Faculté des Sciences Montpellier
Licence PEIP- Semestre pair 2021-22

HA8201H - Mathématiques S2 PEIP

Épreuve de 1ère session - 18/05/2022 - Durée 2h00 (2h40 avec 1/3 temps)

Calculatrice et documents interdits. Le sujet regroupe sept exercices indépendants, quatre en algèbre linéaire et trois en analyse.

Partie algèbre linéaire

Exercice 1 (Applications linéaires)

a) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x+y} - 1$ est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ?

b) L'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = z + \overline{z}$ est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ?

c) L'application g définie en b) est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?

Exercice 2 (Noyau et image)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.

a) Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

b) Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f^2))$.

Exercice 3 (Déterminant)

Soit Δ_n le déterminant $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 3 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

a) Montrer que $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.

b) Montrer $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

T. S. V. P.

Exercice 4 (Étude d'une application linéaire)
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + z + 3t, x + y + 2z + t, x - 2y + 5z - 5t).$$

a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
b) Trouver une base de $\ker(f)$. Quelle est la dimension de cet espace ?
c) Comment peut-on déduire du résultat de b) le rang de f ?
d) Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Partie analyse

Exercice 5 (Bases de l'intégration)
a) [Cours] Qu'est-ce qu'une primitive ? Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
b) On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x. Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = E(x^2).$$

Montrer que la fonction f est en escalier.
c) Calculer $\int_0^2 f(t)dt$.

Exercice 6 (Calculs de primitives)
Calculez les primitives suivantes :
a) $\displaystyle\int x^2 \exp(2x)\, dx$
b) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx$ (changement de variable).
c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ (méthode des éléments simples).

Exercice 7 (Développements limités)
a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.
Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

b) Quelle est la tangente au graphe de f en 0 ? Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de ce point ?
Dessinez le graphe de f et sa tangente en 0.

c) Utilisant un développement limité, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$ a une limite en zéro et calculer cette limite.