Université de Montpellier & Polytech L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

Contrôle continu - 29 mars 2023

Durée : 1h30 - Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (4 points)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Démontrer rigoureusement vos réponses.

1. Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.
2. Deux droites réelles de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires.
3. Soit f une application injective de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^7$. Alors le rang de f est 7.
4. Une matrice carrée A est de déterminant nul si et seulement si elle admet 0 comme valeur propre.

Correction :

1. (1 point) Vrai. F admet au moins un supplémentaire H dans G. On a donc $\dim(H) = \dim(G) - \dim(F)$, d'où $H = \{0\}$. Ainsi $G = F + H = F$.
2. (1 point) Non. Si les droites vectorielles sont disctinctes, elles engendrent un plan vectoriel et donc pas $\mathbb{R}^3$ tout entier. Si elles sont confondues, elles n'engendrent qu'une droite (la même). Elles ne sont jamais supplémentaires.
3. (1 point) Non. f étant injective, son noyau est réduit à 0 et est de dimension égale à 0. Par le théorème du rang, on a donc $6 = 0 + rg(f)$. Donc la dimension de l'image de f est 6 et pas 7.
4. (1 point) Vrai. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son noyau est nul, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun vecteur colonne X non nul tel que $Ax = 0$, ce qui revient au fait que 0 n'est pas valeur propre.

Exercice 2 : Supplémentaire et somme directe (6 points)
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z, t) = y + z + t$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ x + y = 0,\ z = 2t\}.$$

1. Montrer que f est linéaire. On note E son noyau. Déterminer la dimension et une base de E. L'application f est-elle surjective ?
2. Déterminer la dimension et une base de F.
3. Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.
4. A-t-on $E + F = \mathbb{R}^4$? $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Correction :

1. (3 points) f est bien linéaire. E est de dimension 3. $((1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$ est une base de E. Par le théorème du rang, f est de rang 1, elle est donc surjective.
2. (1 point) F est de dimension 2 de base $((1,-1,0,0),(0,0,2,1))$.
3. (1 point) dimension 1 et $(3,-3,2,1)$ est une base de $E \cap F$.
4. (1 point) $dim(E+F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F) = 3 + 2 - 1 = 4$. Puisque $E + F \subset \mathbb{R}^4$, on a $E + F = \mathbb{R}^4$. Mais comme $E \cap F \neq \{0\}$ la somme n'est pas directe.

Exercice 3 : Base et changement de base (5 points)

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note φ l'application linéaire définie par

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = e_3, \\ \varphi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3, \\ \varphi(e_3) = e_3. \end{cases}$$

1. (1,5 point) Ecrire la matrice A de φ dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de cette application et en donner la dimension.
2. On pose
$$f_1 = e_1 - e_3, \quad f_2 = e_1 - e_2, \quad f_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$$
Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire la matrice B de φ dans la base (f_1, f_2, f_3).
4. Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) vers la base (f_1, f_2, f_3).
5. Calculer l'inverse de P et donner la relation entre A, B, P et P^{-1}.

Correction :

1. (1,5 point) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est $Ker(A) = \{(x, 0, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = vect(1, 0, -1)$.
Le noyau est de dimension 1.
0,5 point pour l'écriture de A et le reste pour le noyau.
2. (1 point) on a $e_1 = f_1 + f_2 + f_3$, $e_2 = f_1 + f_3$ et $e_3 = f_2 + f_3$. Tous les vecteurs de la base (e_1, e_2, e_3) s'expriment en fonction de f_1, f_2, f_3. La famille (f_1, f_2, f_3) est donc génératrice. Comme elle est maximale dans l'ev $\mathbb{R}^3$, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
3. (0,5 point) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. (2 points pour les deux dernières questions) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Si un vecteur a pour coordonnée X dans la base (e_1, e_2, e_3) et X' dans la base (f_1, f_2, f_3) alors $PX' = X$.

Si A est la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3) et B la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3) alors $B = P^{-1}AP$. On retrouve que
$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$

Exercice 4 : Endomorphisme (5 points)
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u^2 = -id_E$ où id_E désigne l'application identité sur E (pour tout $x \in E$, $id_E(x) = x$.
Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

1. (2 points) Montrer que la famille $(x, u(x))$ est libre.
2. (2 point) Si $\dim(E) = 2$, montrer que cette famille est une base et représenter u dans cette base.
3. (1 point) Si $\dim(E) > 2$, on peut démontrer qu'il existe aussi $y \in E$ tel que $(x, u(x), y, u(y))$ est une famille libre (ce résultat est admis). En déduire que $\dim(E) \neq 3$.

Correction :

1. Soient a, b tels que $ax + bu(x) = 0$. On veut montrer que $a = b = 0$. On applique u. Par linéarité de u, on a $u(ax + bu(x)) = 0$ qui donne $au(x) - bx = 0$ par propriété de u. On multiplie la première équation par a, la deuxième pat b pour obtenir $a^2x + b^2x = 0$ soit $a^2 + b^2 = 0$. On a donc nécessairement $a = b = 0$. La famille est donc libre.
2. La famille $(x, u(x))$ est maximale, c'est donc une base de E. On a $u(x) = 0x + 1u(x)$ et $u(u(x)) = -1x + 0u(x)$. La matrice de u dans la base est donc
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Supposons que E soit de dimension 3. Alors les bases de E contiennent exactement 3 éléments. Et toute famille à plus de trois éléments ne peut pas être libre. Or l'énoncé donne l'existence d'une famille libre à 4 éléments. Ce qui n'est pas possible.