Université de Montpellier & Polytech
HA8201H Mathématiques

L1 PEIP

Examen - première session - 16 mai 2023

Durée : 2h - Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 : Développements limités (3 points)

1. On s'intéresse au développement limité de $f(x) = e^{x^2}$ à l'ordre 4 en 0. Sans faire de calcul et en utilisant les propriétés de f, dire quelle partie principale p_1 ou p_2 est celle de f :

$$p_1(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}, \quad p_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

2. Donner le développement limité de $\cos(x)$ à l'ordre 4 en 0.
3. En déduire la limite de $\dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

Correction :

1. f étant paire, sa partie principale l'est aussi. C'est donc p_1.
2. $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$.
3. Un DL à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2} - \cos(x) = (1 + x^2 + o(x^2)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

D'où $\dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{3}{2} + o(1)$ et la limite est $3/2$.

Exercice 2 : Espaces vectoriels (5 points)

Soient $E = \mathbb{R}^4$ et

$$V = \{(x, y, z, t) \in E |\ x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, t) \in E |\ x + z = y + t\}.$$

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Donner une base de V, de W et de $V \cap W$.
3. A-t-on $E = V + W$? $E = V \oplus W$? Justifier les réponses.

Correction :

1. Pour $(x, y, z, t) \in E$, on pose

$$f((x, y, z, t)) = x - 2y, \quad g((x, y, z, t)) = y - 2z, \quad h((x, y, z, t)) = x + z - y - t.$$

   Ce sont trois formes linéaires sur E. Donc $V = \ker(f) \cap \ker(g)$ est un sev de E comme intersection de sous-espaces vectoriels de E. De même $W = \ker(h)$ est un sev de E.

2. Après calculs, on a $V = \{(4z, 2z, z, t),\ (z, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((4, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. Les deux vecteurs $e_1 = (4, 2, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 0, 0, 1)$ étant linéairement indépendants, (e_1, e_2) forme une base de V. Pour $W = \{(x, y, z, x - y + z),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$, on montrer que $e'_1 = (1, 0, 0, 1)$, $e'_2 = (0, 1, 0, -1)$ et $e'_3 = (0, 0, 1, 1)$ forment une base de W. Enfin, $V \cap W = \{(4z, 2z, z, 3z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(4, 2, 1, 3)$. Comme ce vecteur est non nul, il est une base de $V \cap W$.

3. Soit $u = (x, y, z, t) \in E$. On cherche $v = (4a, 2a, a, b) \in V$ et $w = (d, e, f, d - e + f) \in W$ tels que $u = v + w$. Après calcul, on a $a = 0$, $b = -x + y - z + t$, $d = x$, $e = y$ et $f = z$. Donc pour tout $u \in E$, il existe $(v, w) \in V \times W$ tel que $u = v + w$. Donc $E = V + W$. La somme n'est pas directe car $V \cap W \neq \{0\}$.

Exercice 3 : Application linéaire (4 points)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels. Soit l'application

$$\begin{aligned} g : E &\to E \\ p &\mapsto \int_0^x p(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

1. Montrer que g est linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \{p \in E \mid p(0) = 0\}$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

Correction :

1. On utilise la linéarité de l'intégrale.
2. Soit $p \in \mathrm{Im}(g)$, on a $p(x) = \int_0^x p(t)\mathrm{d}t$. Alors $p(0) = 0$. On note alors que g n'est pas surjective. De plus si $p(0) = 0$, alors $\int_0^x p'(t)\mathrm{d}t = p(x) - p(0) = p(x)$. Alors $p = g(p')$ est dans $\mathrm{Im}(g)$. Cqfd.
3. Soit $p \in \mathrm{Ker}(g)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^x p(t)\mathrm{d}t = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = 0$ en dérivant. Donc $Ker(g) = 0$ et g est injective.

Exercice 4 : Base (4 points)

Soient $f_k(x) = \exp(kx)$, pour $k \in \mathbb{N}$, définies sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(f_k)_{k \leq n}$ est libre.

Correction :

Par récurrence, voir TD 2.

Exercice 5 : Primitives (4 points)
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x$.

Correction :

1. On a par IPP successives (on peut poser un changement de variables) $\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x = x\sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x))\mathrm{d}x = x\sin(\ln(x)) - x\cos(/ln(x) - \int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x$. D'où $\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln(x) - \cos(\ln(x)) + c$.
2. C'est un exemple de décomposition en éléments simples issu du cours. On a

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x}\right| + c.$$