Faculté des Sciences Montpellier
Licence PEIP- Semestre pair 2020-21

HLMA206Y - Mathématiques S2 PEIP

Contrôle continu final - 21/05/2021 - Durée 2h00 (2h40 avec 1/3 temps)

Calculatrice et documents interdits. Le sujet regroupe cinq exercices indépendants, deux en algèbre linéaire et trois en analyse.

Partie algèbre linéaire

Exercice 1 (Applications linéaires)
Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}$-linéaires ? Expliquez clairement votre réponse.
a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}$ (si $z = a + ib$, $\overline{z} = a - ib$).
b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x + y)$.
c) $d : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $d(M) = \det(M)$. (On rappelle que $M_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$).

Exercice 2 (Étude d'une application linéaire)
Soit $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'application définie par $f(x, y, z, t) = (y, z, t, x)$, où x, y, z, t sont des nombres complexes.
a) Montrer que f est $\mathbb{C}$-linéaire et écrire sa matrice dans la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.
b) Calculer f^4 et en déduire que f est inversible. Calculer f^{1685}.
c) Soit $g : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ défini par $g(u) = f(u) - u$. Calculer le noyau de g.
d) Soit a un nombre complexe et $u = (1, a, a^2, a^3)$. Trouver une condition sur a pour que les vecteurs u et $f(u)$ forment une famille liée. Si tel est le cas, exprimer le complexe λ tel que $f(u) = \lambda u$ en fonction de a. Quelles sont les valeurs de a possibles ?

On note B la famille formée par les quatre vecteurs

$$\varepsilon_0 = (1, 1, 1, 1), \quad \varepsilon_1 = (1, i, -1, -i), \quad \varepsilon_2 = (1, -1, 1, -1), \quad \varepsilon_3 = (1, -i, -1, i).$$

d) Ecrire la matrice de B dans la base canonique et calculer son déterminant. En déduire que B est une base de $\mathbb{C}^4$.
e) Calculer la matrice de f dans la base B.

T. S. V. P.

Partie analyse

Exercice 3 (Bases de l'intégration)

a) [Cours] Qu'est-ce qu'une primitive ? Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.

b) Donnez 3 subdivisions différentes de l'intervalle $[0,1]$.

c) On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x. Soit $f : [0,16] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = E(\sqrt{x}).$$

Montrer que la fonction f est en escalier. Calculer son intégrale sur l'intervalle $[0,16]$.

Exercice 4 (Calculs de primitives)

Calculez les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int x\cos(2x)\,dx$.

b) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^4 x\,dx$ (on pourra poser $u = \sin x$).

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)}$ (on pourra écrire cette fraction rationnelle comme une somme d'éléments simples).

Exercice 5 (Un développement limité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^3 + 6\cos(x)$.

a) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

b) Au vu de ce développement limité, quelle est l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0,7)$? Que peut-on dire de la position du graphe de f par rapport à la tangente au voisinage de ce point ? Faire un dessin schématique de la tangente et du graphe dans cette région.