
Examen - première session - 16 mai 2025

Durée : 2h (3h pour les tiers-temps)

Calculatrice, téléphone et documents interdits. Les réponses doivent être soigneusement rédigées. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Développement limité (6 points)

- (2 points) Énoncer le théorème de Taylor-Young.
- (2 points) Calculer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- (2 points) Déterminer le développement à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$. En déduire la position du graphe de f par rapport à la tangente en 0.

Exercice 2 : Intégration (8 points)

- Calculer les intégrales ou primitives suivantes.
 - (2 points) $\int_0^1 x \cos(3x) dx$.
 - (2 points) $F(x) = \int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx$.
 - (2 points) $G(x) = \int \frac{1}{(x-1)^2(x-3)} dx$.
- (2 points) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, montrer que $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

Exercice 3 : Changement de base (7 points)

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré 2 à coefficients réels, muni de la base canonique $B_E = (1, x, x^2)$. On note $F = \mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $B_F = ((1, 0), (0, 1))$.

- (1 point) Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ p &\mapsto (p(0), p'(0)), \end{aligned}$$

où p' désigne la dérivée de p . Montrer que f est une application linéaire.

- (1 point) Exprimer la matrice de représentation de f dans les bases canoniques.

3. (2 points) On considère les fonctions polynomiales $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$ et $p_3(x) = x^2 + 2$. Montrer que $B'_E = (p_1, p_2, p_3)$ forme une base de E et exprimer la matrice de passage de la base B_E vers B'_E .
4. (1 point) Soient $v_1 = (1, 3)$ et $v_2 = (0, 2)$. Montrer que $B'_F = (v_1, v_2)$ forme une base de F et exprimer la matrice de passage de la base B_F vers B'_F .
5. (2 points) Déterminer la matrice de représentation de l'application f dans les bases B'_E et B'_F .