Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022-2023
Licence - OM2

Examen, HAS102X, 12 Janvier - 2h

Calculettes et documents interdits.

Exercice 1.

Dessiner les courbes de niveau des fonctions suivantes :

1. $\alpha(x, y) = e^{x^2+y^2-4}$, pour la valeur 1 ;
2. $\beta(x, y) = y + 3x + 1$, pour la valeur 2.

Exercice 2. Calculer la différentielle de :

1. $f(x, y) = e^{\frac{2x}{3y}}$;
2. $g(x, y) = ln(sin(xy^2))$.

Exercice 3. Est-ce que les formes suivantes sont fermées ?

1. $\sigma(x, y) = (5x^2y - 4xy)dx + (3x^2 - 2y)dy$;
2. $\delta(x, y) = \frac{-2y}{x^2+y^2}dx + \frac{2x}{x^2+y^2}dy$.
   Détérminer le domaine de définition de δ. Calculer l'intégral de δ le long du chemin fermé

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (1) \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)). \quad (2) \end{aligned}$$

   Est-ce que γ est exacte sur son domaine de définition ? Pourquoi ?

Exercice 4. Vérifier le théorème de Schwarz pour la fonction :

$$F(x, y) = \cos(\sin(xy)),$$

en calculant des dérivées partielles.

Exercice 5. Déterminer des fonctions $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dont la différentielle est égale aux formes différentielles :

1. $\lambda_1(x, y) = (-\sin(e^{xy})e^{xy}y)dx + (-\sin(e^{xy})e^{xy}x)dy$;
2. $\lambda_2(x, y) = (2xe^{x^2+y^3+2})dx + (3y^2e^{x^2+y^3+2})dy$;
3. $\lambda_3(x, y) = (\frac{\cos(x+2y)}{\sin(x+2y)})dx + (\frac{2\cos(x+2y)}{\sin(x+2y)})dy$;

Les trois formes différentielles sont elles fermées ? Exactes ? Pourquoi ?

TSVP

Exercice 6. Calculer les points critiques (s'il y en a) des deux fonctions suivantes :

1. $h(x, y) = 4\cos(x) - 3y^2 - 4$;

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7$.

   Pour $f(x, y)$, établir si un des points critiques est un maximum ou un minimum, en écrivant f comme somme de deux carrés de binômes plus une constante.