Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021-2022
Licence - OM2

Examen, 2ème Session - 2h

Calculettes et documents interdits.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition, et calculer les points critiques (s'il y en a) des trois fonctions suivantes :

1. $h(x, y) = -8\cos(x) + 4\sin(y) + 8$;

2. $g(x, y) = 5 + ln(x^6 + y^8)$;

3. $f(x, y) = 3x^3 + 18y^2 - 1$.

Exercice 2.

Dessiner les courbes de niveau des fonctions suivantes :

1. $\alpha(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3$, pour la valeur 1 ;
2. $\beta(x, y) = y + 3x^2 + 5$, pour la valeur 5.

Exercice 3. Est-ce que les formes suivantes sont fermées ?

1. $\sigma(x, y) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}dx + dy$;

2. $\delta(x, y) = 2x\sin(x^2 + y^3)dx + 3y^2\sin(x^2 + y^3)$;

3. $\omega(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}dx - \frac{2x}{x^2+y^2}dy$;

Exercice 4. Calculer la différentielle de :

1. $f(x, y) = e^{\sin(3x^2+2)} + \frac{x+\sin(y)}{xy}$;

2. $g(x, y) = \cos(\sin(3e^{2xy}))$.

Exercice 5. Pour chaque forme différentielle λ_i déterminer une fonction $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont la différentielle est égale à la forme λ_i.

1. $\lambda_1(x, y) = 2(x + y)\cos(x^2 + 3y + 2xy)dx + (3 + 2x)\cos(x^2 + 3y + 2xy)dy$;
2. $\lambda_2(x, y) = 2xe^{13+x^2+y^3}dx + 3y^2e^{13+x^2+y^3}$;

3. $\lambda_3(x, y) = \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy$;

Les trois formes différentielles sont elles fermées ? Pourquoi ?

Exercice 6. Vérifier le théorème de Schwarz pour la fonction :

$$F(x,y) = e^{x^3-2y} - 3\cos(x^2+y),$$

en calculant des dérivées partielles.