
COURBES

SOMMAIRE

- COURBES PLANES PARAMETREES page 3
- COURBES PLANES EN COORDONNEES POLAIRES page 11
- ETUDE METRIQUE DES COURBES PLANES page 23
- COURBES GAUCHES page 31
- ANNEXES page 35

Depuis **René DESCARTES** , la possibilité de définir les courbes à l'aide d'une ou plusieurs équations a changé profondément la manière de les étudier . De nouvelles branches des mathématiques en sont même nées .



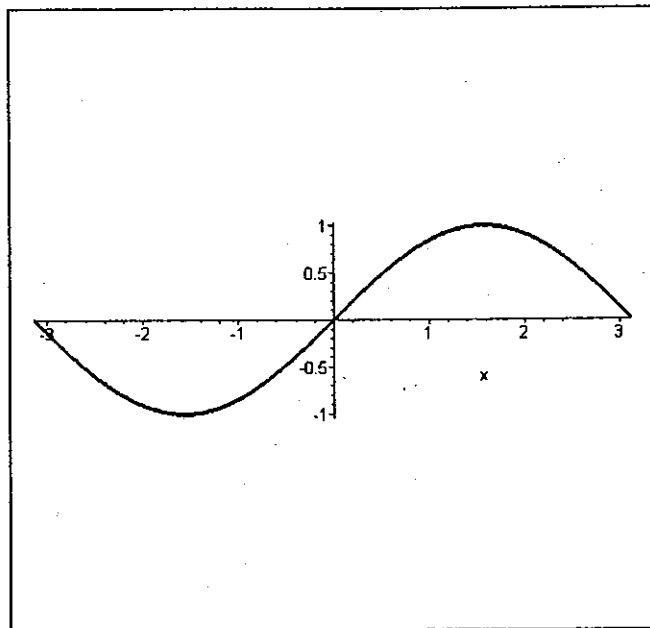
René DESCARTES
(1596 – 1650)

Graphe fonctionnel

Les premières courbes fournies par la géométrie analytique sont les courbes représentatives des fonctions . Une telle fonction f associe à un réel x de l'ensemble de définition \mathcal{D} de f , son image : le réel $f(x)$.

Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on représente les points de coordonnées $(x ; y)$ avec $y = f(x)$ qui décrivent une courbe (C) quand x décrit l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction f .

Exemple : la sinusoïde



Equation implicite

Dans un graphe fonctionnel , il y a exactement une valeur de y pour chaque valeur x de \mathcal{D} .

La courbe (C) n'est coupée qu'en un seul point par une droite verticale .

Mais ce n'est pas toujours le cas , pour les courbes fermées en particulier (comme le cercle) .

Il existe néanmoins une relation entre l'abscisse x et l'ordonnée y des points de la courbe appelée équation implicite de la courbe .

Exemple : L'équation implicite du cercle de centre O et de rayon R est : $x^2 + y^2 = R^2$

L'étude des courbes et leur tracé doivent beaucoup à la notion de trajectoire c'est-à-dire le chemin décrit par un point M mobile en fonction du temps t . Nous obtenons ainsi les deux coordonnées de M (dans le cas d'une courbe plane) ou les trois coordonnées de M (dans le cas d'une courbe de l'espace encore appelée *courbe gauche*) .

COURBES PLANES PARAMETREES

1. COURBES PARAMETREES DU PLAN

1. FONCTIONS VECTORIELLES A VALEURS DANS \mathbb{R}^2

On appelle *fonction vectorielle*, définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R}^2 , une fonction qui, à tout réel t de \mathcal{D} , associe un vecteur de \mathbb{R}^2 noté $\vec{V}(t)$.

Un point O du plan étant choisi comme origine, on peut considérer le point M du plan tel que $\vec{V}(t) = \overrightarrow{OM}$. t est appelé *paramètre* du point M (M est aussi noté $M(t)$).

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on peut écrire $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ou $\vec{V}(t) = (x(t), y(t))$ où x et y sont deux fonctions numériques définies sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Lorsque t décrit \mathcal{D} , Le point M décrit une courbe (C) du plan appelée *courbe plane*.

Les relations : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ constituent la *représentation paramétrique* de la courbe (C).

A chaque valeur du paramètre t correspond donc un point de la courbe (C).

Exemple 1 : Soit (Δ) la droite passant par le point $A(x_0; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = t \alpha \\ y - y_0 = t \beta \end{cases}$$

On obtient une représentation paramétrique de la droite (Δ) : $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Par exemple, une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(1; 2)$ et $B(3; -1)$ est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{ce n'est pas la seule } \dots)$$

Exemple 2 : Soit $a > 0$

Le cercle (C) de centre O et de rayon a admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. DERIVABILITE D'UNE FONCTION VECTORIELLE

Soit \vec{V} une fonction vectorielle définie sur un intervalle I et $t_0 \in I$.

On dit que \vec{V} est dérivable en t_0 lorsque les fonctions x et y sont dérivables en t_0 .

On a alors $\vec{V}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$

On dit que \vec{V} est dérivable sur l'intervalle I lorsque les fonctions x et y sont dérivables sur I .

- Si $(x'(t_0); y'(t_0)) \neq (0; 0)$ le point M_0 est un **point régulier** de la courbe (C) .
- Si $(x'(t_0); y'(t_0)) = (0; 0)$ le point M_0 est un **point stationnaire (ou singulier)** de la courbe (C) .

3. TANGENTE EN UN POINT REGULIER DE LA COURBE

Soient M_0 et M les points de (C) de paramètres respectifs t_0 et t ($t \neq t_0$).

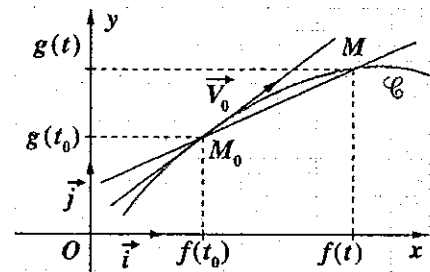
On suppose que la fonction \vec{V} est dérivable sur l'intervalle $I \subset \mathcal{D}$.

(C) admet une tangente en M_0 lorsque la droite (M_0M) admet une position limite lorsque t tend vers t_0 .

Soit (C) la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Si M_0 est un **point régulier** de la courbe (C) alors

$\vec{V}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente en M_0 à la courbe (C) .



Cas particuliers :

- si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées
- si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses

Exemple 3 : $(C) : \begin{cases} x(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

Montrons que tous les points de (C) sont réguliers.

$$\begin{cases} x'(t) = -2t + 1 \\ y'(t) = t \end{cases} \quad \text{Alors } \vec{V}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t + 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 0 \end{cases} \text{ impossible.}$$

Etude de la tangente aux points $A(0)$, $B(\frac{1}{2})$ et $C(1)$

- $t=0 \Leftrightarrow A(\frac{1}{2}; 0)$ et $\vec{V}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tangente parallèle à (Ox)
- $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow B(\frac{3}{4}; \frac{1}{8})$ et $\vec{V}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ tangente parallèle à (Oy)
- $t=1 \Leftrightarrow C(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et $\vec{V}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tangente de coefficient directeur -1

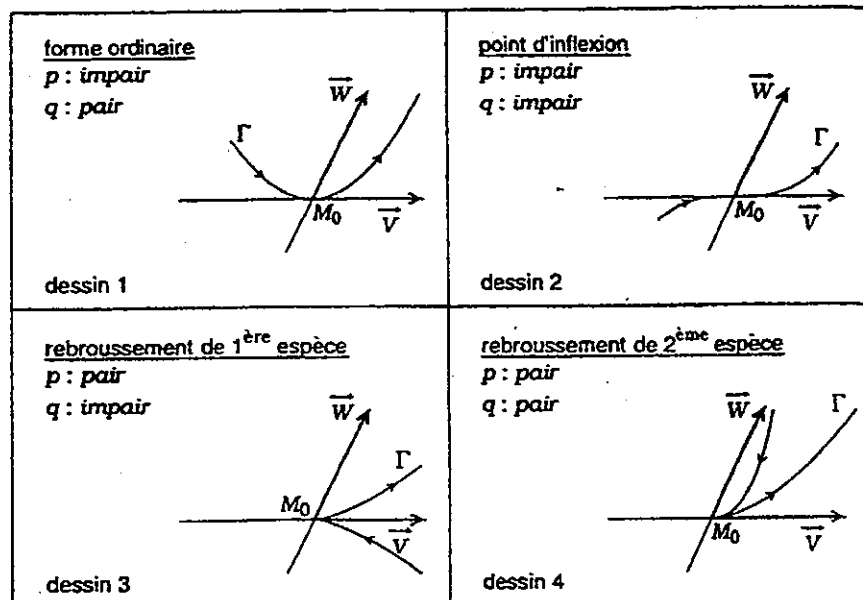
4. ETUDE LOCALE EN UN POINT DE LA COURBE

Soit M_0 le point de paramètre t_0 d'une courbe Γ .

- Soit p le plus petit entier naturel ($p \geq 1$) tel que le vecteur $\vec{V}^{(p)} = \begin{pmatrix} f^{(p)}(t_0) \\ g^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$ soit *non nul*.
alors $\vec{V}^{(p)}$ est un vecteur directeur de la tangente en M_0 à la courbe Γ .

- Soit q le plus petit entier ($q > p$) tel que $\vec{V}^{(p)} = \begin{pmatrix} f^{(p)}(t_0) \\ g^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$ et $\vec{V}^{(q)} = \begin{pmatrix} f^{(q)}(t_0) \\ g^{(q)}(t_0) \end{pmatrix}$

ne soient pas colinéaires, alors suivant la parité de p et q , la courbe Γ a l'allure suivante au voisinage du point M_0 :



- Les flèches sur les courbes orientent Γ dans le sens des t croissants.
- Dans les dessins 1 et 2, le point M_0 est régulier si $p = 1$.
- Dans les dessins 3 et 4, le point M_0 est stationnaire.

Exemple 4 : Etude locale au point O ($t = 0$) de la courbe (C) définie par :
$$\begin{cases} x(t) = t^3 + t^4 \\ y(t) = t^5 \end{cases}$$

2. PLAN D'ETUDE D'UNE COURBE PARAMETREE

Le plan d'étude d'une courbe définie par une représentation paramétrique est sensiblement le même que celui d'une courbe définie par une relation fonctionnelle du type $y=f(x)$.

Soit (C) une courbe de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

1. ENSEMBLE DE DEFINITION – DOMAINE D'ETUDE

• Ensemble de définition

L'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction \vec{V} est l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles les fonctions x et y sont *toutes les deux* définies.

• Périodicité

• Symétries éventuelles

Soient t une valeur quelconque de \mathcal{D} et ψ une fonction simple ψ telle que $t' = \psi(t) \in \mathcal{D}$. Alors :

- si $(x(t'); y(t')) = (x(t); -y(t))$ alors (C) est symétrique par rapport à (Ox)
- si $(x(t'); y(t')) = (-x(t); y(t))$ alors (C) est symétrique par rapport à (Oy)
- si $(x(t'); y(t')) = (-x(t); -y(t))$ alors (C) est symétrique par rapport à O .

Remarque : Lorsque les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont trigonométriques, on essaiera souvent :

• $\psi(t) = -t$

• $\psi(t) = \pi - t$

• $\psi(t) = \pi + t$

car :

$\sin(-t) = -\sin t$	$\sin(\pi - t) = \sin t$	$\sin(\pi + t) = -\sin t$
$\cos(-t) = \cos t$	$\cos(\pi - t) = -\cos t$	$\cos(\pi + t) = -\cos t$

• Domaine d'étude

C'est la « plus petite partie » \mathcal{E} de \mathcal{D} telle que la courbe (C) puisse être obtenue, à l'aide de symétries éventuelles, à partir de la portion de (C) correspondant à \mathcal{E} .

Exemple 5 :
$$\begin{cases} x(t) = \sin 3t + 3 \sin t \\ y(t) = \sin t + \cos t \end{cases}$$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et période $P = 2\pi$.
- $\forall t \in \mathbb{R} \quad x(\pi + t) = -x(t)$ et $y(\pi + t) = -y(t)$

D'où symétrie par rapport à O et étude sur $\mathcal{E} = [0; \pi]$ (car $t \in [0; \pi] \Rightarrow \pi + t \in [\pi; 2\pi]$)

2. SENS DE VARIATION

On étudie les variations des fonctions x et y sur le domaine d'étude \mathcal{E} .

Les résultats sont rassemblés dans un tableau de variation « double » du type :

t	
x'	
y'	
x	
y	

3. LIMITES ET BRANCHES INFINIES EVENTUELLES

Soit α un élément du domaine d'étude \mathcal{E} (éventuellement on peut avoir $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$)

- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = \pm \infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à (C)
- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = \pm \infty$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote (horizontale) à (C)
- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = \pm \infty$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = \pm \infty$

on étudie $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)}$

- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm \infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)
- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox)
- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ on étudie $\lim_{t \rightarrow \alpha} (y(t) - a x(t))$
 - si $\lim_{t \rightarrow \alpha} (y(t) - a x(t)) = \pm \infty$ alors (C) admet une branche parabolique ayant pour direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = a x$
 - si $\lim_{t \rightarrow \alpha} (y(t) - a x(t)) = b$ alors la droite d'équation $y = a x + b$ est asymptote (oblique) à (C)

4. RECHERCHE DES POINTS STATIONNAIRES EVENTUELS

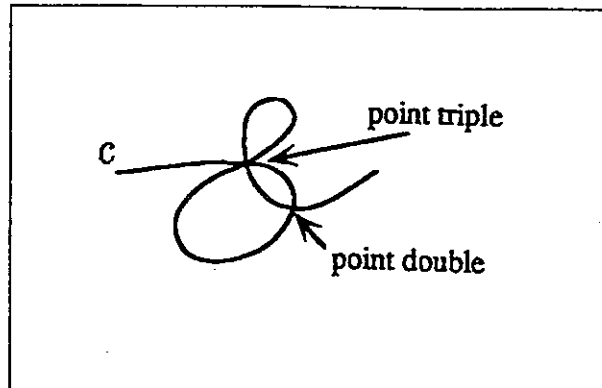
Cela correspond aux valeurs (éventuelles) du paramètre t telles que $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.

Etude locale de la courbe (C) en ces points (point ordinaire, point d'inflexion, point de rebroussement de 1^{ère} ou 2^{nde} espèce)

5. TRACE DE LA COURBE

Ce tracé peut mettre en évidence l'existence d'un ou plusieurs *points multiples*.

Exemple :



Pour déterminer les coordonnées d'un point *double* de la courbe (C), on cherche deux valeurs distinctes t_1 et t_2 du paramètre telles que
$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

Retour à l'Exemple 5 :
$$\begin{cases} x(t) = \sin 3t + 3 \sin t \\ y(t) = \sin t + \cos t \end{cases}$$

• **Ensemble de définition** $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ Période 2π

On a vu que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t + \pi) = -x(t)$ et $y(t + \pi) = -y(t)$

La courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère. Le domaine d'étude est $[0 ; \pi]$.

• **Sens de variation**

$x'(t) = 3(\cos 3t + \cos t) = 6 \cos 2t \times \cos t$ (on utilise la formule permettant de factoriser $\cos p + \cos q$)

$y'(t) = \cos t - \sin t = \cos t + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π		
x'	+	0	-	0	+	0	-
y'	+	0		-			
x	0	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	0		
y	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1		

• **Nature du point stationnaire** ($t = \frac{\pi}{4}$)

$M_0(2\sqrt{2} ; \sqrt{2})$ est un point stationnaire car $x'(\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

$$\begin{cases} x''(t) = 3(-3\sin 3t - \sin t) \\ y''(t) = -\sin t - \cos t \end{cases} \quad \text{d'où } x''(\frac{\pi}{4}) = -6\sqrt{2} \text{ et } y''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

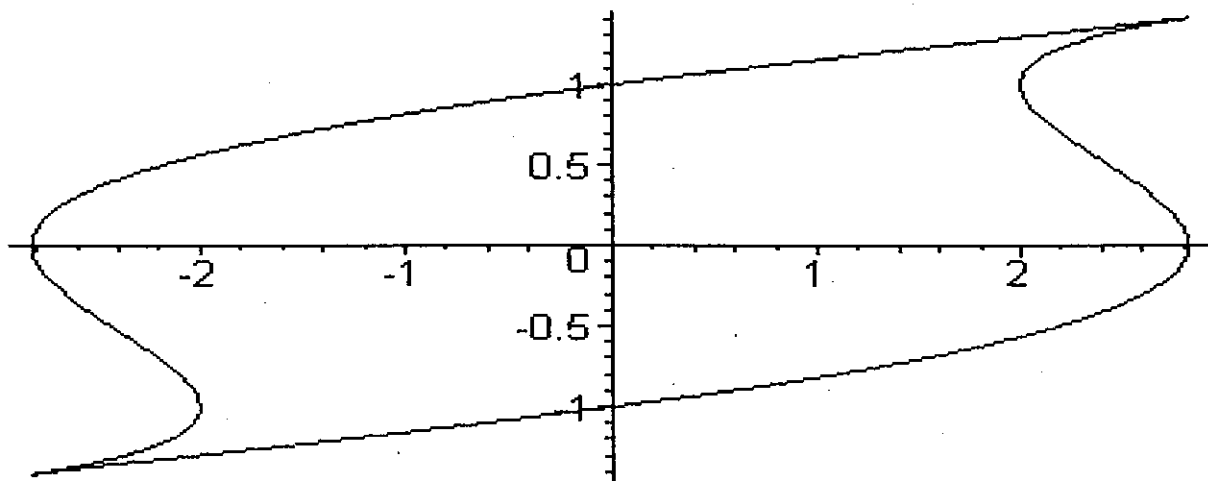
Le vecteur $\vec{V}'' \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente en M_0 à la courbe

$$\begin{cases} x'''(t) = 3(-9\cos 3t - \cos t) \\ y'''(t) = -\cos t + \sin t \end{cases} \quad \text{d'où } x'''(\frac{\pi}{4}) = -15\sqrt{2} \text{ et } y'''(\frac{\pi}{4}) = 0$$

Les vecteurs $\vec{V}'' \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{V}''' \begin{pmatrix} -15\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires .

Le point M_0 est un point de rebroussement de première espèce .

• **Représentation graphique**



COURBES PLANES EN COORDONNEES POLAIRES

1. EQUATION D'UNE COURBE EN COORDONNEES POLAIRES

1. COORDONNEES POLAIRES D'UN POINT

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct du plan .

Si M est un point du plan distinct de O , on note \vec{u} un vecteur unitaire de la droite (OM) .

Alors , il existe un réel r tel que $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}$. r s'appelle *rayon polaire* du point M .

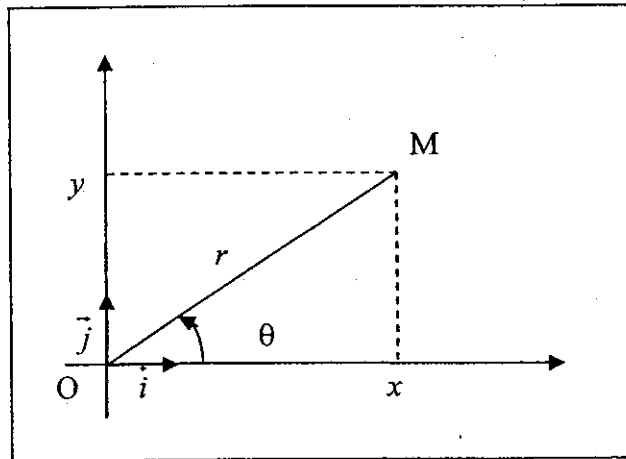
Par abus de langage , la droite (OM) s'appelle aussi rayon polaire associé au point M .

Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i} ; \overrightarrow{OM})$. θ s'appelle *angle polaire* du point M .

L'origine O du repère s'appelle encore le *pôle* .

Le couple $[r, \theta]$ s'appelle *coordonnées polaires* du point M .
Il permet de repérer le point M dans le plan .

On notera $M(\theta)$ le point de coordonnées polaires $[r, \theta]$.



Exemple : Le point A de coordonnées cartésiennes $(1 ; 1)$ a pour coordonnées polaires : $[\dots, \dots]$

Remarques : 1) $r = 0$ caractérise le point O (θ étant alors indéterminé) .

2) le couple de coordonnées polaires d'un point M ($M \neq O$) n'est pas unique .
par exemple $[-r, \theta + \pi]$ et $[r, \theta]$ sont les coordonnées polaires d'un même point .

2. EXEMPLES D'EQUATIONS DE COURBES EN COORDONNEES POLAIRES

Si on note (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point M et $[r, \theta]$ ses coordonnées polaires, alors :

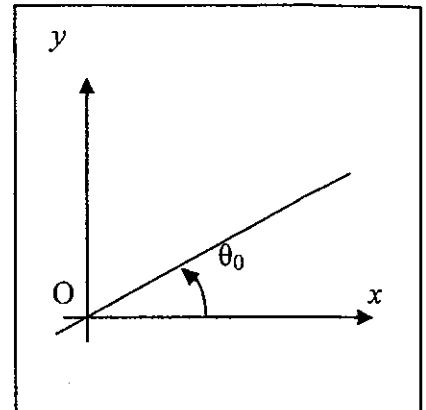
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Pour obtenir une équation polaire à partir d'une équation cartésienne, on utilisera les relations précédentes et on essaiera d'exprimer r en fonction de θ .

• Droite passant par le pôle

Une droite passant par O a une équation polaire du type :

$$\theta = \theta_0 \quad (\theta_0 \text{ donné})$$



• Exemple d'une droite ne passant pas par le pôle

Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne $y = -x + 1$

On obtient : $x + y = 1 \Leftrightarrow r \cos \theta + r \sin \theta = 1$ d'où l'équation polaire de (Δ) : $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$

• Cercle de centre O

Soit $R > 0$. Le cercle de centre O et de rayon R a pour équation polaire : $r = R$

• Exemple d'un cercle passant par le pôle

Soit (C) le cercle de centre $\Omega \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ passant par O.

L'équation cartésienne du cercle (C) s'obtient en exprimant que, pour tout point $M(x, y)$ du plan, on a : $\Omega M = \Omega O$ ou, ce qui revient au même que $\Omega M^2 = \Omega O^2$ ce qui donne :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$$

On remplace x par $r \cos \theta$ et y par $r \sin \theta$. On trouve $r^2 - r(\cos \theta + \sin \theta) = 0$

On factorise par r et on simplifie (car $r \neq 0$). D'où l'équation polaire de (C) : $r = \cos \theta + \sin \theta$

Plus généralement :

La courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$ est l'ensemble des points de coordonnées polaires $[f(\theta), \theta]$.

2. TANGENTE EN UN POINT

1. VECTEUR DERIVE D'UN VECTEUR UNITAIRE

\mathbb{R}^2 est rapporté à une base orthonormale directe $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Soit $\vec{u}(\theta)$ le vecteur unitaire correspondant à l'angle polaire θ .

On a : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$

La fonction vectorielle \vec{u} est dérivable et on a : $\vec{u}'(\theta) = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$

Soit encore : $\vec{u}'(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j}$

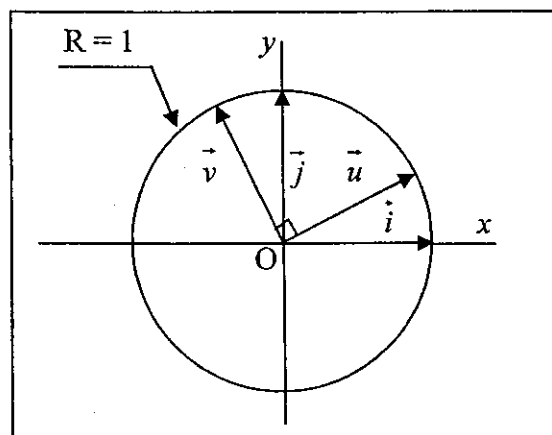
D'où

$$\vec{u}'(\theta) = \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Notons $\vec{v} = \vec{u}'$

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base orthonormale directe de \mathbb{R}^2

Le vecteur dérivé d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire est le vecteur unitaire directement perpendiculaire.



2. TANGENTE EN UN POINT M (M ≠ O) D'ANGLE POLAIRE θ

(C) est la courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$.

On suppose que f est dérivable sur son ensemble de définition \mathcal{D} .

Soit M le point de (C) d'angle polaire θ (avec $M \neq O$).

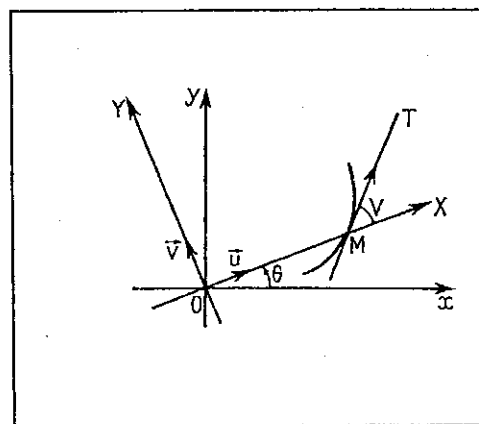
On notera $\vec{u}(\theta)$ le vecteur unitaire correspondant au rayon polaire du point M.

Alors $\vec{OM} = r \vec{u} = f(\theta) \vec{u}(\theta)$

(C) admet en M une tangente de vecteur directeur \vec{T}
 $\vec{T} = f'(\theta) \vec{u}(\theta) + f(\theta) \vec{u}'(\theta) = r' \vec{u} + r \vec{v}$

Dans le repère « mobile » $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le vecteur \vec{T} a donc pour coordonnées :

$$\vec{T} \begin{pmatrix} r' \\ r \end{pmatrix}$$



En particulier, en un point autre que le pôle où $r' = 0$, la tangente est perpendiculaire au rayon polaire.

Exemple 1 : $r(\theta) = \cos 2\theta$

Soit A le point correspondant à $\theta = 0$. On a $r(0) = 1$

De plus $r'(\theta) = -2 \sin 2\theta$ d'où $r'(0) = 0$

Au point A , la tangente à la courbe est perpendiculaire à la droite (OA) .

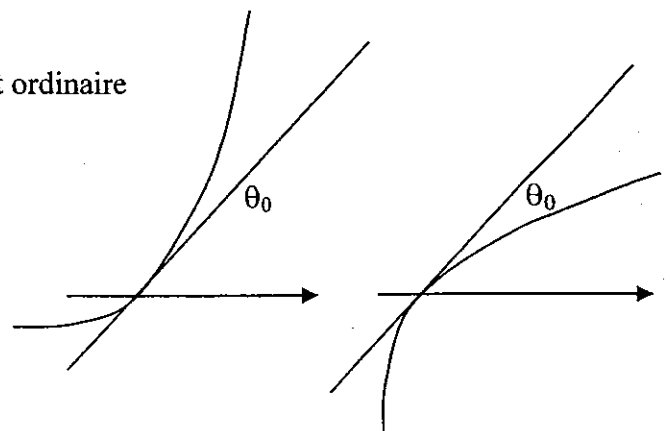
3. TANGENTE EN O

Si $f(\theta_0) = 0$ alors la courbe (C) admet en O une tangente d'angle polaire θ_0 .

La position de la courbe par rapport à sa tangente s'obtient à l'aide du signe de $r = f(\theta)$ au voisinage de θ_0 .

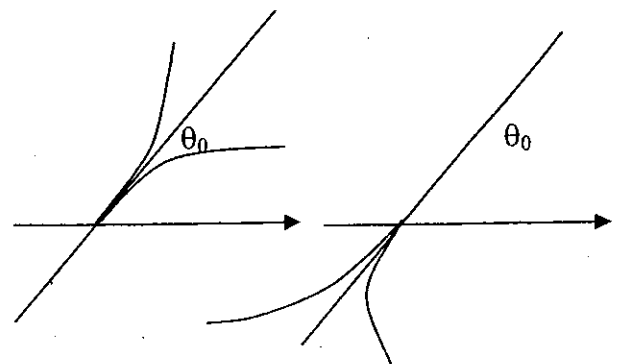
θ	θ_0		
r	-	0	+
ou			
θ	θ_0		
r	+	0	-

Point ordinaire



θ	θ_0		
r	+	0	+
ou			
θ	θ_0		
r	-	0	-

Point de rebroussement



On retiendra que lorsque r s'annule *en changeant de signe* alors O est un *point ordinaire* et lorsque r s'annule *sans changer de signe* alors O est un *point de rebroussement* .

3. PLAN D'ETUDE

Soit (C) la courbe définie par l'équation polaire $r = f(\theta)$.

1. ENSEMBLE DE DEFINITION – DOMAINE D'ETUDE – DOMAINE DE DESCRIPTION

- On recherche d'abord l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction f .

• Période et antipériode

Soit $T > 0$

T est une *période* de la fonction f lorsque : $\forall \theta \in \mathcal{D} \quad f(\theta + T) = f(\theta)$
 Alors le point $M(\theta + T)$ se déduit de $M(\theta)$ par la rotation de centre O et d'angle T .

- si $T = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ (par exemple $T = 2\pi$, $T = 4\pi \dots$) on obtient la courbe complète sur une période

Exemple 2 : $r = 1 + \cos\theta$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $T = 2\pi$ description sur une période (par exemple sur $[0, 2\pi]$)

- si $T = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ (par exemple $T = \pi$, $T = 3\pi \dots$) on obtient la courbe complète sur deux périodes

(C) est la réunion de la portion de courbe (Γ) correspondant à une période et de la symétrique de (Γ) par rapport à O .

Retour à l'exemple 1 : $r(\theta) = \cos 2\theta$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $T = \pi$ description sur deux périodes (par exemple sur $[0, 2\pi]$)

- si $T = \frac{p}{q} \times 2\pi$ ($p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux)

On doit alors opérer $q - 1$ rotations de centre O et d'angle T pour obtenir la courbe complète.

- si $\frac{T}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, une infinité de rotations sera nécessaire

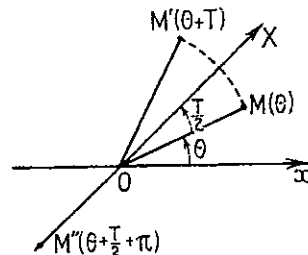
⇒ Lorsque la période a été déterminée, il peut être utile de former $f(\theta + \frac{T}{2})$.

$\frac{T}{2}$ s'appelle *antipériode* de la fonction f si :

$$\forall \theta \in \mathcal{D} \quad f(\theta + \frac{T}{2}) = -f(\theta)$$

Alors le point $M(\theta + \frac{T}{2})$ se déduit de $M(\theta)$ par

la rotation de centre O et d'angle $\frac{T}{2} + \pi$.



Retour à l'exemple 1 : $r(\theta) = \cos 2\theta$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ Période $T = \pi$

De plus : $r(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(2\theta + \pi) = -\cos 2\theta = -r(\theta)$

On peut alors réduire l'étude à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ puis effectuer la rotation de centre O et d'angle

$\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

• Symétries courantes

- si $f(-\theta) = f(\theta)$ alors (C) est symétrique par rapport à (Ox)
- si $f(-\theta) = -f(\theta)$ alors (C) est symétrique par rapport à (Oy)

Retour à l'exemple 1 : $r(\theta) = \cos 2\theta$ $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad r(-\theta) = r(\theta)$
(C) est symétrique par rapport à (Ox)

2. SIGNE ET SENS DE VARIATION DE $f(\theta)$

Il est important d'étudier le signe de $r = f(\theta)$ et en particulier de rechercher les valeurs de θ telles que $r = 0$ de façon à construire les arcs de courbe qui passent par le pôle avec leur tangente .

Si possible , on étudie aussi le sens de variation de f .

On résume les résultats dans un tableau :

θ	
$r'(\theta)$	
$r(\theta)$	

3. ETUDE DES BRANCHES INFINIES

Les branches infinies sont mises en évidence par le tableau précédent .
L'étude complète sera faite au paragraphe 4 .

4. TRACE DE LA COURBE

L'arc générateur (Γ) étant tracé , l'ensemble de la courbe (C) est obtenu par les rotations et symétries mises en évidence dans la recherche du domaine d'étude . (voir 3.1.)

Il pourra être utile de déterminer les points d'intersection de (C) avec (Ox) et (Oy) .

Retour à l'exemple 1 : $r(\theta) = \cos 2\theta$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

• **Période et symétries** : Période $T = \pi$ et description sur 2π (symétrie par rapport à O)

Antipériode : $r(\theta + \frac{\pi}{2}) = -r(\theta)$ donc étude sur un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{2}$

de plus $r(-\theta) = r(\theta)$ donc symétrie par rapport à (Ox)

Conclusion : On construit l'arc générateur sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ puis on effectue successivement :

→ la symétrie par rapport à (Ox)

→ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

→ la symétrie par rapport à O

• **Tableau de variation** : $r'(\theta) = -2 \sin 2\theta \leq 0$ sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r'	0	-	-2
r	1	→ 0	

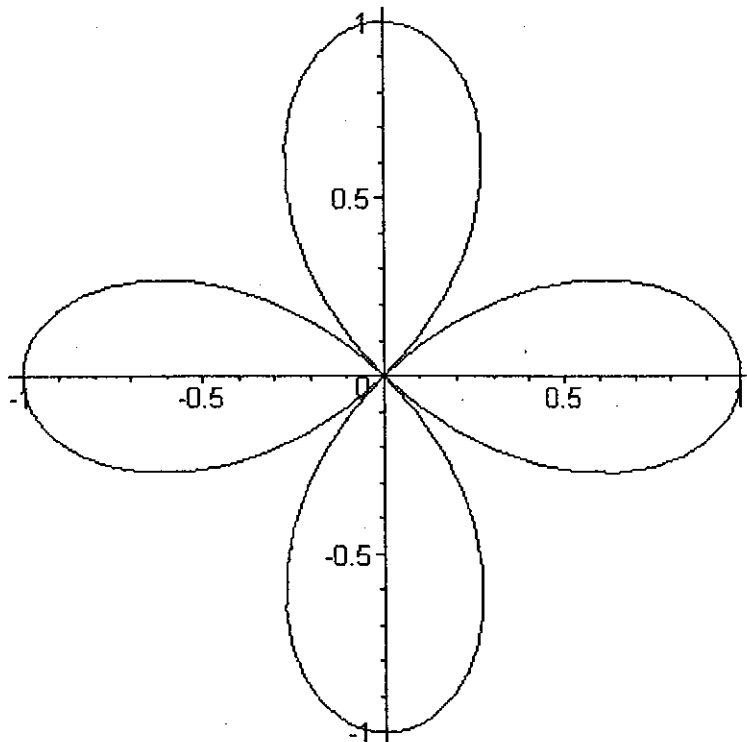
• Tangentes En $M \neq O$, un vecteur directeur de la tangente en $M(\theta)$ à la courbe est : $\vec{T} \begin{pmatrix} r' \\ r \end{pmatrix}$

→ Donc pour $\theta = 0$ la tangente est perpendiculaire au rayon polaire (OM)

→ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ la tangente est la droite

d'équation polaire $r = \frac{\pi}{4}$

• Courbe :



Retour à l'Exemple 2 : Cardioïde $r = 1 + \cos\theta$

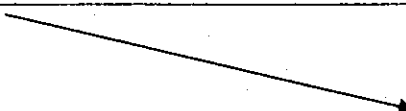
• **Ensemble de définition** : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Période : $T = 2\pi$

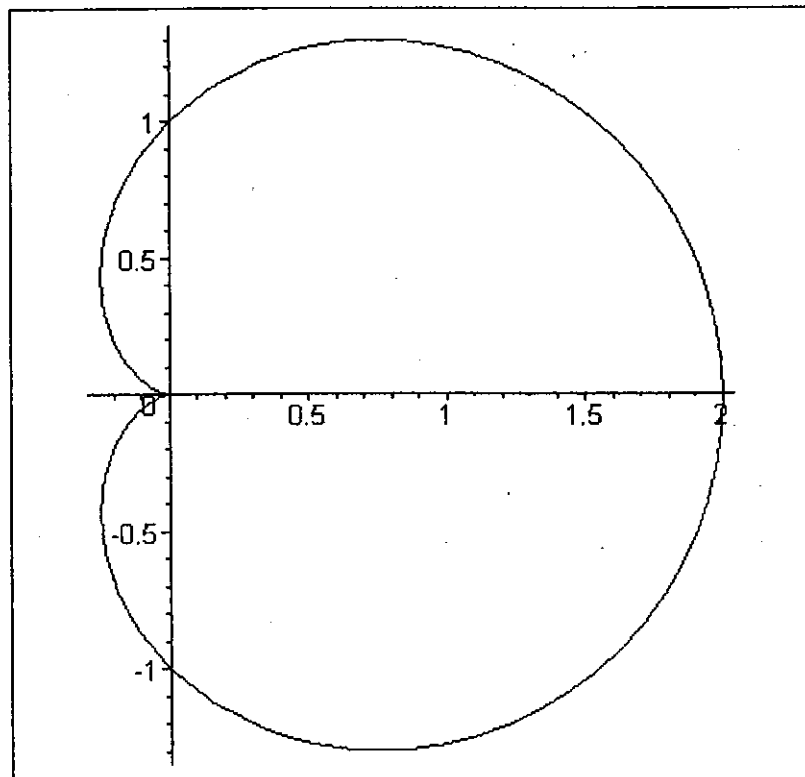
$r(-\theta) = r(\theta)$ d'où symétrie par rapport à (Ox)

Intervalle d'étude : $\mathcal{E} = [0 ; \pi]$

• **Tableau de variation** : $r'(\theta) = -\sin\theta$

θ	0		π	
$r'(\theta)$	0	-	0	
$r(\theta)$	2			0

• **Courbe** : On trace l'arc générateur (Γ) puis on obtient (C) en complétant par le symétrique de (Γ) par rapport à (Ox) .



4. BRANCHES INFINIES

1. BRANCHES SPIRALES

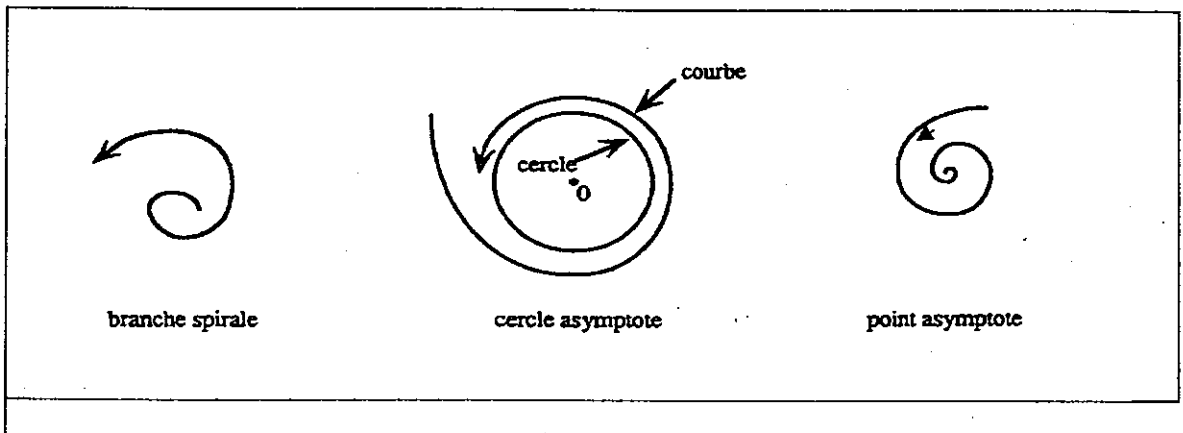
Les branches infinies spirales sont obtenues lorsque $\theta \rightarrow \infty$. Deux cas peuvent se présenter :

- si $\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta) = a$ la courbe s'enroule autour du cercle de centre O et de rayon $|a|$ appelé *cercle asymptote*.

Dans le cas particulier où $\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta) = 0$ le pôle O est *point asymptote*.

- si $\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta) = \infty$ la courbe possède une *branche spirale*.

Les signes de r et de θ permettent de préciser le sens de l'enroulement.



Exemple 3 : $r(\theta) = \theta$

- Ensemble de définition : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Il n'y a pas de période

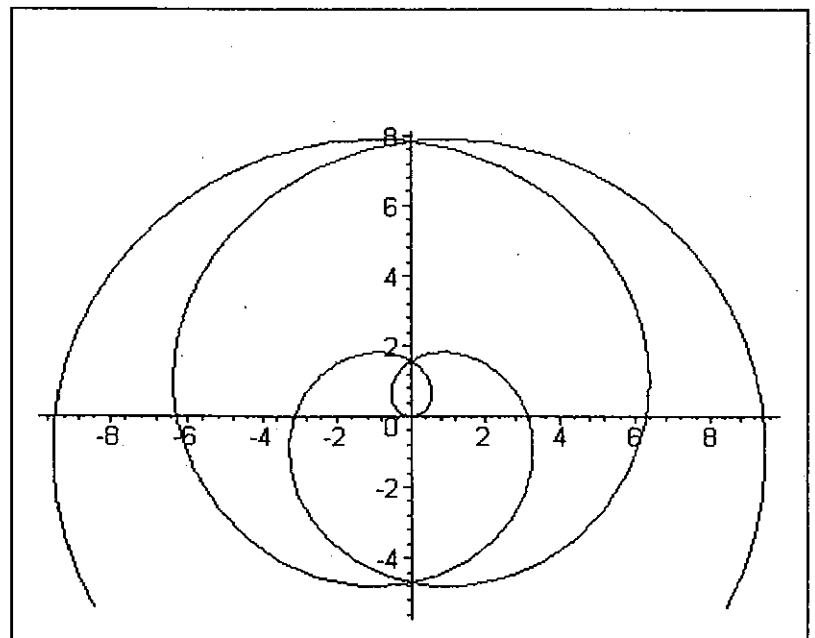
$r(-\theta) = r(\theta)$
d'où symétrie par rapport à (Ox)

Intervalle d'étude : $\mathcal{E} = [0 ; \pi]$

- Etude de la branche infinie :

$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} f(\theta) = +\infty$

M décrit une branche spirale

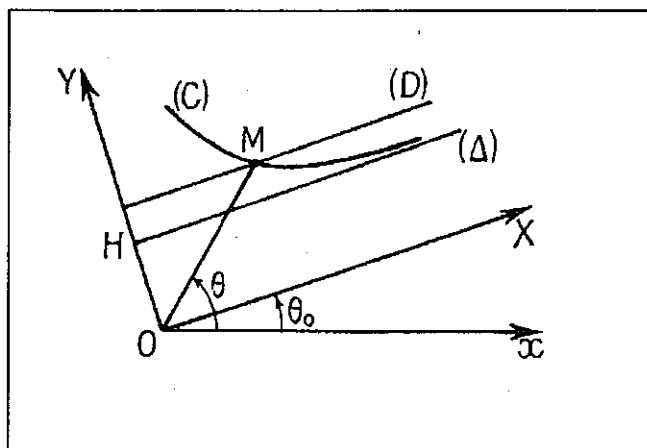


La courbe obtenue s'appelle *spirale d'Archimède*

2. DIRECTION ASYMPTOTIQUE ET ASYMPTOTE

Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$ alors la courbe (C) admet une direction asymptotique qui est celle de la droite d'angle polaire θ_0 .

Recherche d'une asymptote éventuelle :



On étudie $Y = r \sin(\theta - \theta_0)$
quand $\theta \rightarrow \theta_0$.

- si $Y \rightarrow \infty$ alors il y a une branche parabolique de direction celle de la droite d'angle polaire θ_0 .
- si $Y \rightarrow L$ alors la droite (Δ) d'équation $Y = L$ (dans $(O ; X, Y)$) est asymptote à (C).

Le signe de $Y - L$ permet de préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

Exemple 4 : Strophoïde droite $r = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$

• **Ensemble de définition** : $\theta \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \cos \theta \neq 0$ d'où $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

• **Période** : $T = 2\pi$ car $\forall \theta \in \mathcal{D} \quad \theta + 2\pi \in \mathcal{D}$ et $r(\theta + 2\pi) = \frac{\cos(2\theta + 4\pi)}{\cos(\theta + 2\pi)} = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = r(\theta)$

• **Antipériode** : $\frac{T}{2} = \pi$

En effet : $\forall \theta \in \mathcal{D} \quad \theta + \pi \in \mathcal{D}$ et $r(\theta + \pi) = \frac{\cos(2\theta + 2\pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{\cos 2\theta}{-\cos \theta} = -r(\theta)$

Le point $M(\theta + \pi)$ se déduit de $M(\theta)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{T}{2} + \pi = 2\pi$.

Donc : $M(\theta + \pi) = M(\theta)$. On peut alors limiter l'étude à un intervalle de largeur π .

• **Symétrie** : $\forall \theta \in \mathcal{D} \quad -\theta \in \mathcal{D}$ et $r(-\theta) = r(\theta)$ d'où symétrie par rapport à (Ox).

Conclusion : L'intervalle d'étude est : $\mathcal{E} = \left[0 ; \frac{\pi}{2} [$

• **Tableau de variation :**

$$r'(\theta) = \frac{-2 \cos \theta \times \sin 2\theta + \sin \theta \times \cos 2\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{-2 \cos \theta \times 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \times (2 \cos^2 \theta - 1)}{\cos^2 \theta}$$

$$r'(\theta) = \frac{-\sin \theta \times (2 \cos^2 \theta + 1)}{\cos^2 \theta}$$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r'	0	-	
r	1	0	$-\infty$

On a $r'(0) = 0$ et $r(0) \neq 0$ donc en $\theta = 0$ la tangente est verticale .

De plus $r(\frac{\pi}{4}) = 0$

La courbe (C) admet la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$ comme tangente au pôle O .

• **Etude de la branche infinie :** $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} r(\theta) = -\infty$

Formons $r \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \times (-\cos \theta) = -\cos 2\theta$ alors $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} r \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = 1$

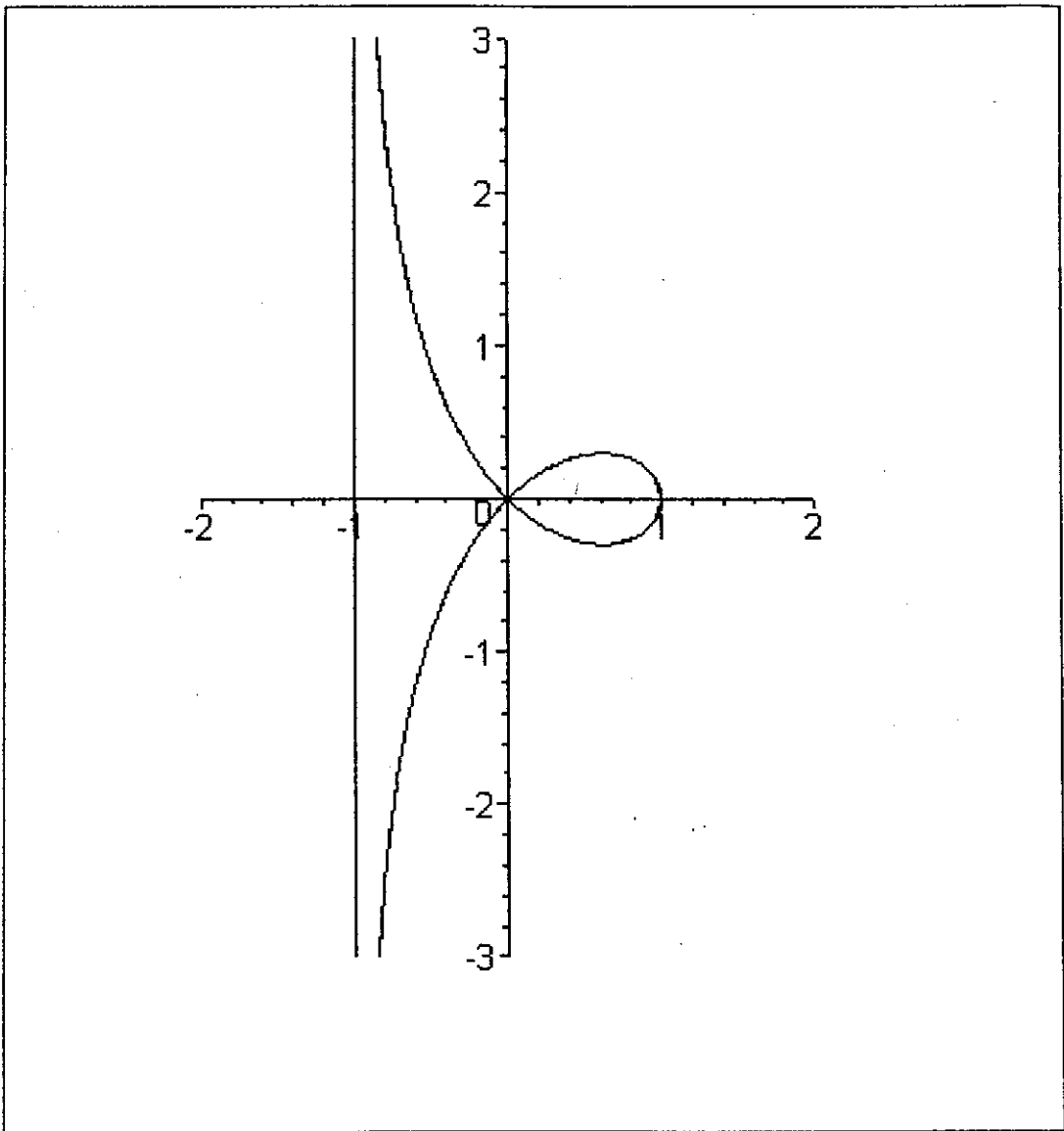
La droite d'équation $Y = 1$ (c'est-à-dire la droite d'équation $x = -1$) est asymptote à la courbe .

De plus $Y - 1 = -\cos 2\theta - 1 = -(2\cos^2 \theta - 1) - 1 = -2\cos^2 \theta < 0$

La courbe est « en dessous » de la droite d'équation $Y = 1$ c'est-à-dire « à droite » de la droite d'équation $x = -1$

• **Courbe :** On trace l'arc générateur (Γ) correspondant à $\theta \in \mathcal{E}$.

Pour obtenir la courbe (C) , on complète en traçant la portion de courbe symétrique de (Γ) par rapport à (Ox) .



ETUDE METRIQUE DES COURBES PLANES

1. LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE

1. ARC RECTIFIABLE

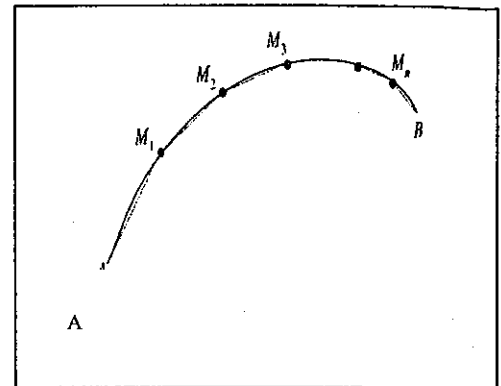
Soit (C) la courbe représentative de la fonction vectorielle \vec{V} dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
A tout réel t de \mathcal{D} , on peut associer le vecteur $\vec{V}(t)$ puis le point M tel que $\vec{V}(t) = \overrightarrow{OM}$.

A une valeur du paramètre t correspond un point et un seul de (C) .

Considérons un arc de courbe $\Gamma = \widehat{AB}$ autre qu'un segment de droite (pour lequel le problème de la longueur est résolu).

Plaçons des points M_1, M_2, \dots, M_n sur cet arc.

On peut considérer la longueur L_n de la ligne polygonale $AM_1M_2\dots M_nB$.



On dit que l'arc Γ est **rectifiable** si la longueur L_n admet une limite finie L lorsque le nombre de points M_n augmente indéfiniment, chaque point devenant « infiniment proche » de ses voisins.

Cette limite L s'appelle **longueur** de l'arc de courbe Γ .

On voit qu'au cours de ce processus, le segment $[M_k M_{k+1}]$ devient un déplacement « infinitésimal » du point M , si bien que la longueur apparaît comme une intégrale simple.

Soit t le paramètre utilisé pour repérer le point M sur la courbe.
($t = a$ correspond au point A et $t = b$ correspond au point B).

On démontre que la longueur de l'arc Γ est :

$$L = \int_a^b \|\vec{V}'(t)\| dt$$

2. LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE DEFINI PARAMETRIQUEMENT

Considérons la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ pour $t \in [a; b]$ alors :

$$\vec{V}(t) = (x(t), y(t)) \text{ alors } \vec{V}'(t) = (x'(t), y'(t)) \text{ et } \|\vec{V}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

La valeur de L est donnée par la formule :

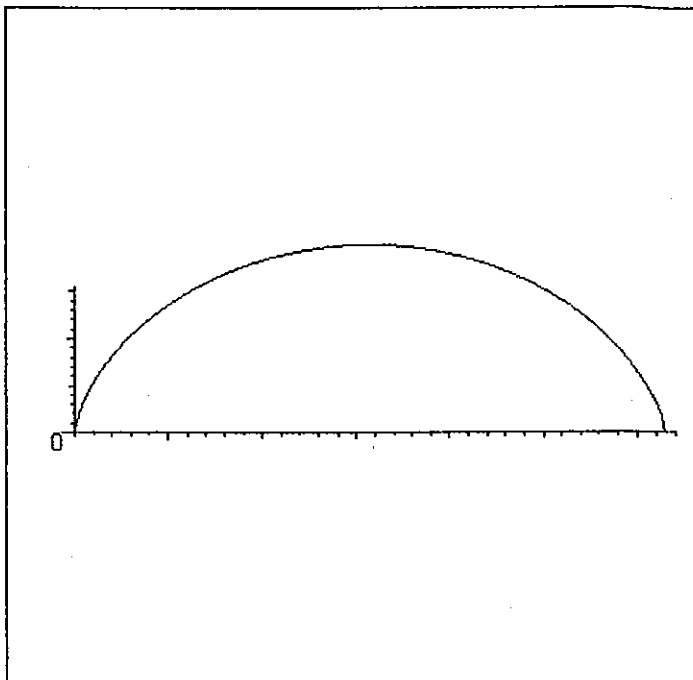
$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Exemple 1 : Longueur d'un arc de cycloïde

La cycloïde admet pour représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = R t - R \sin t \\ y = R - R \cos t \end{cases}$$

Un arc est obtenu pour $t \in [0 ; 2\pi]$



$$\text{D'où : } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} dt$$

$$L = R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \quad \text{Or } \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \quad (\text{voir formulaire})$$

$$\text{Alors } 1 - \cos t = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } L = R \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$\text{car } t \in [0 ; 2\pi] \Rightarrow \frac{t}{2} \in [0 ; \pi] \Rightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$$

$$\text{On effectue le changement de variable } u = \frac{t}{2} \text{ d'où } dt = 2 du \text{ et } L = 4R \int_0^{\pi} \sin u du$$

$$L = 4R [-\cos u]_0^{\pi} = 8R$$

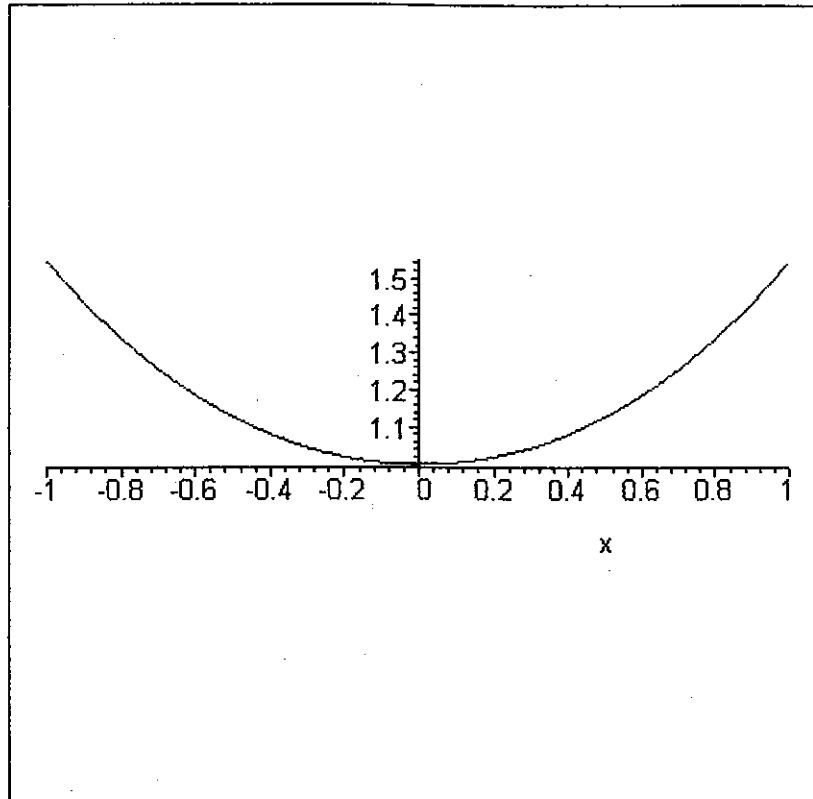
3. LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE DEFINI PAR UNE FONCTION

Lorsque la courbe (C) a une équation cartésienne de la forme $y = f(x)$ la longueur de l'arc correspondant à $x \in [a ; b]$ s'obtient par la formule :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

En effet , il suffit d'utiliser la formule du paragraphe **1.2.** avec x comme paramètre .

Exemple 2 : Longueur de l'arc de chaînette d'équation $y = ch x$ pour $x \in [-1 ; 1]$



$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (ch'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + sh^2(x)} dx \quad \text{Or } ch^2x - sh^2x = 1$$

$$\text{D'où } L = \int_{-1}^1 \sqrt{ch^2(x)} dx = \int_{-1}^1 chx dx \quad (\text{car } chx > 0)$$

$$L = 2 \int_0^1 chx dx \quad (\text{car } ch \text{ est une fonction paire})$$

$$L = 2 [shx]_0^1 = 2 sh(1) = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx 2,35 \quad (\text{unités de longueur})$$

4. LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE DEFINI PAR UNE EQUATION POLAIRE

Lorsque la courbe (C) a une équation polaire de la forme $r = f(\theta)$ la longueur de l'arc correspondant à $\theta \in [a ; b]$ s'obtient par la formule :

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

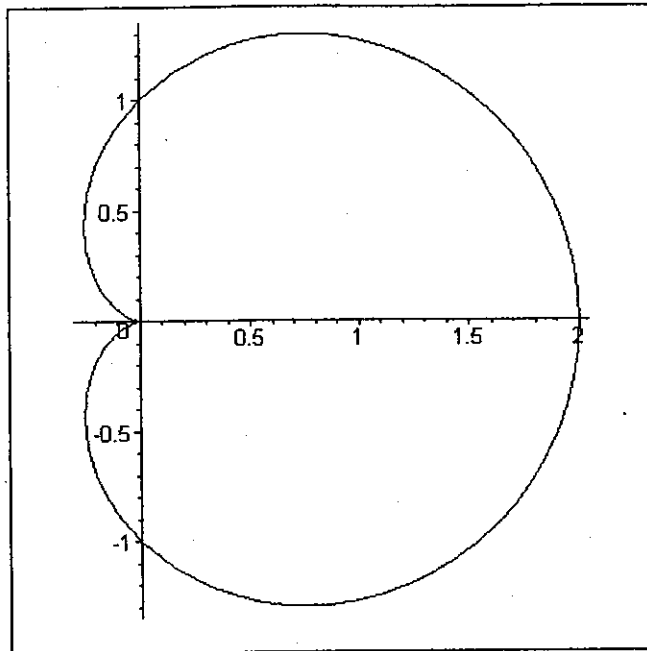
En effet, il suffit d'utiliser la formule du paragraphe 1.2. avec $\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$

$$\text{Alors } \begin{cases} x' = r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta \\ y' = r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{On obtient } x'^2 + y'^2 = r'^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 2r'r \cos \theta \sin \theta + r'^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + 2r'r \cos \theta \sin \theta$$

$$\text{d'où } x'^2 + y'^2 = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r'^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 + r'^2$$

Exemple 3 : Longueur de la cardioïde d'équation polaire $r = 1 + \cos\theta$



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} \, d\theta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} \, d\theta \quad (\text{car } (C) \text{ est symétrique par rapport à } (Ox))$$

Or $1 + \cos\theta = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (voir formulaire)

D'où $L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \, d\theta$ (car, pour $\theta \in [0; \pi]$, on a $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$)

On effectue le changement de variable $u = \frac{\theta}{2}$ d'où $d\theta = 2 \, du$ et $L = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos u \times 2 \, du$

$$L = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = 8 [\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8 \quad (\text{unités de longueur})$$

2. COURBURE D'UNE COURBE PLANE

1. ABCISSE CURVILIGNE

Soit (C) la courbe représentative de la fonction vectorielle \vec{V} dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On a : $\overline{OM} = \vec{V}(t)$. Sur une courbe, il y a deux sens de parcours possibles.

Orienter la courbe, c'est choisir l'un de ces deux sens comme sens positif.

Soit Γ un arc orienté de (C) . Choisissons un point A de Γ comme origine.

On appelle *abscisse curviligne* d'un point M de Γ le réel s ayant :

- pour valeur absolue la longueur de l'arc \widehat{AM}
- pour signe : + si \widehat{AM} est parcouru (de A à M) dans le sens positif
- si \widehat{AM} est parcouru (de A à M) dans le sens négatif

On montre que : $s(t) = \int_a^t \|\vec{V}'(u)\| du$ (a est la valeur du paramètre associé au point A)

2. VECTEUR UNITAIRE TANGENT ET VECTEUR UNITAIRE NORMAL

Df :

Un *point birégulier* est un point $M(t)$ de (C) tel que les vecteurs $\frac{d\vec{V}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}$ sont non nuls et non colinéaires .

Propriété :

$\vec{T} = \frac{d\vec{V}}{ds}$ est le *vecteur unitaire tangent* en M à la courbe .

Démonstration :

Soit M un point birégulier d'un arc orienté Γ de (C) .

La tangente à Γ en $M(t)$ admet $\vec{V}'(t)$ (encore noté $\frac{d\vec{V}}{dt}$) comme vecteur directeur .

On oriente Γ dans le sens des t croissants (c'est-à-dire que s est une fonction croissante de t)

On a $s(t) = \int_a^t \|\vec{V}'(u)\| du$ d'où $\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}'(t)\|$ Alors $\vec{T} = \frac{d\vec{V}}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{V}}{dt}$ (avec $\frac{dt}{ds} > 0$) .

Le vecteur \vec{T} est donc colinéaire à $\frac{d\vec{V}}{dt}$. De plus $\|\vec{T}\| = \frac{dt}{ds} \times \|\vec{V}'(t)\| = \frac{dt}{ds} \times \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \vec{T}$ unitaire

Remarque :

Le vecteur \vec{T} définit un axe porté par la tangente appelé *tangente orientée* en M à la courbe Γ .

L'orientation d'un arc de courbe permet de définir une orientation sur la tangente en tout point de cet arc .

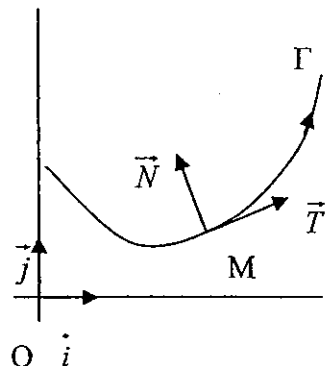
Df :

Soit \vec{N} le vecteur unitaire directement orthogonal à \vec{T} .

C'est-à-dire que l'on a : $\|\vec{N}\| = 1$ et $(\vec{T} ; \vec{N}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Alors \vec{N} s'appelle *vecteur unitaire normal* en M à la courbe .

$(M ; \vec{T}, \vec{N})$ s'appelle **repère de FRENET** en M à la courbe Γ .



3. COURBURE

Propriété :

Les vecteurs \vec{N} et $\frac{d\vec{T}}{ds}$ sont colinéaires .

Démonstration : Posons $(\vec{i} ; \vec{T}) = \alpha$. Alors \vec{T} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$.

On a vu que $\frac{d\vec{T}}{d\alpha} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à \vec{T} . Donc $\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$.

$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N}$ ce qui prouve que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est colinéaire à \vec{N} .

Df :

$\frac{d\vec{T}}{ds} = c \vec{N}$ c s'appelle *courbure* au point M (c est un réel positif ou négatif)

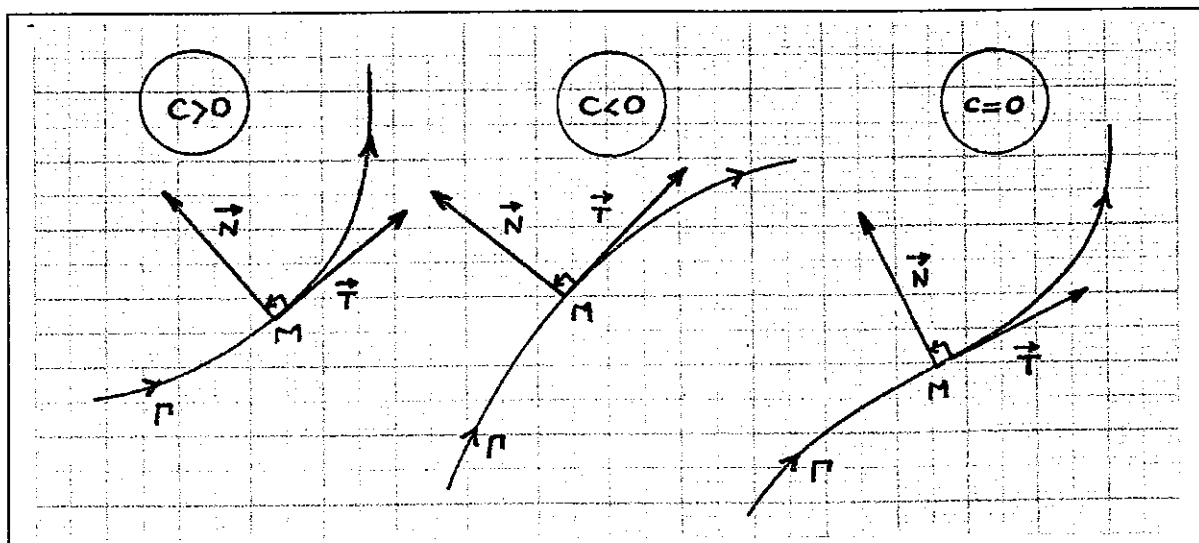
• Si $c \neq 0$, on appelle *rayon de courbure* le réel (positif ou négatif) ρ tel que $\rho = \frac{1}{c}$.

Le point Ω de la normale défini par $\overrightarrow{M\Omega} = \rho \vec{N}$ est appelé *centre de courbure* .

Le cercle de centre Ω et de rayon ρ s'appelle *cercle de courbure* .

• Si $c = 0$, on dit que le rayon de courbure ρ est infini .

Interprétation graphique



- Remarques :**
- 1) Le point Ω est dans la concavité de la courbe .
 - 2) En un point d'inflexion , la courbure est nulle (ρ est infini) .
 - 3) En tout point d'un cercle de rayon R , le rayon de courbure est égal à R .
 - 4) En tout point d'une droite , le rayon de courbure est infini .

4. CALCUL DU RAYON DE COURBURE

• En coordonnées paramétriques

Soit la représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ de la courbe (C).

On se place dans le cas où les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ admettent des dérivées secondes

\vec{T} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\frac{d\vec{V}}{dt}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

Comme ces vecteurs sont colinéaires, leurs coordonnées sont proportionnelles.

On peut donc écrire (si $x' \neq 0$) : $\frac{y'}{x'} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{y'}{x'}$

En dérivant par rapport au paramètre t , on obtient : $(1 + \tan^2 \alpha) \times \frac{d\alpha}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2}$

soit encore : $(1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2) \times \frac{d\alpha}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2} \Leftrightarrow (x'^2 + y'^2) \times d\alpha = (y''x' - x''y') \times dt$

Par ailleurs $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$ et $\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}'(t)\|$ (voir paragraphes **2.2.** et **2.3.**) donc $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Supposons que l'on ait : $y''x' - x''y' \neq 0$

Alors $\rho = \frac{ds}{dt} \times \frac{dt}{d\alpha} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \times \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'}$

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x' - x''y'}$$

Remarque : On ne peut appliquer la formule précédente en un point d'inflexion mais dans ce cas la courbure est nulle (et ρ est infini).

Exemple 4 : Soit (C) le cercle de centre O et de rayon R.

En tout point de (C), le rayon de courbure est égal à R.

En effet une représentation paramétrique de (C) est : $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0 ; 2\pi]$

$$x' = -R \sin t \quad \text{et} \quad y' = R \cos t$$

$$x'' = -R \cos t \quad \text{et} \quad y'' = -R \sin t \quad \text{D'où} \quad \rho = \frac{(R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = \frac{R^3}{R^2} = R$$

• **En coordonnées cartésiennes**

Dans le cas d'une courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, on applique la relation précédente en prenant x comme paramètre.

On obtient :
$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$
 (lorsque $y'' \neq 0$)

Remarque : On ne peut appliquer la formule précédente en un point d'inflexion mais dans ce cas la courbure est nulle (et ρ est infini).

Exemple 5 : Considérons la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

Alors $y' = 2x$ et $y'' = 2$ d'où $\rho = \frac{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$

Au sommet O le rayon de courbure est égal à $\frac{1}{2}$

Au point A de coordonnées $(\sqrt{2}; 2)$ le rayon de courbure est égal à $\frac{(\sqrt{9})^3}{2} = 13,5$

• **En coordonnées polaires**

Dans le cas d'une courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$, on applique toujours la même relation en

prenant θ comme paramètre avec :
$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

D'où $x' = r' \cos \theta - r \sin \theta$ et $y' = r' \sin \theta + r \cos \theta$
 $x'' = r'' \cos \theta - 2r' \sin \theta - r \cos \theta$ et $y'' = r'' \sin \theta + 2r' \cos \theta - r \sin \theta$

On sait que $x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2$ (voir paragraphe 1.4.)

De même : $y''x' - x''y' = (r'' \sin \theta + 2r' \cos \theta - r \sin \theta)(r' \cos \theta - r \sin \theta) -$
 $(r'' \cos \theta - 2r' \sin \theta - r \cos \theta)(r' \sin \theta + r \cos \theta)$

$y''x' - x''y' = (r''r' \sin \theta \cos \theta - r''r \sin^2 \theta + 2r'^2 \cos^2 \theta - 2r r' \sin \theta \cos \theta - r r' \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta)$
 $- (r''r' \sin \theta \cos \theta + r''r \cos^2 \theta - 2r'^2 \sin^2 \theta - 2r r' \sin \theta \cos \theta - r r' \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta)$

On simplifie et on obtient : $y''x' - x''y' = r^2 + 2r'^2 - r r''$. D'où :

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r r''}$$

Remarque : On ne peut appliquer la formule précédente en un point d'inflexion mais dans ce cas la courbure est nulle (et ρ est infini).

COURBES GAUCHES

Les résultats vus au chapitre précédent dans le cas des courbes planes s'étendent aux courbes de l'espace appelées *courbes gauches*.

1. FONCTIONS VECTORIELLES A VALEURS DANS \mathbb{R}^3

On appelle *fonction vectorielle*, définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R}^3 , une fonction qui, à tout réel t de \mathcal{D} , associe un vecteur de \mathbb{R}^3 noté $\vec{V}(t)$.

Un point O de l'espace étant choisi comme origine, on peut considérer le point M de l'espace (encore noté $M(t)$) tel que $\vec{V}(t) = \overrightarrow{OM}$. t est appelé *paramètre* du point M .

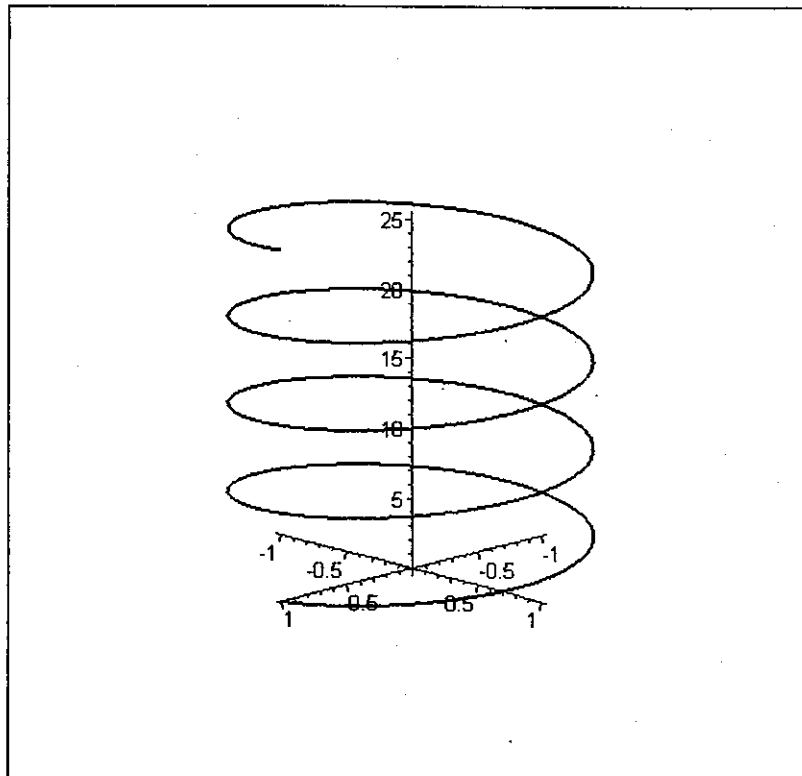
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on peut écrire : $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ où x , y et z sont trois fonctions numériques de la variable t définies sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Lorsque t décrit \mathcal{D} , Le point M décrit une courbe (C) de l'espace appelée *courbe gauche*.

Exemple 1 : Soient $a > 0$ et $h > 0$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ht \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

La courbe obtenue s'appelle *hélice circulaire*



2. PLANS TANGENTS – PLAN OSCULATEUR – PLAN NORMAL

Soient $M(t)$ un point de la courbe (C) et $\vec{V}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

- Comme dans le cas du plan, si $\vec{V}'(t)$ est non nul, on dit que M est un point *régulier*.
 $\vec{V}'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente en M à la courbe (C) .
- Si $\vec{V}'(t)$ est nul, on dit que M est un point *stationnaire* et la tangente est dirigée par le premier vecteur $\vec{V}^{(p)}(t)$ qui n'est pas nul.
- On appelle *plan tangent* en M à la courbe, tout plan qui contient la tangente en ce point.
- Soient $\vec{V}^{(p)}(t)$ et $\vec{V}^{(q)}(t)$ les deux premiers vecteurs *non nuls* et *non colinéaires* parmi les dérivées successives de $\vec{V}(t)$.

Le *plan osculateur* en M à (C) est le plan tangent déterminé par les vecteurs $\vec{V}^{(p)}(t)$ et $\vec{V}^{(q)}(t)$.

- Le *plan normal* est le plan perpendiculaire en M à la tangente à la courbe en ce point. Toute droite passant par M , perpendiculaire à la tangente en M est appelée *normale*. L'intersection du plan normal et du plan osculateur s'appelle *normale principale*.

3. ETUDE METRIQUE DES COURBES GAUCHES

1. LONGUEUR D'UN ARC D'UNE COURBE GAUCHE

Considérons un arc de courbe gauche $\Gamma = \widehat{AB}$

On démontre que la longueur de l'arc Γ est :

$$L = \int_a^b \|\vec{V}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

($t = a$ correspond au point A et $t = b$ correspond au point B).

Retour à l'Exemple 1 : Hélice circulaire $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ht \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (a > 0 \text{ et } h > 0)$

- Calcul de la longueur de l'arc d'hélice circulaire pour $t \in [0; 2\pi]$

$$\begin{cases} x' = -a \sin t \\ y' = a \cos t \\ z' = h \end{cases} \quad \text{On a : } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + h^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + h^2}$$

2. COURBURE

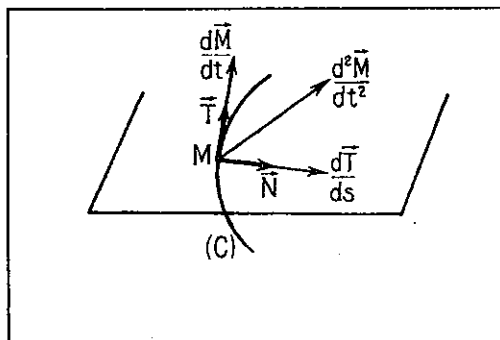
Soit $M(t)$ un point *birégulier* de la courbe (C) c'est-à-dire un point tel que les vecteurs $\frac{d\vec{V}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}$ soient non nuls et non colinéaires. Ces deux vecteurs définissent donc le plan osculateur en M à (C) .

Soit \vec{T} le vecteur unitaire tangent en M à la courbe : $\vec{T} = \frac{d\vec{V}}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\vec{V}}{dt}$

En dérivant par rapport à s , on obtient :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2} \times \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dt}{ds} \times \frac{dt}{ds} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)$$

soit encore :
$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2} \times \frac{d\vec{V}}{dt} + \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \times \frac{d^2\vec{V}}{dt^2}$$



Le vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ appartient donc au plan osculateur en M à (C) .

De plus \vec{T} étant unitaire, $\frac{d\vec{T}}{ds}$ lui est orthogonal. $\frac{d\vec{T}}{ds}$ définit donc la normale principale en M à (C) .

Soit \vec{N} le vecteur unitaire de la normale principale appartenant au demi-plan contenant $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}$.

Les vecteurs $\frac{d\vec{T}}{ds}$ et \vec{N} sont colinéaires et de même sens (car la composante de $\frac{d\vec{T}}{ds}$ sur $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}$ est positive)

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c \vec{N} \quad c \text{ s'appelle } \textit{courbure} \text{ au point } M \text{ (} c \text{ est un réel positif)} \text{ et on a : } c = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$$

- si $c \neq 0$, on appelle *rayon de courbure* en M le réel positif ρ tel que $\rho = \frac{1}{c}$
- si $c = 0$, on dit que le rayon de courbure est infini.

3. TORSION

Le vecteur $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ est appelé vecteur unitaire *binormal*.

Le repère orthonormal direct « mobile » $(M; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est appelé *trièdre de FRENET*.

On démontre que $\frac{d\vec{B}}{ds}$ et \vec{N} sont colinéaires.

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = k \vec{N} \quad k \text{ s'appelle } \textit{torsion algébrique} \text{ en } M \text{ (} k \in \mathbb{R} \text{)}$$

- si $k \neq 0$, on appelle *rayon de torsion algébrique* en M le réel τ tel que $\tau = \frac{1}{k}$.

Remarque : Lorsqu'une courbe de l'espace est « plane » c'est-à-dire contenue dans un plan (P), le vecteur \vec{B} est constant, orthogonal à (P) donc la torsion est nulle.

4. CALCULS DE ρ ET DE τ

$$\bullet \rho = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2}}$$

$$\bullet \tau = -\frac{(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2}{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}$$

Retour à l'Exemple 1 : Hélice circulaire $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ht \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (a > 0 \text{ et } h > 0)$

• Calcul du rayon de courbure $\begin{cases} x' = -a \sin t \\ y' = a \cos t \\ z' = h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'' = -a \cos t \\ y'' = -a \sin t \\ z'' = 0 \end{cases}$

D'où $\rho = \frac{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)^2 + (ah \sin t)^2 + (-ah \cos t)^2}} = \frac{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2)^2 + a^2 h^2}} = \frac{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{a \sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a^2 + h^2}{a}$

• Calcul du rayon de torsion $\begin{cases} x' = -a \sin t \\ y' = a \cos t \\ z' = h \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -a \cos t \\ y'' = -a \sin t \\ z'' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x''' = a \sin t \\ y''' = -a \cos t \\ z''' = 0 \end{cases}$

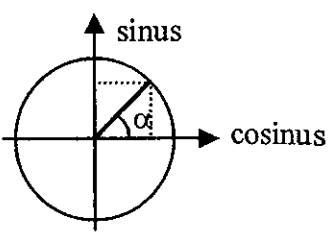
on a : $(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 = a^2(a^2 + h^2)$ (voir calcul précédent).

alors : $\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & h \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = h \times \begin{vmatrix} -a \cos t & -a \sin t \\ a \sin t & -a \cos t \end{vmatrix} = a^2 h$

D'où le rayon de torsion $\tau = -\frac{a^2(a^2 + h^2)}{a^2 h} = -\frac{a^2 + h^2}{h}$

Remarque : Pour l'hélice circulaire, courbure et torsion sont constantes et $\tau = -\frac{a}{h} \times \rho$.

ANNEXE 1 : FORMULAIRE DE TRIGONOMETRIE

Angles remarquables	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">α</th> <th style="padding: 5px;">0</th> <th style="padding: 5px;">$\frac{\pi}{6}$</th> <th style="padding: 5px;">$\frac{\pi}{4}$</th> <th style="padding: 5px;">$\frac{\pi}{3}$</th> <th style="padding: 5px;">$\frac{\pi}{2}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$\sin \alpha$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{1}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\cos \alpha$</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{1}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </tbody> </table>	α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$															
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1															
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0															
Angles associés	$\sin(-a) = -\sin a$ $\sin(\pi + a) = -\sin a$ $\sin(\pi - a) = \sin a$ $\cos(-a) = \cos a$ $\cos(\pi + a) = -\cos a$ $\cos(\pi - a) = -\cos a$																			
$\pi + a$ $\pi - a$ $\frac{\pi}{2} + a$ $\frac{\pi}{2} - a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$																		
Relations usuelles	$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$																			
Addition	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$																			
Multiplication	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$ $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$																			
Transformations	$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$ $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$																			

ANNEXE 2 : FONCTIONS HYPERBOLIQUES

• *cosinus hyperbolique* : $ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

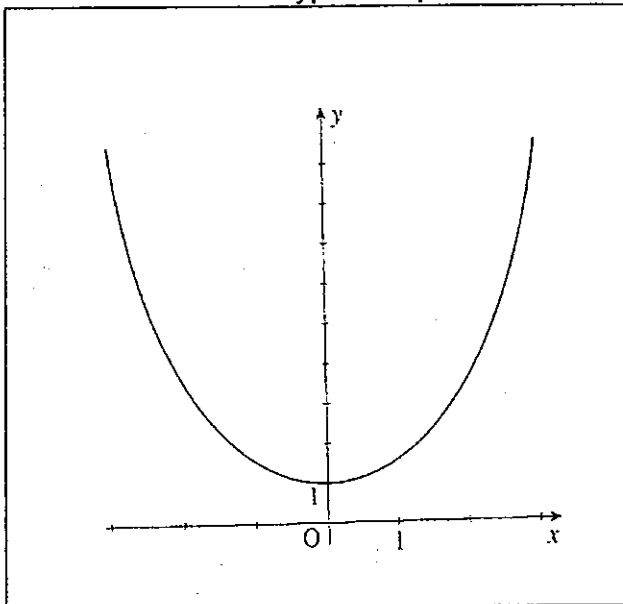
• *sinus hyperbolique* : $sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

• *tangente hyperbolique* : $th x = \frac{sh x}{ch x}$

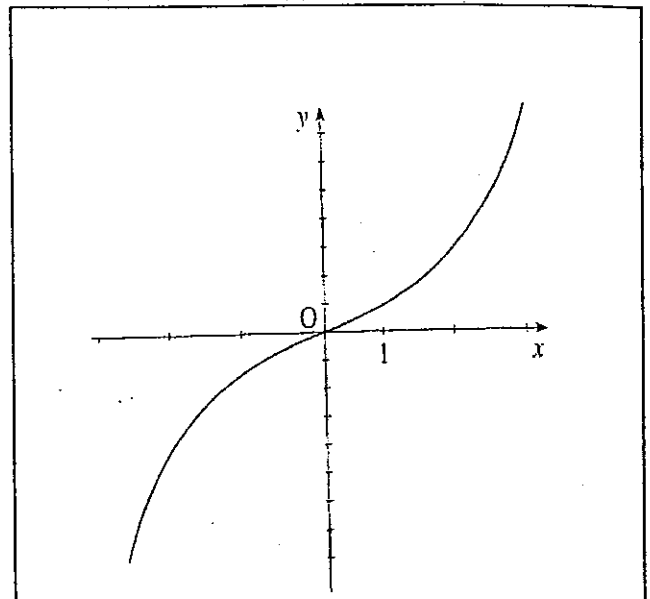
Propriété fondamentale :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ch^2 x - sh^2 x = 1$$

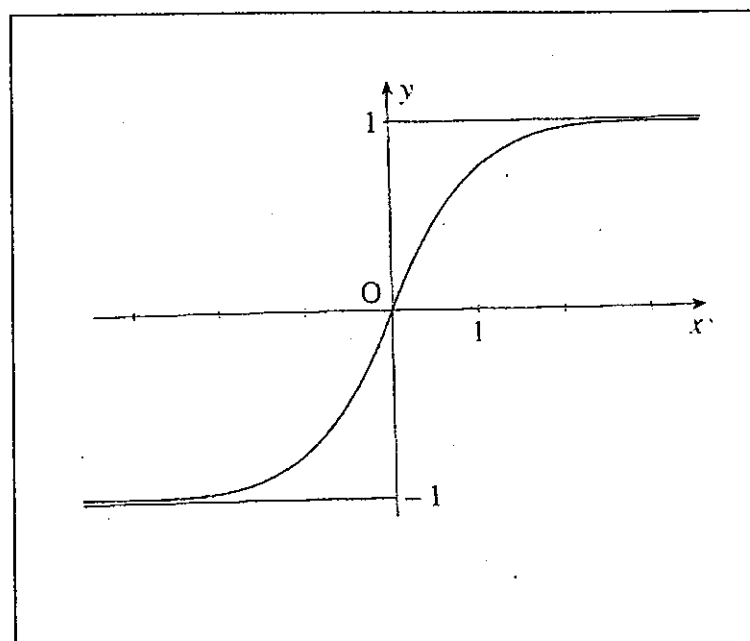
Cosinus hyperbolique



Sinus hyperbolique



Tangente hyperbolique



ANNEXE 3 : FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES

La fonction *Arc sinus* est la bijection réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

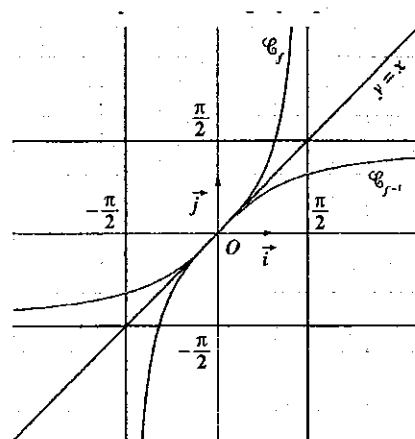
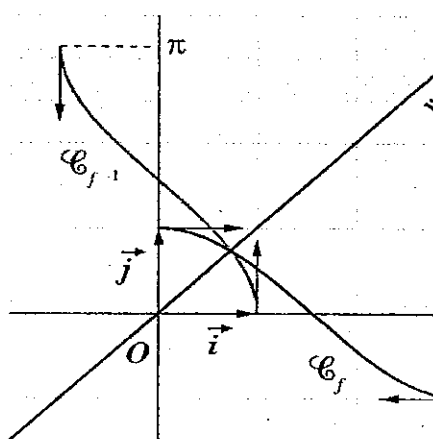
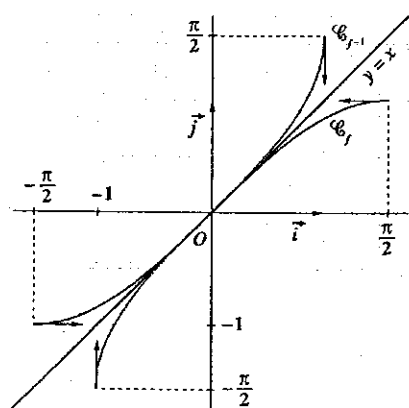
$$\text{On a donc } \begin{cases} y = \text{Arc sin } x \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases} \text{ et } \forall x \in]-1; 1[\quad (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction *Arc cosinus* est la bijection réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0; \pi]$

$$\text{On a donc } \begin{cases} y = \text{Arc cos } x \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0; \pi] \end{cases} \text{ et } \forall x \in]-1; 1[\quad (\text{Arccos})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction *Arc tangente* est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} y = \text{Arc tan } x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\end{cases} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



ANNEXE 4 : DERIVEES USUELLES

Fonction f	D_f	Dérivée f'	$D_{f'}$
$f(x) = a$ (constante)	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$)	\mathbb{R}	$f'(x) = n x^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \operatorname{sh} x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \operatorname{ch} x$	\mathbb{R}
$f(x) = \operatorname{ch} x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \operatorname{sh} x$	\mathbb{R}
$f(x) = \operatorname{th} x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^\alpha$ ($= e^{\alpha \ln x}$)	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \operatorname{Arcsin} x$	$[-1; 1]$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$f(x) = \operatorname{Arccos} x$	$[-1; 1]$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$f(x) = \operatorname{Arctan} x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}

ANNEXE 5 : DEVELOPPEMENTS LIMITES USUELS

Formule de Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + f'(0) \times x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Les développements limités qui suivent sont donnés en zéro .

$$\bullet e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

$$\bullet \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\bullet \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{315} x^7 + x^7 \varepsilon(x)$$

Soit m un réel quelconque

$$\bullet (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Remarque : pour $m = \frac{1}{2}$, on obtient le développement limité de $\sqrt{1+x}$

$$\bullet \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\bullet \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\bullet \operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \times \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\bullet \operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

ANNEXE 6 : OUVRAGES DE REFERENCE

- [1] P. THUILLIER – J.C. BELLOC – A. de VILLELE
MATHEMATIQUES POUR L'IUT
Editions MASSON
- Analyse Tome 1
 - Analyse Tome 2
 - Analyse Tome 3
 - Algèbre
 - Géométrie différentielle
- [2] HOGUIN – LARCHER – PARIENTE
MATHS EN MODULES – DUT ET BTS INDUSTRIELS
Editions CASTEILLA
- Tome 1 Bases Fondamentales
 - Tome 2 Eléments en mathématiques appliquées
- [3] P.TAQUET – P.TIREL – J.BANCE
MATHEMATIQUES POUR BTS INDUSTRIELS – GROUPEMENT A
Editions HACHETTE
- [4] C. LARCHER – M.PARIENTE – J.C. ROY
MATHEMATIQUES POUR DUT ET BTS INDUSTRIELS
Editions TECHNIPLUS
- [5] R. NOËL
FONCTIONS ET COURBES – SUPPORT IUT
Editions G.MORIN
- [6] J.M.MONIER
GEOMETRIE (PCSI-PTSI,PC-PSI-PT)
Editions DUNOD