
Examen - seconde session - 20 juin 2025

Durée : 2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits. Les objets connectés doivent être éteints et ranger dans le sac. Les réponses doivent être soigneusement rédigées. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Diagonalisation (6 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x \end{pmatrix}.$$

1. (0.5 point) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On la notera A .
2. (2 points) Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A .
Quelles sont les valeurs propres associées à v_1 et v_2 respectivement ?
3. (0.5 point) Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2) ? On la notera D .
4. (1 point) Soit P la matrice dont la première colonne contient les coordonnées du vecteur v_1 dans la base canonique et la deuxième celles du vecteur v_2 . Calculer P^{-1} .
5. (2 points) Quelle relation y a-t-il entre A , P , P^{-1} et D ? Donner l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Espaces vectoriels (6 points)

1. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3)$ et $u_2 = (3, -1, 1)$.
 - (a) (1 point) Quelle est sa dimension ?
 - (b) (1 point) Déterminer une équation cartésienne de F .
2. On considère le sous-espace vectoriel de G de $\mathbb{R}^3$ ayant pour équation cartésienne $4x - y + z = 0$.
 - (a) (1 point) Quelle est la dimension de G ?
 - (b) (1 point) Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.
3. (2 points) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Exercice 3 : Fonction en escalier (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 3, & \text{si } x = 1, \\ -2, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 4, & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. (1 point) Calculer $\int_0^4 f(t)dt$.
2. (1 point) Soit $x \in [0, 4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. (2 points) Montrer que F est une fonction continue sur $[0, 4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0, 4]$?

Exercice 4 : Calcul de primitives et intégrales (6 points)

Calculer les intégrales ou primitives suivantes.

1. (2 points) $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$.
2. (2 points) $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$.
3. (2 points) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$.

Exercice 1 : Diagonalisation

1. La matrice A de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On vérifie : - $A \cdot v_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot v_1 \Rightarrow \lambda_1 = 3$ - $A \cdot v_2 = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot v_2 \Rightarrow \lambda_2 = -1$

3. La matrice D dans la base (v_1, v_2) est :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. La relation entre les matrices est : $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Puisque $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale :

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Espaces vectoriels

1. (a) $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, avec $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (3, -1, 1)$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants $\Rightarrow \dim(F) = 2$.

Donc une équation cartésienne de F est :

$$4x + 8y - 4z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - z = 0$$

2. (a) G est défini par une équation $\Rightarrow \dim(G) = 2$.

(b) Résoudre le système : $4x - y + z = 0$ et équation de F . $\Rightarrow \dim(F \cap G) = 1$ (vecteur directeur par exemple). Une base de $F \cap G$ est donnée par le vecteur :

$$(2, -10, -18)$$

3. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = F + G$ Dire que ce sont des ss-ev de $\mathbb{R}^3$ Puisque $F \cap G \neq \{0\}$, ce n'est pas une somme directe : $\mathbb{R}^3 \neq F \oplus G$
Exercice 3 : Fonction en escalier

1.

$$\int_0^4 f(t)dt = \int_0^1 1dt + \int_1^2 (-2)dt + \int_2^4 4dt = 1 - 2 + 8 = 7$$

2. $F(x) =$ fonction par morceaux :

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 4x - 9 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

3. F est continue (limites à gauche et droite égales en $x = 1$ et $x = 2$), mais n'est pas dérivable car les dérivées à gauche et droite diffèrent en $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 4 : Primitives et intégrales

1. Factoriser $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, utiliser décomposition en éléments simples :

$$\int \frac{x+2}{(x-4)(x+1)} dx = \frac{7}{5} \ln|x-4| - \frac{2}{5} \ln|x+1| + C$$

2. Intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 0 + \sin(\pi/2) = 1$$

3. Poser $u = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow$ substitution. Résultat :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = 2(\sqrt{e + 1} - \sqrt{2})$$