Université de Montpellier & Polytech — L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

Contrôle continu - 10 avril 2024

Durée : 1 heure

Calculatrice, téléphone et documents interdits.
Les réponses doivent être soigneusement rédigées.
Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Matrice (3 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & 3 & 0 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Proposition de correction :
Le déterminant est $-a^2 + 4a + 12$, il s'annule pour $a = 6$ ou $a = -2$. La matrice sera donc inversible pour a différent de 6 et -2.

Exercice 2 : Analyse (7 points)

1. (3 points) Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer que
$$\ln(1+x) \leq x, \quad \text{pour } x \geq 0.$$

2. (4 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t}, & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$
Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Étudier l'existence de $f''(0)$.
Indication : on pourra utiliser le théorème de croissances comparées établissant que
$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Proposition de correction :

1. On considère $f(y) = \ln(1 + y)$ sur $[0, x]$ avec $x \geq 0$. La fonction f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Par le TAF, il existe $c \in]0, x[$ telle que
$$\frac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x - 0} = \frac{1}{1 + c}.$$
Donc $\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1 + c} \leq x$.
2. f est dérivable sur $] - \infty, 0[$ comme composée de fonctions dérivables, et sur $]0, +\infty[$ car elle est nulle sur cet intervalle. En 0, le taux de variation s'écrit
$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t, & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t > 0, \end{cases}$$
or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0. Ses dérivées sont identiques et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 0$.
On a
$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2, & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$
Le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est
$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3, & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$
Il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f''(0)$ existe et $f''(0) = 0$.

Exercice 3 : Matrice d'application linéaire et diagonalisation (13 points)
Soit E l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application u définie par
$$\begin{aligned} u : E &\to E \\ p &\mapsto (1 - x)p' + 3p. \end{aligned}$$

1. (2 point) Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. (2 points) Montrer que la matrice A représentative de u dans la base canonique de E est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. (2 points) Montrer que u est injectif.
4. (2 points) Montrer que A est diagonalisable.

5. (3 points) Montrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathrm{vect}(u_1) = \ker(A - 3\,\mathrm{Id}),$$

où Id est la matrice identité de taille 3. Même question avec u_2 et $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\mathrm{vect}(u_2) = \ker(A - 2\,\mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{vect}(u_3) = \ker(A - \mathrm{Id}).$$

En déduire une base des vecteurs propres de A.

6. (2 points) Quelle est la matrice représentative de $u \circ u \circ u$ dans cette base ?

Proposition de correction :

1. Pour $p \in E$, on observe que $u(p) \in E$ puisque $u(p)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. L'ensemble E est donc stable par u. De plus u est bien une application linéaire par linéarité de la dérivation. Pour tout $p, q \in E$ et a, b réels, on a

$$\begin{aligned} u(ap+bq) &= (1-x)(ap' + bq') + 3(ap+bq) \\ &= a((1-x)p' + 3p') + b((1-x)q' + 3q) = au(p) + bu(q). \end{aligned}$$

2. On calcule l'image de u dans la base canonique $(1, x, x^2)$:

$$\begin{cases} u(1) = 3, \\ u(x) = (1-x) + 3x = 1 + 2x, \\ u(x^2) = (1-x)2x + 3x^2 = x^2 + 2x. \end{cases}$$

On en déduit que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. L'image de u est engendrée par 3 vecteurs, $(3,0,0)$, $(1,2,0)$ et $(0,2,1)$, qui sont linéairement indépendants. Par le théorème du rang, on en déduit que la dimension du noyau de u est 0 et par suite, que u est injectif.

4. La matrice A est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc les valeurs de sa diagonale : 3, 2 et 1. Les valeurs propres étant distinctes, la matrice A est diagonalisable.

5. $u_1 = (1,0,0)$ convient, c'est un vecteur propre de A pour la valeur propre 3. $u_2 = (1,-1,0)$ convient, c'est un vecteur propre de A pour la valeur propre 2. $u_3 = (1,-2,1)$ convient, c'est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1. La matrice admettant des valeurs propres distinctes, les vecteurs propres forment une base de A.

6. Dans la base canonique, $u \circ u \circ u$ est représenté par la matrice A^3. Ainsi, dans la base des vecteurs propres, $u \circ u \circ u$ est représenté par D^3 avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(qui vérifie $D = P^{-1}AP$) soit encore

$$D^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$