

Introduction à la Robotique MI3

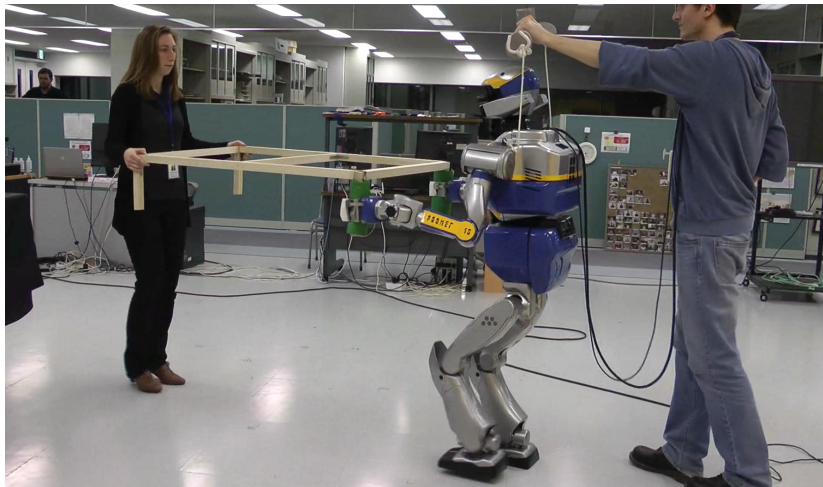
Philippe Fraise

Université de Montpellier

20/01/2020

Introduction

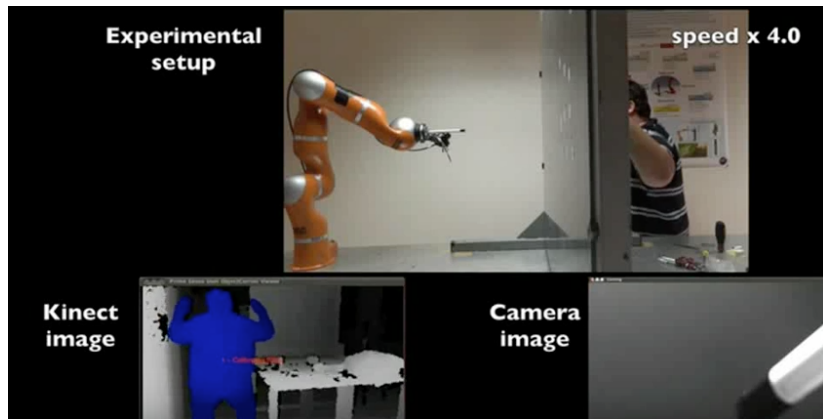
Introduction à la robotique



Interaction Humain-Humanoïde (Joint Robotics Lab, Tsukuba, Japan, 2013).

Introduction

Systèmes robotisés



Interaction Humain-Humanoïde (Projet ANR ICARO 2011).

Introduction à la robotique de manipulation

Introduction à la robotique

Introduction

On considère un système polyarticulé équipé de deux actionneurs et deux segments de longueurs l_1 et l_2 (cf. Fig. 2).

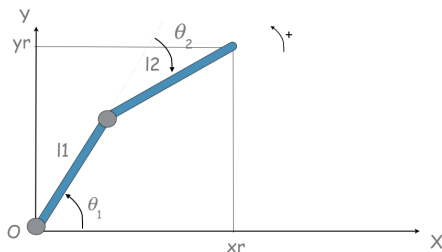


Figure 1: Bras robotisé à 2 degrés de libertés

On souhaite contrôler le mouvement de l'effecteur défini par sa position (x_r, y_r) dans le repère (O, X, Y) . Le contrôle des moteurs s'effectue dans le repère des actionneurs défini par (θ_1, θ_2) .

Exercice 1

Déterminer l'expression de la fonction vectorielle $f(\Theta)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = f(\Theta) \quad (1)$$

- avec $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$.
- Déterminer l'expression de $\dot{X} = \frac{d}{dt} f(\Theta)$.
- En déduire l'expression de $J(\Theta) = \frac{\partial f(\Theta)}{\partial \Theta}$.
- Explorer l'espace accessible du robot lorsque $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $l_1 = 0.6m$ et $l_2 = 0.3m$.

Introduction à la robotique

Introduction

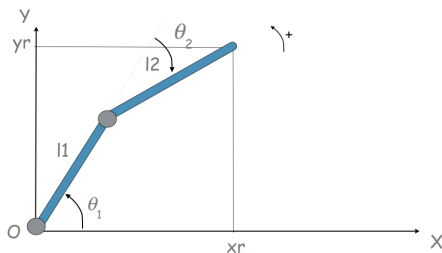


Figure 2: Bras robotisé à 2 degrés de liberté

Modèle Géométrique Direct (MGD)

- On peut exprimer $X = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$.

Introduction à la robotique

Introduction

Modèle Cinématique Direct (MCD)

- En dérivant cette expression, on obtient :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

- Soit :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

- On peut ainsi exprimer les relations de vitesses avec :

$$\dot{X} = J(\Theta) \dot{\Theta}$$

- $J(\Theta)$ est appelée matrice Jacobienne et représente la matrice des dérivées partielles du 1^{er} ordre de la fonction vectorielle $f(\Theta)$.

Exercice 2

Déterminer l'expression de la fonction $g(X)$:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = g(X) \quad (2)$$

- avec $X = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$.
- Déterminer le domaine de définition de la fonction $g(X)$ connaissant le domaine de définition de $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $l_1 = 0.6m$ et $l_2 = 0.3m$.
- Que se passe-t-il si l'on cherche à atteindre le point suivant : $x_r = 1m$ et $y_r = 1m$?

Introduction à la robotique

Modélisation

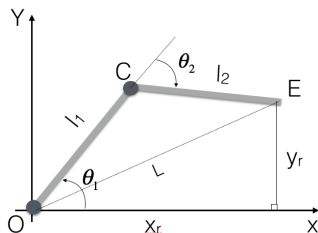


Figure 3: Bras à 2ddl: Construction du MGI

Modèle Géométrique Inverse

On considère le triangle quelconque formé par les points (O, C, E) , avec :

$$L^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi - \theta_2) \quad (3)$$

$$L^2 = x_r^2 + y_r^2 \quad (4)$$

Introduction à la robotique

Modélisation

Modèle Géométrique Inverse

On peut ainsi déterminer l'expression de θ_2 tel que :

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \theta_2) &= -\cos(\theta_2) \\ L^2 &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_2)\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\cos(\theta_2) &= \frac{L^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \\ \theta_2 &= \pm \arccos\left(\frac{x_r^2 + y_r^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2}\right)\end{aligned}$$

Avec $\theta_2 > 0$: coude haut et $\theta_2 < 0$: coude bas.

Introduction à la robotique

Modélisation

Modèle Géométrique Inverse

On considère maintenant le MGD du bras manipulateur à 2ddl avec θ_2 qui est une variable connue. On a :

$$X = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

On peut exprimer le système sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} = A_p * \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_1 = l_1 + l_2 \cos(\theta_2)$ et $\alpha_2 = l_2 \sin(\theta_2)$

Modèle Géométrique Inverse

On obtient la solution en inversant la matrice des paramètres A_p :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} = A_p^{-1} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \quad (5)$$

avec :

$$A_p^{-1} = \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{x_r \alpha_1 + y_r \alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \quad (6)$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{y_r \alpha_1 - x_r \alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \quad (7)$$

Modèle Géométrique Inverse

On obtient donc pour le modèle géométrique inverse MGI d'un robot 2R plan les équations suivantes :

$$\theta_2 = \pm \arccos \left(\frac{x_r^2 + y_r^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \right) \quad (8)$$

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{x_r(l_1 + l_2 \cos(\theta_2)) + y_rl_2 \sin(\theta_2)}{(x_r^2 + y_r^2)} \right) \quad (9)$$

$$\theta_1 = \arcsin \left(\frac{y_r(l_1 + l_2 \cos(\theta_2)) - x_rl_2 \sin(\theta_2)}{(x_r^2 + y_r^2)} \right) \quad (10)$$

Quelles sont les contraintes que doivent respecter x_r et y_r ?

Exercice 3

- ① Déterminer l'expression du MGI avec $l_1 = 0.65m$, $l_2 = 0.35m$.

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = g(X)$$

- ② Déterminer et tracer les configurations du robot pour les 4 positions suivantes :

$$P_{os} = \begin{pmatrix} x_{r1} & x_{r2} & x_{r3} & x_{r4} \\ y_{r1} & y_{r2} & y_{r3} & y_{r4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.5 & 0.85 \\ 0.7 & 0 & 0.6 & 0.85 \end{pmatrix}$$

- ③ Conclusions.

Introduction à la robotique

Exercice

Modélisation du Centre de Masse (CdM)

On souhaite modéliser la position du Centre de Masse d'un robot manipulateur à 2ddl.

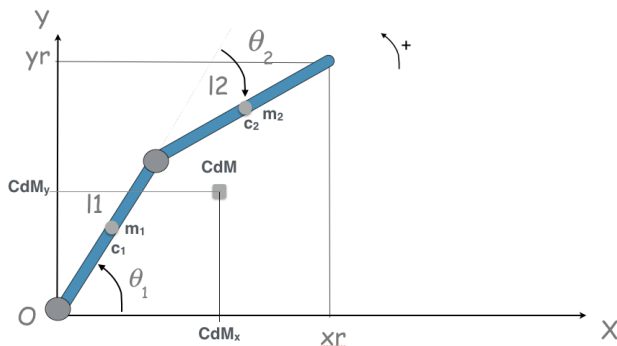


Figure 4: Contrôle de la position du CdM

Introduction à la robotique

Exercice

Modélisation du Centre de Masse (CdM)

Le calcul de la position du centre de masse ou centre de gravité d'un système mécanique est défini par :

$$OC\vec{d}M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{O}c_i \quad (11)$$

Avec $M = \sum_{i=1}^N m_i$

- 1 Déterminer la position du CdM du robot en fonction des variables articulaires (θ_1, θ_2) .
- 2 Comparer ce résultat avec le MGD du bras manipulateur à 2ddl. Conclusions. En déduire le MGI.
- 3 Représenter le bras de robot série équivalent dont la position de l'effecteur est associée à la position du CdM. Déterminer les longueurs équivalentes r_1 et r_2 de ce bras série?

Introduction à la robotique

Exercice

Identification Centre de Masse (CdM)

On réalise deux mesures statiques sur un robot à 2ddl en utilisant une plate-forme de force fixée au sol permettant de relever uniquement la valeur du CdM selon l'axe x .

On a mesuré $l_1 = 0.82m$, $l_2 = 0.9m$, $M = 80kg$ et $c_i = l_i/2$.

1 ^{er} Essai	$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$
CdM_x	0.179m
CdM_y	pas de mesure

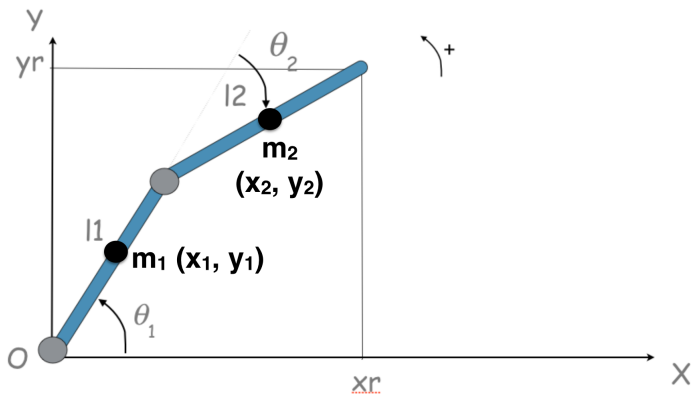
2 nd Essai	$\theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$
CdM_x	-0.453m
CdM_y	pas de mesure

- 1 Déterminer les coefficients r_1 et r_2 .
- 2 En déduire les valeurs des masses m_1 et m_2 .

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

On considère maintenant les masses de chaque segment positionner au centre de chacun des segments à $\frac{l_1}{2}$ et $\frac{l_2}{2}$.



On propose d'écrire l'expression des positions et des vitesses des centres de masses.

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Position et vitesses des centres des masses

Positions :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \\ x_2 = l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Vitesses :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Energie Cinétique

On calcule l'énergie cinétique du système :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

Énergie:

$$\begin{cases} E_{ci} = \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 + \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 \\ \dot{r}_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \\ \omega_1 = \dot{\theta}_1 \\ \omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

on obtient :

$$E_c = \frac{1}{8} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1^2(4m_2l_1^2 + 4m_2l_1l_2 \cos \theta_2 + 3m_2l_2^2 + 3m_1l_1^2) \\ + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2m_2(4l_1l_2 \cos \theta_2 + 6l_2^2) + \dot{\theta}_2^2(3m_2l_2^2) \end{array} \right) \quad (12)$$

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Energie Potentielle

On calcule l'énergie potentielle du système :

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

On obtient :

$$E_p = -g \left(\frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 m_1 + (l_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) m_2 \right) \quad (13)$$

Equation de Lagrange

On écrit le Lagrangien du système :

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Avec $L = E_c - E_p$

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Modèle dynamique

On obtient :

$$\Gamma = A(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} + G(\theta) + J^T F_{ext} \quad (14)$$

Avec :

$$A(\theta) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}m_1l_1^2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 + m_2l_1^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 & \frac{1}{4}m_2l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \frac{1}{2}m_1l_1l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\theta) = -g \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l_1 \cos \theta_1 m_1 + (l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)m_2) \\ \frac{1}{2}l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)m_2 \end{pmatrix}$$

Technique du couple calculé

On souhaite contrôler un robot manipulateur dont le modèle dynamique direct est :

$$\Gamma = A(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} + G(\theta) \quad (15)$$

- Proposer un schéma de commande de type proportionnel-dérivé sur l'erreur de position ($\theta_d - \theta$) capable de contrôler la position articulaire du robot. Conclusions
- Est-il possible d'éliminer les effets de la dynamique avec l'hypothèse que le modèle est parfaitement connu? Conclusions.
- Choisissons une commande de type linéaire qui ne tient pas compte de la dynamique du robot avec $\Gamma_c = Kp(\theta_d - \theta) + K_d(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$
- Écrire l'équation du système en boucle fermée. Conclusions.

Technique du couple calculé

On choisit cette fois-ci :

$$\Gamma_c = \hat{A}(K_p(\theta_d - \theta) + K_d(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + \ddot{\theta}_d) + \hat{H}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} + \hat{G}(\theta) \quad (16)$$

- Réécrire l'équation de la boucle fermée. Conclusions.
- Discuter sur le cas où les valeurs du modèle estimées sont différentes du système réel.
- Écrire l'équation du système en boucle fermée. Conclusions.
- Que représente les gains K_p et K_d dans cette équation?
- Calculer

Espace opérationnel

On souhaite contrôler un robot manipulateur dont le modèle dynamique est exprimé dans l'espace opérationnel :

$$F_c = M(\theta)\ddot{X} + \Lambda(\dot{\theta}, \theta) + F_{ext} \quad (17)$$

- Déterminer les expressions de $M(\theta)$ et $\Lambda(\dot{\theta}, \theta)$
- En utilisant la technique du couple calculé déterminé un vecteur de commande F_c tel que le comportement du robot dans l'espace opérationnel soit linéaire.
- Conclusions

Introduction à la robotique

Commande Cinématique

Commande Cinématique

On souhaite contrôler la position d'un robot manipulateur en utilisant le MCI. Soit :

$$\dot{\theta} = J^{-1}\dot{e} \quad (18)$$

On choisit $e = X - X_d$. Avec X_d On défini le comportement dynamique du robot avec la relation suivante

$$\dot{e} + \lambda e = 0$$

- Déterminer le vecteur de commande $\dot{\theta}$ pour le contrôle du robot avec le MCI.
- En déduire le schéma de commande.
- Conclusions

Commande Géométrique

On souhaite contrôler la position d'un robot manipulateur en utilisant le MGI. Soit :

$$\theta = g(X) \quad (19)$$

- Déterminer le schéma de commande de la position de l'effecteur (x_r, y_r) du robot en utilisant le MGI.
- Conclusions

Introduction à la robotique mobile

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Il existe plusieurs types de cinématiques de véhicules terrestres dont deux sont très couramment utilisés :

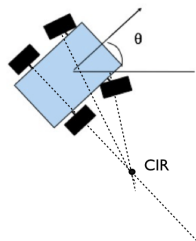


- Il s'agit d'une part du robot mobile de type unicycle avec 2 roues motrices indépendantes assurant à la fois la vitesse et l'orientation du véhicule.
- D'autre part, il y a le robot mobile de type véhicule à 3 ou 4 roues dont 1 ou 2 roues placées à l'avant sont orientables et assurent la direction indépendamment de la vitesse.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

La disposition des roues est viable s'il existe un point unique de vitesse nulle autour duquel tourne le robot. Il s'agit du Centre Instantané de Rotation (CIR).



- Le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires de tous les vecteurs vitesses du véhicule.

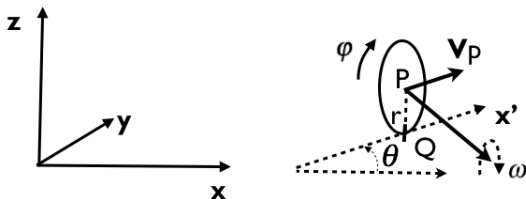
Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Hypothèses :

- Contact roue-sol ponctuel,
- Les roues sont indéformables de rayon r ,
- Roulement sans glissement,

En réalité le contact est une surface déformable (roue déformable) avec glissement.



$$\overrightarrow{V_Q} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$$

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Modélisation cinématique

Avec :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin(\theta) \vec{x} \\ -\dot{\psi} \cos(\theta) \vec{y} \\ \dot{\theta} \vec{z} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \vec{z} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\overrightarrow{V_P} = \begin{pmatrix} \dot{x} \vec{x} \\ \dot{y} \vec{y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

On obtient :

$$\dot{x} \vec{x} + \dot{y} \vec{y} + (\dot{\theta} \vec{z} + \dot{\psi} \sin(\theta) \vec{x} - \dot{\psi} \cos(\theta) \vec{y}) \wedge (-r \vec{z}) = \vec{0} \quad (23)$$

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Modélisation cinématique

On projette cette équation sur les axes x et y .

$$\dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + (\dot{\theta}\vec{z} + \dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x} - \dot{\psi}\cos(\theta)\vec{y}) \wedge (-r\vec{z}) = \vec{0} \quad (24)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} l/\vec{x} : \dot{x} + r\dot{\psi}\cos(\theta) &= 0 \\ / \vec{y} : \dot{y} + r\dot{\psi}\sin(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

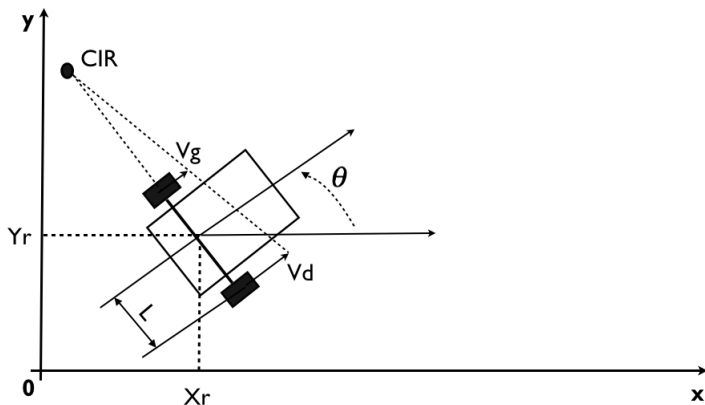
On exprime ainsi le roulement sans glissement de la roue par une contrainte non intégrale de la forme :

$$\dot{y}\cos(\theta) - \dot{x}\sin(\theta) = 0 \quad (26)$$

Il s'agit d'une contrainte de non-holonomie. c'est une contrainte non-intégrable.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique de l'unicyle



Déterminer la relation cinématique entre la vitesse des roues du véhicule V_d et V_g et le vecteur vitesse $\vec{P} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ dans le plan (o, \vec{x}, \vec{y})

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique de l'unicycle

Modélisation de l'unicycle

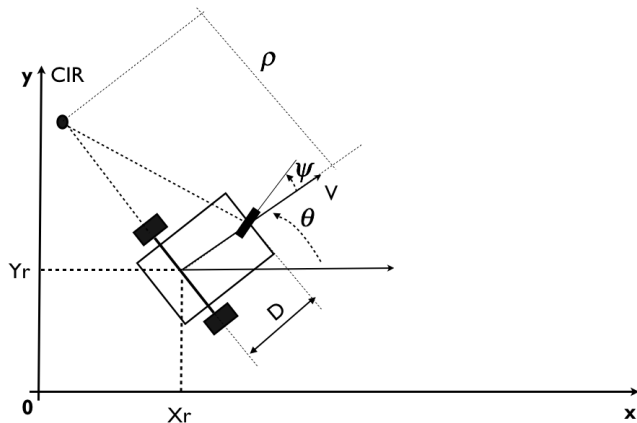
On considère un véhicule unicycle avec $L = 0.5m$, et

$$V_{gmax} = V_{dmax} = 3m/s.$$

- 1 En utilisant le modèle cinématique du véhicule unicycle, déterminer les expressions de $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ et ses dérivées.
- 2 On veut réaliser une trajectoire circulaire dans le plan (o, x, y) avec la vitesse maximale. Donner l'expression de $x(t)$ et $y(t)$.
- 3 En déduire les expressions des vitesses $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.
- 4 Donner les expressions de $V_g(t)$ et $V_d(t)$.
- 5 Déterminer le rayon de braquage maximal r_{max} pour une vitesse de rotation ω_0 donnée en prenant en compte la vitesse maximale des roues.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique du véhicule



Déterminer la relation cinématique entre la vitesse des roues du véhicule V et la commande du volant η et le vecteur vitesse $\vec{P} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ dans le plan (o, \vec{x}, \vec{y})

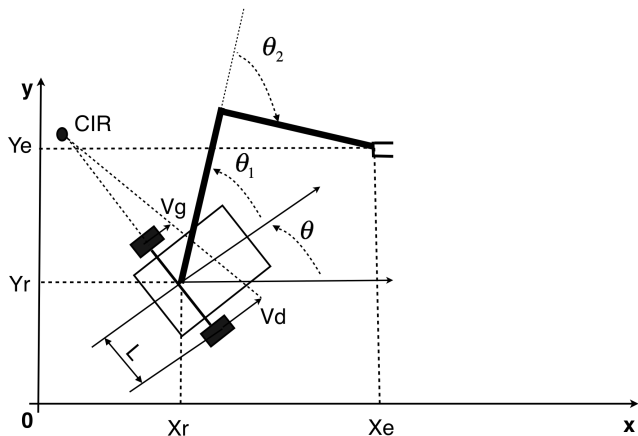
Modélisation du véhicule

On considère un véhicule avec $D = 1m$ et $V_{max} = 10m/s$.

- 1 En utilisant le modèle cinématique du véhicule unicycle, déterminer les expressions de $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\psi(t)$ et $\dot{\psi}(t)$ en fonction de $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ et ses dérivées.
- 2 On veut réaliser une trajectoire circulaire dans le plan (o, x, y) avec la vitesse maximale. Donner l'expression de $x(t)$ et $y(t)$.
- 3 En déduire les expressions des vitesses $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.
- 4 Donner les expressions de $V(t)$ et $\eta(t)$.
- 5 Déterminer le rayon de braquage maximal r_{max} pour une vitesse de rotation ω_0 donnée en prenant en compte la vitesse du véhicule.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un manipulateur mobile



Déterminer la relation cinématique entre la vitesse de l'effecteur \dot{X}_e, \dot{Y}_e ainsi que l'orientation du véhicule $\dot{\theta}$ et les variables de commandes dans l'espace des configurations $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, V_d$ et V_g .

Introduction à la résolution de la cinématique inverse des robots redondants

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Systèmes sous-déterminés

Soit le système algébrique :

$$Ax = b \quad (27)$$

Avec A une matrice de dimension $m \times n$ et x un vecteur de dimension $n \times 1$ et b de dimension $m \times 1$.

On considère le cas sous-déterminé avec : $m < n$ et $\text{rang}(A) = m$. Le système présente un nombre d'équations (m) inférieur aux nombres d'inconnus (n).

Le nombre de solution est infinie. On propose alors le choix de minimiser la norme euclidienne du vecteur x . Dans ce cas essayons de trouver quelle est la relation qui permet de réaliser cette minimisation. Soit :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x\|_2^2 \\ \text{s.t. : } Ax - b = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Systèmes sous-déterminés

On propose de déterminer sa solution en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Soit une nouvelle fonction objectif définie par :

$$\xi(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2 + \lambda^T (Ax - b)$$

Avec un vecteur de dimension m . On a maintenant un problème de minimisation non-contraint avec $m + n$ variables, les m composantes de b et les n composantes de x . On peut les regrouper dans le vecteur :

$$y = [x^T \lambda^T]^T$$

On peut maintenant établir la solution de ce problème par :

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial y} = 0$$

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Systèmes sous-déterminés

On peut décomposer cette expression en deux solutions :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = x + A^T \lambda = 0_n$$

et

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = Ax - b = 0_m$$

. On a : $x = -A^T \lambda$ et $AA^T \lambda - b = 0$ De ces deux expressions on en déduit :

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b \quad (29)$$

Avec :

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1} \quad (30)$$

A^+ est appelée la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice A ou inverse généralisée.

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

propriétés de la pseudo-inverse

En considérant la relation :

$$Ax = b$$

avec $x = A^+b$ et $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$, on obtient les propriétés suivantes :

$$AA^+A = A$$

$$A^+AA^+ = A^+$$

$$(A^+A)^T = A^+A$$

Une solution particulière x_p peut-être trouver en utilisant le projecteur dans le noyau de la matrice A . Soit :

$$x_p = A^+b + (I - A^+A)z \quad (31)$$

Avec z un vecteur quelconque.

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

propriétés de la pseudo-inverse

Démonstration :

$$x_p = A^+b + (I - A^+A)z$$

$$Ax_p = AA^T(AA^T)^{-1}b + A(I - A^T(AA^T)^{-1}A)z$$

$$Ax_p = AA^T(AA^T)^{-1}b + Az - AA^T(AA^T)^{-1}Az$$

$$Ax_p = b + Az - Az$$

soit :

$$Ax_p = b$$

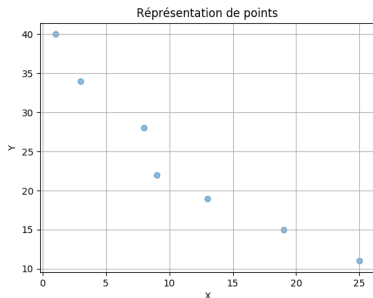
Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Exercice : système sur-déterminé

Soit l'ensemble des points suivants :

- 1 $X = [1 \ 3 \ 8 \ 9 \ 13 \ 19 \ 25]$ et $Y = [40 \ 34 \ 28 \ 22 \ 19 \ 15 \ 11]$
- 2 Déterminer la droite d'équation $Y = a * X + b$ minimisant l'écart entre la distribution des points et la droite au sens des moindres carrés.



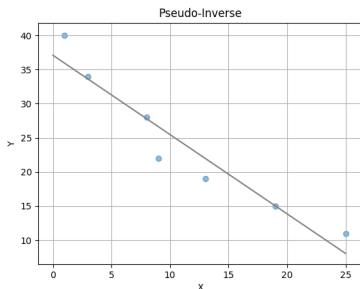
Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Exercice : système sur-déterminé

Soit l'ensemble des points suivants :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 1 \\ \dots & \\ X_7 & 1 \end{pmatrix}^+ Y^T = \begin{pmatrix} -1.1617 \\ 37.0875 \end{pmatrix} \quad (32)$$



Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Exercice : système sous-déterminé

Soit le système suivant à 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3 & 0.1 \\ 2 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3 & 0.1 \\ 2 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.38 \\ 1.98 \\ 3.77 \\ 4.30 \end{pmatrix}$$