
Examen - seconde session - 27 juin 2024

Durée : 2 heures

Calculatrice, téléphone et documents interdits. Les réponses doivent être soigneusement rédigées. Le barème est indicatif.

Partie 1 : Algèbre (12 points)

1. **Rang** (2 points) Soit $b \in \mathbb{R}$. Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de B en fonction des valeurs de b .

2. **Diagonalisation**

- (a) (1 point) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer Av_1 et Av_2 . En déduire les valeurs propres de A .

- (b) (3 points) Déterminer une expression de $A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de n .

3. **Espaces vectoriels**

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = x + 2y = 0\}$ et $F = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

- (a) (1 point) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En déterminer une base.
(b) (2 points) Déterminer une base de E .
(c) (2 points) E et F sont-ils en somme directe ?
(d) (1 point) E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Partie 2 : Analyse (14 points)

1. **Théorème des accroissements finis**

- (a) (1 point) Énoncer le théorème des accroissements finis.
(b) (2 points) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que f est croissante.
(c) (2 points) Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \geq 0, \quad x \leq e^x - 1 \leq xe^x.$$

Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f(t) = e^t$.

2. Calculs d'intégrales et primitives

- (a) (2 points) Calculer $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2+1} dx$. Indication : on pourra utiliser que $x^3 = x(x^2+1) - x$.
- (b) (2 points) Calculer la primitive $\int \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$. Indication : faire un changement de variable $u = \sqrt{t+1}$.

3. Dérivabilité

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- (a) (2 points) f est-elle continue en 0 ?
- (b) (1 point) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la tangente à f en $x = 1$.
- (c) (1 point) f est-elle dérivable en 0 ?
- (d) (1 point) f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?