



HLMA206Y - Mathématiques S2 PEIP

Session 2 - 30/06/2021 - Durée 1h30

Calculatrice et documents interdits. Le sujet regroupe cinq exercices indépendants.

Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels)

Les parties suivantes de \mathbb{R}^2 sont-elles des sous-espaces vectoriels ? Expliquez votre réponse.

- a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.
- b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$.
- c) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

Exercice 2 (Application linéaire)

Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2).

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose $f(P) = 2XP - X^2P'$.

- a) Montrer que f est une application \mathbb{R} -linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
- b) Donner la matrice M de f dans la base B . Calculer f^3 .
- c) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et en déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ par le théorème du rang.
- d) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- e) Les sous-espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 3 (Noyau et image)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f, g : E \rightarrow E$ deux applications \mathbb{R} -linéaires.

Montrer qu'on a :

$$f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f).$$

Exercice 4 (Fonctions en escalier)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Justifiez clairement vos réponses.

- a) Montrer que si f est en escalier, son image est finie.
- b) Montrer que si f est croissante et si son image est finie, f est en escalier.

Exercice 5 (Calculs d'intégrales)

Calculez les intégrales suivantes :

- a) $\int_0^1 x^2 e^x dx$.
- b) $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \sin^3 x dx$.
- c) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)(x+2)}$ (on pourra écrire cette fraction rationnelle comme une somme d'éléments simples).