trigonométrique, étudier la parité des fonctions

$$\begin{array}{l} f : [-1;1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2] \quad ; \quad g : [-1;1] \rightarrow [0; \pi] \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2; \pi/2[\\ x \rightarrow \arcsin(x) \quad \quad \quad x \rightarrow \arccos(x) \quad \quad \quad x \rightarrow \arctan(x) \end{array}$$

2.4 On considère les fonctions $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x^3 - x + 2$ de graphes respectifs C_1 et C_2 . Étudier les éventuels axes ou centres de symétrie de C_1 et C_2 .

3 Périodicité et transformations de graphes

3.1 Étudier la parité et la périodicité des fonctions ci-après et déterminer l'ensemble d'étude restreint.

$$\begin{array}{llll} 1) f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) & 2) f(x) = \cos(3x) + 4\sin(2x) & 3) f(x) = \sin^2(x) & 4) f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right) \\ 5) f(x) = 1 + \cos^2(2x) & 6) f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} & 7) f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x) & 8) f(x) = x + \sin(x) \end{array}$$

3.2 Tracer sur $[-2; 6]$ la courbe représentative de la fonction f suivante :

$$f \text{ est 4-périodique et } \begin{cases} f(x) = x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ f(x) = 4 - x & \text{si } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

et en déduire les graphes des courbes de

(a) $f_1(x) = 1 + f(x)$ et $f_2(x) = -2f(x)$;

(b) $g_1(x) = f(x-2)$ et $g_2(x) = f(2x)$.

(c) Conclure enfin sur la nature des transformations du graphe C_f associées aux opérations $\lambda \cdot f(x)$, $\lambda + f(x)$, $f(\lambda \cdot x)$ et $f(x - \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

4 Fonctions particulières

4.1 Soit la fonction de Heaviside $\theta(x)$ définie par

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Tracer les fonctions :

(a) $f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$;

(b) et $g(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$.

4.2 On souhaite créer une fonction causale $g(x)$ qui soit :

- nulle pour $x < \pi$;
- sinusoidale, 2π -périodique, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2 pour $x \geq \pi$;
- et telle que $g(\pi) = 2$.

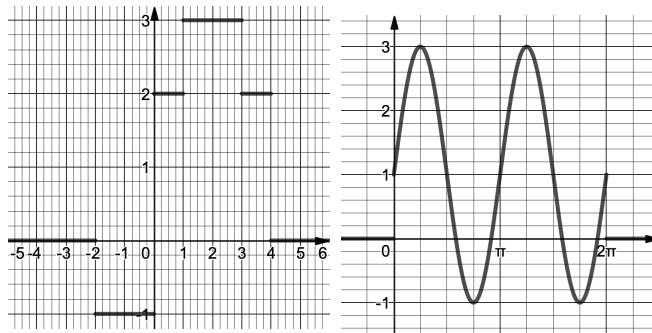
(a) Tracer le graphe de $g(x)$.

(b) Déterminer $g(x)$ à l'aide de la fonction de Heaviside.

4.3 Exprimer la fonction f ayant les caractéristiques suivantes :

- g est sinusoidale, de valeur moyenne 2, d'amplitude 3, et de période $4\pi/3$ pour $x \in [-\pi/4; 2\pi]$;
- en dehors de ces valeurs de x , g est nulle;
- et g est maximale en $x = 2\pi/9$.

4.4 Donner les équations des courbes représentées sur les figures ci-dessous.



1 Ensembles de définition

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

5) $f(x) = \frac{1}{\cos x - \sin x}$

6) $f(x) = \ln(1-x)$

7) $f(x) = \ln(2x^2+3x-2)$

8) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{+1\}$ 2) $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

3) $x^2-x-6=0 \Rightarrow x=-3; x=2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; +2\}$

4) $x^2+3x-4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4 \text{ et } x \geq 1 \Rightarrow D_f =]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$

5) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

7) $2x^2+3x-2 > 0 \Rightarrow x < -2; x > \frac{1}{2} \Rightarrow D_f =]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

8) $D_f = \mathbb{R}^*$ Mais $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ car $\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \dots$ et $x \rightarrow 0$

On définit $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

et $D_g = \mathbb{R}$

* On peut aussi utiliser la règle de l'Hospital

2.1 Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = |x|$ P

2) $f(x) = x^2$ P

3) $f(x) = x^3$ I

4) $f(x) = \sqrt{x}$ d

5) $f(x) = x^{3/2}$ d

6) $f(x) = 2x+1$ d

7) $f(x) = 2x^2+1$ P

8) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ I

9) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ P

10) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ d

11) $f(x) = \sin(2x)$ I

12) $f(x) = \sin(x^2)$ P

13) $f(x) = \cos(3x)$ P

14) $f(x) = \cos(x^3)$ P

15) $f(x) = \tan(x)$ I

16) $f(x) = \tan(x^2+1)$ P

17) $f(x) = \ln(x)$ d

18) $f(x) = \sin \circ \ln(x)$ d

19) $f(x) = \ln \circ \sin(x)$ d

20) $f(x) = \exp(x)$ d

21) $f(x) = \sin \circ \exp(x)$ d

22) $f(x) = \exp \circ \cos(x)$ P

2.2: rien du tout o Pair $\rightarrow$ Pair, l'inverse n'est pas vrai

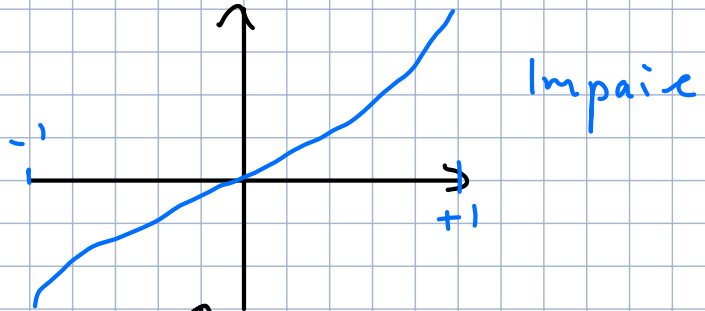
2.3 À l'aide du cercle trigonométrique, étudier la parité des fonctions

$$f : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2] \quad ; \quad g : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi] \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2; \pi/2[$$

$$x \rightarrow \arcsin(x) \quad ; \quad x \rightarrow \arccos(x) \quad \text{et} \quad x \rightarrow \arctan(x)$$

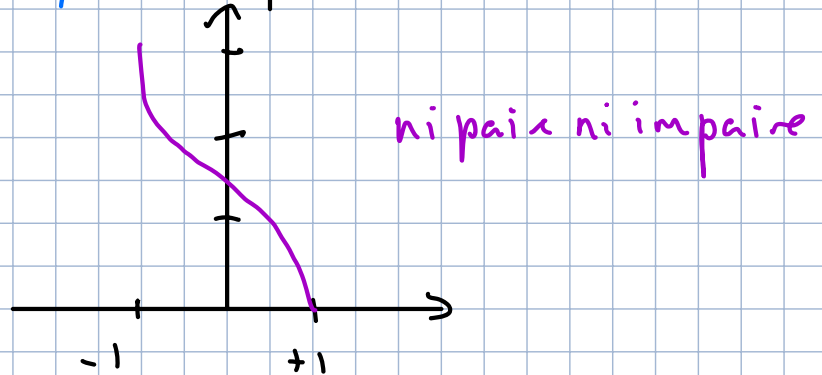
$$f : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$$

$$x \rightarrow \arcsin(x)$$



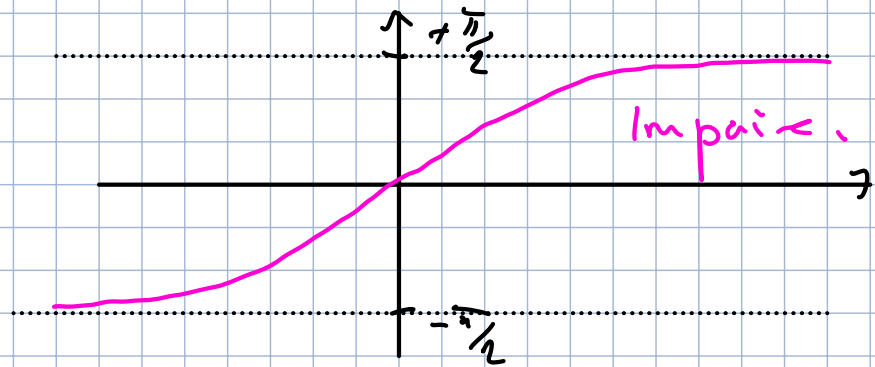
$$g : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$$

$$x \rightarrow \arccos(x)$$



$$h : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2; \pi/2[$$

$$x \rightarrow \arctan(x)$$



2.4 On considère les fonctions $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = x^3 - x + 2$ de graphes respectifs C_1 et C_2 . Étudier les éventuels axes ou centres de symétrie de C_1 et C_2 .

a) Axe de symétrie : On cherche $x=a$ tel que $f(a+x) = f(a-x)$

ici (1) $f(a+x) = (a+x)^2 - 2(a+x) + 3 = a^2 + x^2 + 2ax - 2a - 2x + 3$

(2) $f(a-x) = (a-x)^2 - 2(a-x) + 3 = a^2 + x^2 - 2ax - 2a + 2x + 3$

(1) - (2) = 0 $\Rightarrow 4ax - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(a-1) = 0 \Rightarrow x=a=1$

b) Coordonnées du centre de symétrie $\mathcal{R}(a; b)$
 On cherche a et b tel que $f(a-x) + f(a+x) = 2b$

ici : (1) $f(a-x) = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - a - x^3 + x + 2$

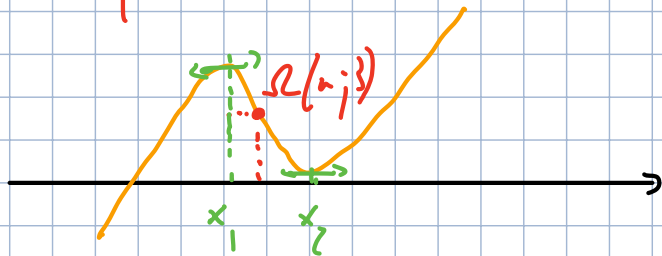
(2) $f(a+x) = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 - a + x^3 - x + 2$

(1) + (2) = $2b \Rightarrow 2a^3 + 6ax^2 - 2a + 4 = 2b$

Identification $\left\{ \begin{array}{l} 2a^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 6x^2a = 0 \Rightarrow a = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{R}(0; 2)$

$\left\{ \begin{array}{l} -2a + 4 = 2b \Rightarrow b = 2 \end{array} \right.$

Remarque: ici on connaît la forme de $f(x)$



alors $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$

et $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$

or $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow a = 0$ et $b = f(a) = f(0) = 2$

$\Rightarrow \mathcal{R}(0; 2)$

3.1 Etudier la parité et la périodicité des fonctions ci-après et déterminer l'ensemble d'étude restreint.

1) $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$

2) $f(x) = \cos(3x) + 4 \sin(2x)$

3) $f(x) = \sin^2(x)$

4) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$

5) $f(x) = 1 + \cos^2(2x)$

6) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

7) $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$

8) $f(x) = x + \sin(x)$

(1) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{8}{3}$ et f est Pair donc $I_1 = \left[0; \frac{4}{3}\right]$

(2) $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $T_2 = \pi \Rightarrow T = 2\pi$ et f ni Pair ni Impair donc $I_2 = [0; 2\pi]$

(3) $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \Rightarrow T = \pi$ et f est Pair donc $I_3 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

(4) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \frac{1}{4} \Rightarrow T = 4\pi$ et f est Impair donc $I_4 = [0; 2\pi]$

(5) $\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x) \Rightarrow T_5 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et f est Pair

(6) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ or $f(x+\pi) = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = f(x)$ donc $I_5 = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

formules trigo

et f est Impair donc $I_6 = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ($\wedge$) $x=0 \notin D_f$

(7) $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$, $T = \pi$ et f est Impair donc $I_7 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

(8) $f(x) = x + \sin(x)$; Pas de périodicité; f est Impair donc $I_8 = \mathbb{R}^+$

3.2 Tracer sur $[-2; 6]$ la courbe représentative de la fonction f suivante :

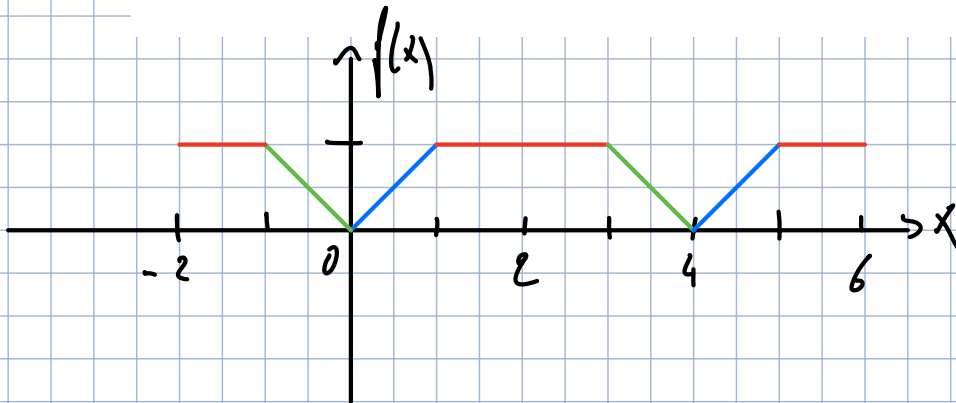
$$f \text{ est 4-périodique et } \begin{cases} f(x) = x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ f(x) = 4 - x & \text{si } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

et en déduire les graphes des courbes de

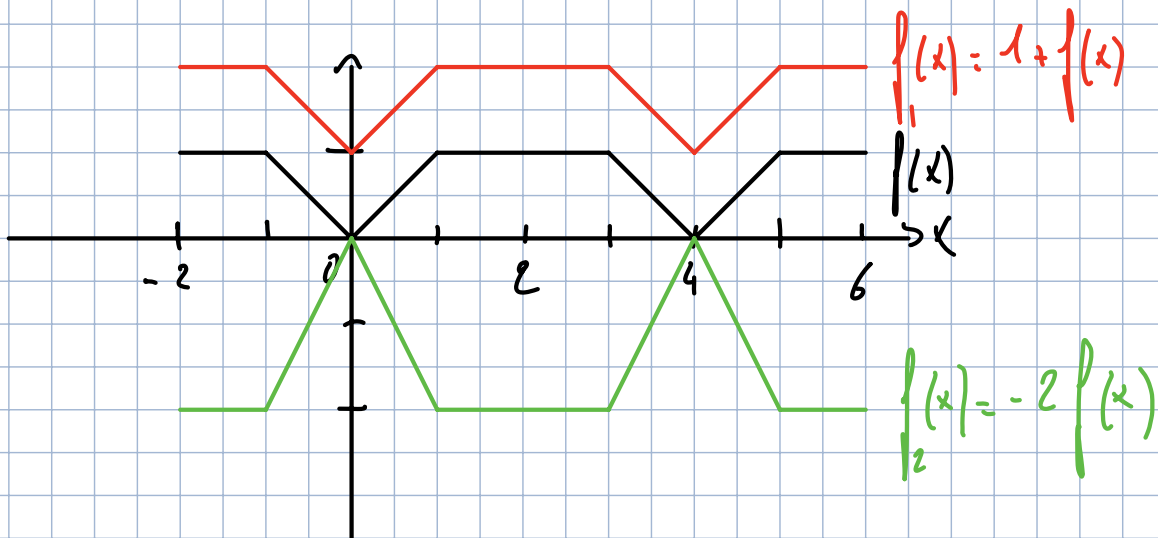
(a) $f_1(x) = 1 + f(x)$ et $f_2(x) = -2f(x)$;

(b) $g_1(x) = f(x - 2)$ et $g_2(x) = f(2x)$.

(c) Conclure enfin sur la nature des transformations du graphe C_f associées aux opérations $\lambda \cdot f(x)$, $\lambda + f(x)$, $f(\lambda \cdot x)$ et $f(x - \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

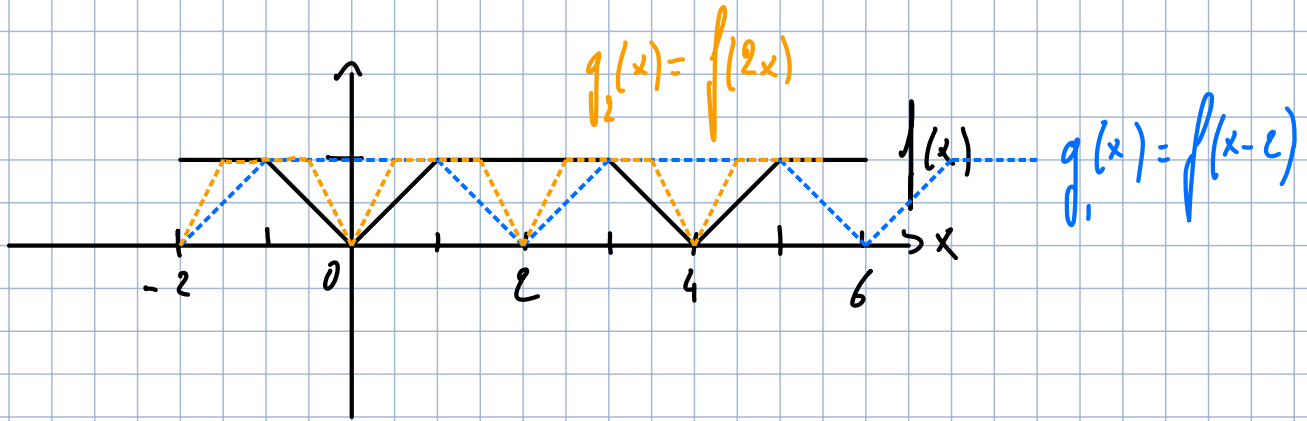


a) $f_1(x) = 1 + f(x)$: translation verticale $1 \cdot \vec{j}$
 $f_2(x) = -2f(x)$: on multiplie l'ordonnée par -2 .



b) $g_1(x) = f(x-2)$: translation horizontale $+2\vec{i}$

$g_2(x) = f(2x)$: contraction horizontale $\times 2$



c). $\lambda f(x) \rightarrow$ Dilatation ($\lambda > 1$) ou contraction ($0 < \lambda < 1$)
verticale de coef. λ .

$\lambda + f(x) \rightarrow$ Translation verticale de $+ \lambda \vec{j}$

$f(\lambda x) \rightarrow$ Contraction ($\lambda > 1$) ou dilatation ($0 < \lambda < 1$)
horizontale de λ

$f(x-\lambda) \rightarrow$ Translation horizontale de $+ \lambda \vec{i}$

4 Fonctions particulières

4.1 Soit la fonction de Heaviside $\theta(x)$ définie par

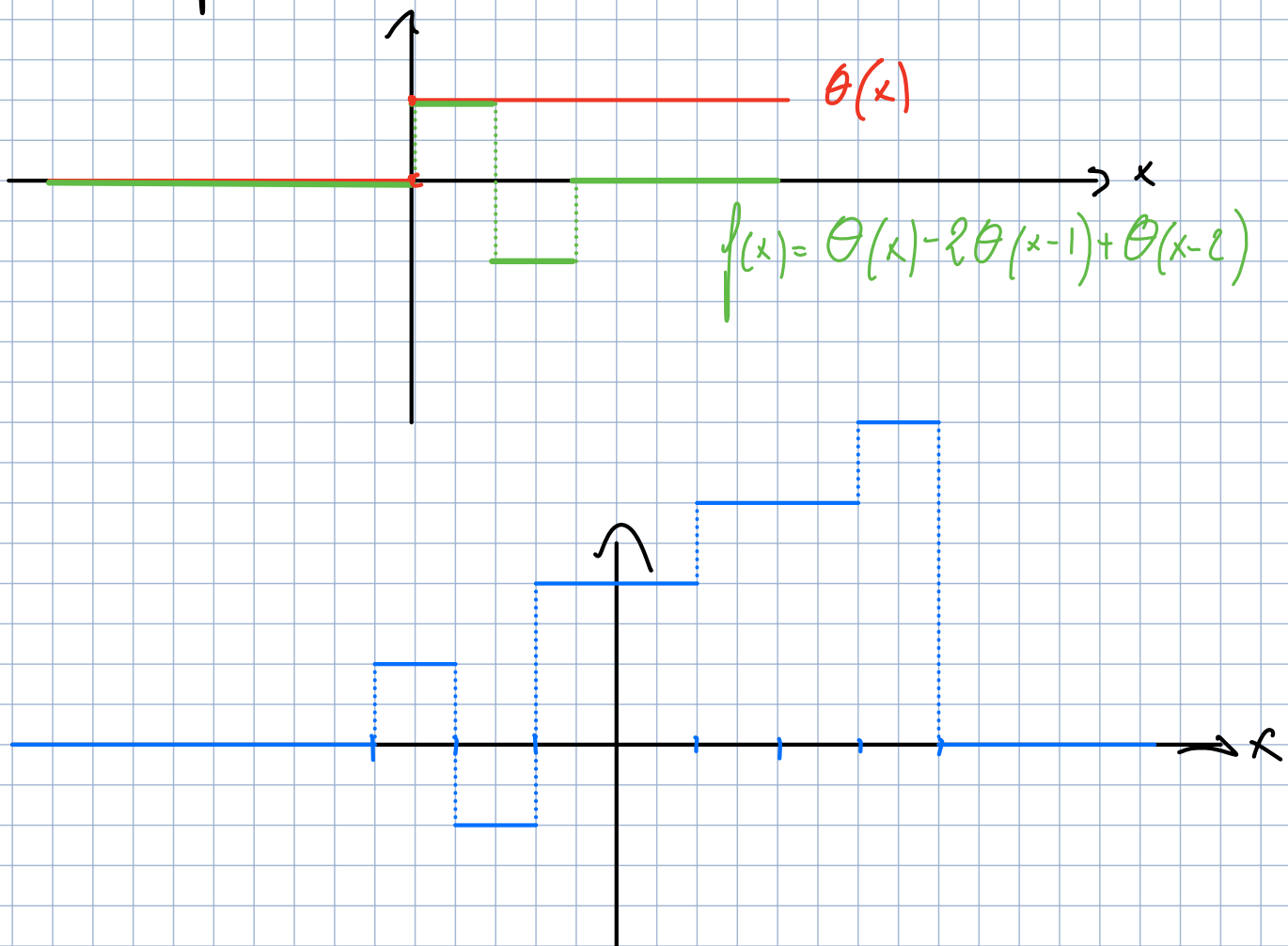
$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Tracer les fonctions :

(a) $f(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$;

(b) et $g(x) = \theta(x+3) + \theta(x-1) - 2\theta(x+2) + \theta(x-3) + 3\theta(x+1) - 4\theta(x-4)$.

Soit la fonction "causale" de Heaviside



$$f(x) = \theta(x+3) - 2\theta(x+2) + 3\theta(x+1) + \theta(x-1) + \theta(x-3) - 4\theta(x-4)$$

4.2 On souhaite créer une fonction causale $g(x)$ qui soit :

- nulle pour $x < \pi$;
- sinusoïdale, 2π -périodique, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2 pour $x \geq \pi$;
- et telle que $g(\pi) = 2$.

(a) Tracer le graphe de $g(x)$.

(b) Déterminer $g(x)$ à l'aide de la fonction de Heaviside.

→ nulle pour $x < \pi$: $\Theta(x-\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \pi \\ 1 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$

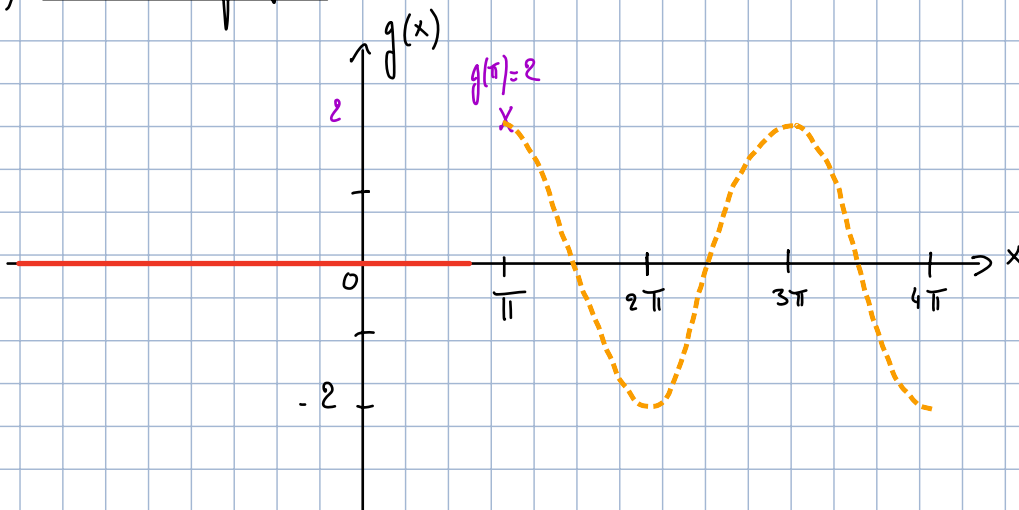
→ sinusoïdale : $T = 2\pi$; sinus ou cosinus au choix

. $\langle \rangle = 0$; pas de translation verticale ; la $\langle \rangle$ d'une sinusoïde est nulle

. Amplitude = 2 pour $x \geq \pi$ (il faut multiplier par $\Theta(x-\pi)$)

→ $g(\pi) = 2$: permet de déterminer φ ; la phase

a) Tracé du graphe :



b) Étude analytique :

i) On écrit $g(x)$ sous sa forme la plus générale :

→ Amplitude ou dilatation verticale

$$g(x) = \left(\underset{\substack{\text{valeur d'offset ou translation verticale}}}{B} + \underset{\substack{\text{phase}}}{A \cos(\omega x + \varphi)} \right) \cdot \Theta(x - \pi)$$

ii) On applique les consignes:

$$\langle \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

demo : $\langle \rangle = \int_0^{2\pi} g(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} (B + A \cos(x + \varphi)) dx = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} B dx + \int_0^{2\pi} A \cos(x + \varphi) dx = B \left[x \right]_0^{2\pi} + A \left[\sin(x + \varphi) \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Leftrightarrow B \cdot 2\pi + A \underbrace{(\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi))}_{= 0 \text{ car } T = 2\pi} = 2\pi \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 0}$$

Amplitude = 2 $\Rightarrow \boxed{A = 2}$

Donc $g(x) = (2 \cos(x + \varphi)) \cdot \Theta(x - \pi)$

$$\begin{aligned} \text{or } g(\pi) = 2 &\Rightarrow \begin{cases} \Theta(x - \pi) = \Theta(0) = 1 \\ g(\pi) = 2 = 2 \cos(\pi + \varphi) \end{cases} \\ &\Rightarrow \cos(\pi + \varphi) = 1 \\ &\Rightarrow \pi + \varphi = 2\pi \\ &\Rightarrow \boxed{\varphi = \pi} \end{aligned}$$

Au final:

$$\boxed{g(x) = 2 \cos(x + \pi) \cdot \Theta(x - \pi)}$$

4.3 Exprimer la fonction f ayant les caractéristiques suivantes :

- g est sinusoidale, de valeur moyenne 2, d'amplitude 3, et de période $4\pi/3$ pour $x \in [-\pi/4; 2\pi]$;
- en dehors de ces valeurs de x , g est nulle;
- et g est maximale en $x = 2\pi/9$.

① $\forall x \in [-\frac{\pi}{4}; 2\pi]; g(x) = 2 + 3 \sin(\omega x + \varphi)$

avec $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{3}{2}$

$g\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 5 = 2 + 3 \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{9} + \varphi\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

ainsi $\forall x \in [-\frac{\pi}{4}; 2\pi]; g(x) = 2 + 3 \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$

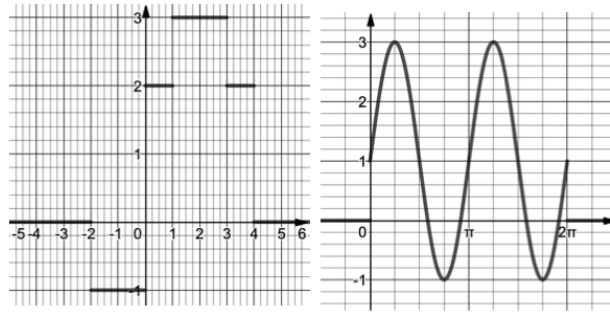
② $g(x)$ est nulle si:

• $x < -\frac{\pi}{4}$: il faut multiplier $g(x)$ par $\theta(x + \frac{\pi}{4})$

• $x > 2\pi$: $1 - \theta(x - 2\pi)$ ou $\theta(2\pi - x)$

En final: $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) = \theta(x + \frac{\pi}{4}) \cdot \left(2 + 3 \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot \theta(2\pi - x)$

4.4 Donner les équations des courbes représentées sur les figures ci-dessous.



$$a) f(x) = -\theta(x+2) + 3\theta(x) + \theta(x-1) - \theta(x-3) - 2\theta(x-4)$$

$$b) g(x) = \theta(x) \cdot \left(B + A \cos(2x + \varphi) \right) \cdot \overset{(\theta(2\pi - x))}{\left(1 - \theta(x - 2\pi) \right)}$$

$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} 1 \text{ si } x < 2\pi \\ 0 \text{ si } x \geq 2\pi \end{array} \right\}$

→ valeur moyenne : $\boxed{B = 1}$

→ amplitude : $\boxed{A = 2}$

→ $g(\pi) = 1$: $g(\pi) = 1 \cdot \left(1 + 2 \cos(2\pi + \varphi) \right) \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow 2 \cos(2\pi + \varphi) = 0 \Rightarrow \cos(2\pi + \varphi) = 0$

$\Rightarrow 2\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\varphi = -\frac{3\pi}{2}}$

Au final :

$$g(x) = \theta(x) \cdot \left(1 + 2 \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) \right) \cdot \theta(2\pi - x)$$