

---

## Examen - première session -22 mai 2024

Durée : 2 heures

Calculatrice, téléphone et documents interdits. Les réponses doivent être soigneusement rédigées. Le barème est indicatif.

---

### Partie 1 : Algèbre (13 points)

#### 1. Diagonalisation

- (a) (2 points) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  admet deux valeurs propres complexes.
- (b) (2 points) Trouver une matrice inversible  $P$  telle que  $D = P^{-1}AP$  est diagonale. Donner les expressions de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

#### 2. Application linéaire

Soit  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$g(x, y, z) = \left( \frac{x}{2} + z, x + 2y, -x - y - z \right).$$

- (a) (2 points) Donner la matrice de  $g$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . L'application  $g$  est-elle un isomorphisme ?
- (b) (1 point) Calculer  $\text{Ker}(g)$ .
- (c) (1 point) Calculer le rang de  $g$ .
- (d) (2 points) A-t-on  $\text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g) = \mathbb{R}^3$  ?
- (e) (2 points) Soient  $u_1 = (2, 2, 1)$ ,  $u_2 = (2, 1, 1)$  et  $u_3 = (0, -1, 1)$ . Montrer que  $B = (u_1, u_2, u_3)$  est une base.
- (f) (1 point) Quel est le déterminant de la matrice représentative de  $g$  dans la base  $B$  ? Justifier votre réponse.

### Partie 2 : Analyse (14 points)

#### 1. Intégrale de Riemann

- (a) (2 points) Soit  $[a, b]$  un intervalle réel et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Qu'est-ce qu'une primitive de  $f$ . Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- (b) (1 point) On note  $E(x)$  la partie entière d'un réel  $x$ . Soit  $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = E(\sqrt{x})$ . Montrer que  $f$  est en escalier.
- (c) (1 point) Calculer  $\int_0^2 f(t) dt$ .

#### 2. Calculs d'intégrales et primitives

(a) (2 points) Calculer  $\int_0^\pi x \sin(2x) dx$ .

(b) (3 points) Calculer la primitive  $\int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 1} dx$ . Indication : faire un changement de variable  $u = \sin(x)$ .

### 3. Développements limités

(a) (2 points) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $f(x) = \exp(x) - \cos(x) - \frac{x^3}{6}$ .

(b) (1 point) Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en 0. Quelle est la position du graphe de  $f$  par rapport à cette tangente en ce point ?

(c) (2 points) En utilisant un développement limité, calculer la limite en zéro de la fonction  $x \mapsto \frac{1 + x^2 - \cos(x)}{x^2}$ .