Contrôle continu - 25 avril 2023

Durée : 1h30 - Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Diagonalisation (9 points)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de représentaion dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (3 points) Déterminer les valeurs propres de M.
2. (3 points) Démontrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{vect}(u_1) = \ker(M - \mathrm{Id})$, où Id est la matrice identité de taille 3, et expliciter u_1. Même question pour les vecteurs u_2 et u_3 dans $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\mathrm{vect}(u_2) = \ker(M + \mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{vect}(u_3) = \ker(M - 3\mathrm{Id}).$$

3. (2 points) Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Calculer le déterminant de P. La famille (u_1, u_2, u_3) forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
4. (0,5 point) Quelle est la matrice de représentation de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ? On la notera N.
5. (0,5 point) Écrire la relation qui relie M et N.

Correction :

1. (3 points) Les valeurs propres sont 1, -1 et 3.
2. (3 points) Les vecteurs propres sont

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ u_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. (2 points) Le déterminant de P est -4. La famille est donc libre. Puisqu'elle est maximale, c'est une base.
4. (0,5 point) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
5. (0,5 point) $D = P^{-1}AP$. On ne demande pas le calcul de P^{-1}. S'il est fait correctement, on peut attribuer un bonus.

Exercice 2 : (3 points)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x-\pi/3} \frac{\sin(3x)}{x-\pi/3}, \qquad \lim_{x-\pi/3} \frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}.$$

Correction :
En utilisant le taux d'accroissement de $\sin(3x)$, on trouve -3 pour la première limite. Pour la seconde on réécrit : $\frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)} = \frac{\sin(3x)}{x-\pi/3}\frac{x-\pi/3}{1-2\cos(x)}$. On reconnaît dans le second terme le taux d'accroissement de $2\cos(x)$ en $\pi/3$ (son inverse en fait), ce qui donne que la limite est $-3/\sqrt(3)$.

Exercice 3 : (8 points)
Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ et

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto p(x)e^{\lambda x},\ \text{où } p(x) \text{ est une fonction polynomiale }\}.$$

1. (1 point) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C^1(\mathbb{R})$.
2. (1 point) On considère l'application

$$\begin{aligned} D : E &\to E \\ f &\mapsto f'. \end{aligned}$$

   Montrer que pour tout $f \in E$, $D(f) \in E$ (on dit alors que E est stable par D).
3. (1 point) Montrer que D est linéaire.
4. (2 points) Montrer que D est bijective.
5. (2 points) En utilisant que $g(x) = x^2e^{2x}$ est un élément de E, calculer une primitive de g.
6. (2 points) Retrouver le résultat en effectuant des intégrations par parties.

Correction :
C'est un résultat démontré en cours (deux fois).

1. On vérifie que
   — la fonction nulle est dans E,
   — si f, g sont dans E, $\mu \in \mathbb{R}$, alors $f + \mu g$ est dans E.
2. Soit $f \in \mathcal{E}_{n,\lambda}$, $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, où p est une fonction polynomiale de degré au plus n. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= p'(x)e^{\lambda x} + \lambda p(x)e^{\lambda x} \\ &= (p'(x) + \lambda p(x))e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

   Or $p' + \lambda p$ est un polynôme de degré identique à celui de p (car $\lambda \neq 0$. Ainsi $f' \in \mathcal{E}_{n,\lambda}$.
3. D est $\mathbb{R}$-linéaire car la dérivation des fonctions est linéaire :

$$(f + \mu g)' = f' + \mu g'.$$

4. Montrons que D est injective.

$$\mathrm{Ker}(D) = \{f \in \mathcal{E}_{n,\lambda}\ f' = 0\}.$$

Comme $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, on a $f'(x) = p'(x) + \lambda p(x))e^{\lambda x} = 0$ si et seulement si $p(x) = -\frac{1}{\lambda}p'(x)$. ce qui n'est possible que si $p = 0$ car sinon $\deg(p') < \deg(p)$. Donc $\mathrm{Ker}D = 0$ et D est injective.

D'autre part $\mathcal{E}_{n,\lambda}$ est de dimension finie car il est engendré par les fonctions $x \mapsto x^k e^{\lambda x}$, $0 \leq k \leq n$ qui forment une base. On a donc $\dim(\mathcal{E}_{n,\lambda}) = n+1$. Puisque D injective , le théorème du rang nous donne que $\dim(\mathrm{Im}(D)) = n+1$ c'est à dire que D est surjective. On a donc D bijective.

5. On cherche une primitive de g sous la forme $G(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^{2x}$. En dérivant G on a

$$\begin{aligned} G'(x) = g(x) &= (a_1 + 2a_2 x)e^{2x} + 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^{2x} \\ &= (2a_0 + a_1 + (2a_2 + 2a_1)x + 2a_2 x^2)e^{2x}. \end{aligned}$$

En identifiant, on trouve

$$\begin{cases} 2a_0 + a_1 = 0 \\ 2a_2 + 2a_1 = 0 \\ 2a_2 = 1 \end{cases},$$

d'où $a_2 = 1/2$, $a_1 = -1/2$ et $a_0 = 1/4$, soit $F(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + c$.

6. Posons $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x^2$. Alors $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 2x$. D'où

$$\int x^2 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int x e^{2x}\mathrm{d}x.$$

On refait une IPP sur le dernier terme en posant $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 1$. D'où

$$\int x^2 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x + \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

On retrouve le même résultat : $F(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + C$.