Université de Montpellier & Polytech — L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

Examen - seconde session - 30 juin 2023

Durée : 2h - Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 : Théorème de Rolle (9 points)

1. (2 points) Donner l'énoncé précis du théorème de Rolle.
2. (1 point) Donner une interprétation graphique du théorème de Rolle.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f'(a) = f'(b)$.
La suite de l'exercice consiste à déterminer s'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) - f(a) = f'(c)(c - a). \tag{1}$$

Pour cela, on introduit la fonction g définie par

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & \text{si } x \neq a, \\ f'(a), & \text{si } x = a, \end{cases}$$

et on note $m = g(b)$.

   (a) (1 point) Montrer g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

   (b) On suppose que $f'(a) = f'(b) = m$.

      i. (1 point) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

      ii. (1 point) La relation (1) est-elle vraie ou fausse ? Justifier soigneusement la réponse.

   (c) On suppose que $f'(a) = f'(b) < m$ (le cas $f'(a) = f'(b) > m$ est analogue en remplaçant f par $-f$). On admet qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $g(d) > m$.

      i. (2 points) Montrer qu'il existe $e \in]a, d[$ tel que $g(e) = m$.

      ii. (1 point) La relation (1) est-elle vraie ou fausse sur $[e, b]$?

Correction :

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [, b] \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur $[a, b]$ et f dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Il existe un point de la courbe représentative de f, d'abscisse dans $]a, b[$, en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Ce point n'est pas unique.
3. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ comme produit de fonctions dérivables. La continuité en a se démontre en utilisant le taux d'accroissement.

(b) (i) On a $g(a) = g(b) = m$. Par application de Rolle, on obtient l'existence de c tel que $g'(c) = 0$. (ii) La relation est vérifiée. Il faut calculer la dérivée de g

$$g'(x) = \frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}.$$

La relation (1) est obtenue en annulant le numérateur.

(c) (i) On utilise le TVI en remarquant que g est dérivable donc continue et que $g(a) < m < g(d)$. (ii) La relation est vraie car on a $g(e) = g(b) = m$.

Exercice 2 : Classe d'une fonction et intégrale (5 points)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. (3 points) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?
2. (2 points) Calculer

$$\int_1^3 f(z)\mathrm{d}z.$$

Correction :

1. f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de fonctions C^1. Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x\ln(x) + x$. Quand $x \to 0^+$, $f'(x) \to 0$. Donc f est dérivbale en 0 et $f'(0) = 0$. On vient aussi de montrer que f' est continue en 0. Donc finalement f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
2. Une IPP suffit à trouver $\int_1^3 f(z)\mathrm{d}z = 9\ln(3) - 26/9$.

Exercice 3 : Diagonalisation (11 points)

1. (3 points) Soient a, b deux réels et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

2. Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z, t) \mapsto \begin{pmatrix} y+z+t \\ x+z+t \\ x+y+t \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

(a) (1 point) Montrer que f est linéaire et donner la matrice de f dans la base canonique. On la notera B.

(b) (2 points) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Quel est le rang de f ?

(c) (2 points) Montrer que B admet comme valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$ et donner la multiplicité de chacune des valeurs propres.

(d) (1 point) Déterminer un vecteur propre associé à λ_2.

(e) (2 points) On admet que $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ et $(-1, 0, 0, 1)$ sont des vecteurs propres associés à λ_1. L'ensemble des vecteurs propres forme-t-il une base de $\mathbb{R}^4$?

Correction :

1. Le calcul $\det(A-\lambda I)=0$ donne $\lambda^2-ab=0$ dont le discriminant est $\Delta=4ab$. On distingue plusieurs cas
   — Soit $ab>0$, alors il y a deux valeurs propres distinctes ($\pm\sqrt{ab}$) et A est diagonalisable.
   — Soit $ab=0$. Il y a deux sous-cas. Soit $a=b=0$, alors A est la matrice nulle qui est déjà diagonale. Soit ($a=0$ et $b\neq 0$) ou ($a\neq 0$ et $b=0$). Dans ce cas, 0 est racine double et A n'est pas diagonalisable.
2. (a) On montre que $f(\lambda(x,y,z,t)+(x',y',z',t'))=\lambda f(x,y,z,t)+f(x',y',z',t')$. La matrice B est
$$B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$
   (b) Le noyau de f est le vecteur nul. Puisque f est linéaire et que l'on est en dimension finie, par application du théorème du rang, on en déduit que le rang de f est 4.
   (c) On trouve que 3 est valeur propre simple et -1 valeur propre triple.
   (d) $(1,1,1,1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 3.
   (e) On a 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Ils forment une famille maximale. Reste à montrer qu'elle est libre. Pour cela, on calcule le déterminant de
$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$
   Celui-ci vaut -4. Comme il est non nul, la famille est libre. Puisqu'elle est maximale et libre, elle forme une base de $\mathbb{R}^4$.